2008학년도 경찰대학 제1차 시험 (수리영역)

※ 총 4쪽 25문항입니다. 각 문항의 답을 하나만 고르시오.

1. 복소수 $z=a+bi$ $(a,b$는 실수$)$에 대하여 $\frac{iz}{z-6}$가 실수일 때, a^2+b^2-6a의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

2. 양의 실수의 집합에서 연산 $*$를

$$a*b=-\log_{2^a} 2^{-b}$$

로 정의할 때, 다음 중 가장 큰 수는?

① $1*1$ ② $1*2$ ③ $2*1$ ④ $1*3$ ⑤ $3*1$

3. 다음을 만족시키는 세 실수 a, b, c에 대하여 $4a^2+b^2$의 최소값은?

다항식 ax^3+bx^2+cx-8이 $(x-1)^2$으로 나누어 떨어진다.

① 24 ② 26 ③ 28 ④ 30 ⑤ 32

4. $f(x)=\sqrt{2x-1-2\sqrt{x^2-x}}$ 일 때, $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 두 조건

$$p : |x-a|+|y-b|<3,\ q : x^2+y^2<16$$

에 대하여 p가 q이기 위한 충분조건이 되도록 하는 두 정수 a와 b의 순서쌍 (a,b)의 개수는?

① 5 ② 6 ③ 7

④ 8 ⑤ 무수히 많다

6. 방정식 $x^4-3x^3+4x^2-3x+1=0$의 두 허근을 α, β라 할 때, $\alpha^{2008}+\beta^{2008}$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

7. 일어날 확률이 p 인 사건이 일어날 때 나타나는 놀람의 정도 $S(p)$ $(0<p\leq 1)$ 는

$$S(p)=-C\log_2 p \quad (C>0)$$

로 주어진다. 놀람의 정도가 $3C$ 인 사건이 일어날 확률은 놀람의 정도가 $6C$ 인 사건이 일어날 확률의 몇 배인가?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 8 ⑤ 9

8. 함수 $f(x)$ 는 정의역이 실수 전체의 집합인 함수이다. <보기>에서 함수 $y=F(x)$의 그래프가 y 축에 대하여 대칭인 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $F(x)=f(x)+f(-x)$
ㄴ. $F(x)=|f(x)-f(-x)|$
ㄷ. $F(x)=f(x)f(-x)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

9. 세 점 O(0,0), A(2,2), B(2,−4) 가 꼭지점인 삼각형OAB의 외심이 C(a,b)일 때, $10a+b$의 값은?

① 18 ② 29 ③ 38 ④ 45 ⑤ 53

10. 둘레의 길이가 24인 부채꼴의 넓이의 최대값은?

① 36 ② 40 ③ 44 ④ 48 ⑤ 52

11. 방정식 $4^{\sin x}+6\cdot 4^{-\sin x}=5$ $(0\leq x\leq 2\pi)$ 의 근의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

12. <보기>에서 두 함수의 그래프가 여러 번의 대칭이동과 평행이동으로 일치할 수 있는 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $y=\sqrt{4x-x^2}-1$과 $y=-\sqrt{1-x^2}+4$
ㄴ. $y=2^{x-3}-1$과 $y=3+2\log_{\frac{1}{4}}(x-1)$
ㄷ. $y=\frac{1}{\pi}\sin(\pi x-1)+3$과 $y=-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x+3)-1$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13. 모든 실수 x, y 에 대하여 부등식

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq\frac{f(x)+f(y)}{2}$$

를 만족시키는 $f(x)$를 <보기>에서 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f(x)=\sqrt{|x|}$
ㄴ. $f(x)=2^{|x|}$
ㄷ. $f(x)=\log_2(|x|+1)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14. 어느 시험의 점수 분포가 평균 m, 분산 σ^2인 정규분포를 따른다고 한다. 이 시험에서 m과 $m+\sigma$ 사이의 점수는 성적 '우'를 부여할 때, '우'의 성적이 나올 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$P(0 \leqq Z \leqq z)$
1.0	0.34
1.5	0.43
2.0	0.48
2.5	0.49

① 0.11 ② 0.16 ③ 0.34 ④ 0.43 ⑤ 0.48

15. 확률변수 X가 5보다 작은 자연수에서 값을 취하고 X의 확률분포가

$$\mathrm{P(X=k+1)}=\frac{2}{5}\mathrm{P(X=k)} \quad (\mathrm{k}=1,2,3)$$

로 주어질 때, $\mathrm{P(X \geqq 3)}$의 값은?

① $\frac{2}{29}$ ② $\frac{3}{29}$ ③ $\frac{4}{29}$ ④ $\frac{5}{29}$ ⑤ $\frac{6}{29}$

16. 다음을 만족시키는 집합 A와 B의 순서쌍 (A,B)의 개수는?

(i) $A \cup B=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$
(ii) $n(A)=n(B)=5$

① 560 ② 588 ③ 616 ④ 644 ⑤ 672

17. 각 자리의 수의 합이 19인 세 자리 자연수의 개수는?

① 41 ② 42 ③ 43 ④ 44 ⑤ 45

18. police academy에는 2개의 a, c, e를 포함하여 13개의 문자가 있다. 이 중에서 6개를 뽑을 때, 뽑힌 문자가 모두 다를 확률은?

① $\frac{827}{1716}$ ② $\frac{833}{1716}$ ③ $\frac{839}{1716}$ ④ $\frac{845}{1716}$ ⑤ $\frac{851}{1716}$

19. 넓이가 363인 정삼각형ABC에서 선분BC의 중점을 $\mathrm{P_0}$라 하고, 선분$\mathrm{P_0A}$를 121등분한 점과 끝점을 $\mathrm{P_0}$로부터 차례로

$$\mathrm{P_0, P_1, P_2, \cdots, P_{120}, P_{121}=A}$$

라 하자. 점$\mathrm{P_k}$ $(\mathrm{k}=1,2,3,\cdots,120)$를 지나고 직선$\mathrm{P_0A}$에 수직인 직선이 선분AB와 만나는 점을 $\mathrm{B_k}$라 하고, 선분AC와 만나는 점을 $\mathrm{C_k}$라 하자. 삼각형$\mathrm{P_{k-1}B_kC_k}$$(\mathrm{k}=1,2,3,\cdots,120)$의 넓이를 a_k라 할 때, $\sum_{k=1}^{120} a_k$의 값은?

① 177 ② 178 ③ 179 ④ 180 ⑤ 181

20. 집합 S 는

$$S=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix} \mid a,b \text{는 양의 실수이다.}\right\}$$

이다. S에 속하는 두 행렬 A와 B가 $B^2=4A$를 만족시킬 때, $F(A)=B$로 나타내자.

$$F_1(A)=F(A),\ F_{n+1}(A)=F(F_n(A)) \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

이다. $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix}$일 때, $F_{2008}(A)$의 $(1,1)$성분과 $(1,2)$성분의 곱을 α라고 하자. $\log_2 \frac{1}{\alpha}$의 값은?

① 2000 ② 2003 ③ 2006

④ 2009 ⑤ 2012

21. 행렬 $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$에 대하여 집합 M을

$$M=\left\{\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \mid A^n\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} \text{인 자연수 } n \text{이 존재한다.}\right\}$$

라고 하자. M에 속하는 것은?

① $\begin{pmatrix}5\\ 1\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}6\\ 1\end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix}7\\ -1\end{pmatrix}$ ④ $\begin{pmatrix}16\\ 2\end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix}17\\ 2\end{pmatrix}$

22. 양의 상수 c에 대하여 다음 식

$$a_1=1,\ \frac{1}{a_{n+1}}=\frac{c}{a_n}+1 \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $c=1$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이다.

ㄴ. $c>1$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n=c-1$이다

ㄷ. $0<c<1$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n=1-c$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

23. 일반항이

$$a_n=\sqrt{9n^2-2n}-\left[\sqrt{9n^2-2n}\ \right]$$

인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은?

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{7}$ ③ $\frac{2}{9}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

24. 정의역이 실수 전체의 집합인 함수 $f(x)$가 다음을 만족시킬 때, $f(6)$의 값은?

모든 실수 x, y에 대하여 $f(2x+y)=4f(x)+f(y)+xy+4$ 이다.

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

25. 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$0<\frac{1}{3}-\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{5^k}<\frac{1}{5^n}$$

이 성립하도록 자연수 $a_1, a_2, a_3, \cdots$을 차례로 정할 때, $a_{2007}+a_{2008}+a_{2009}$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9