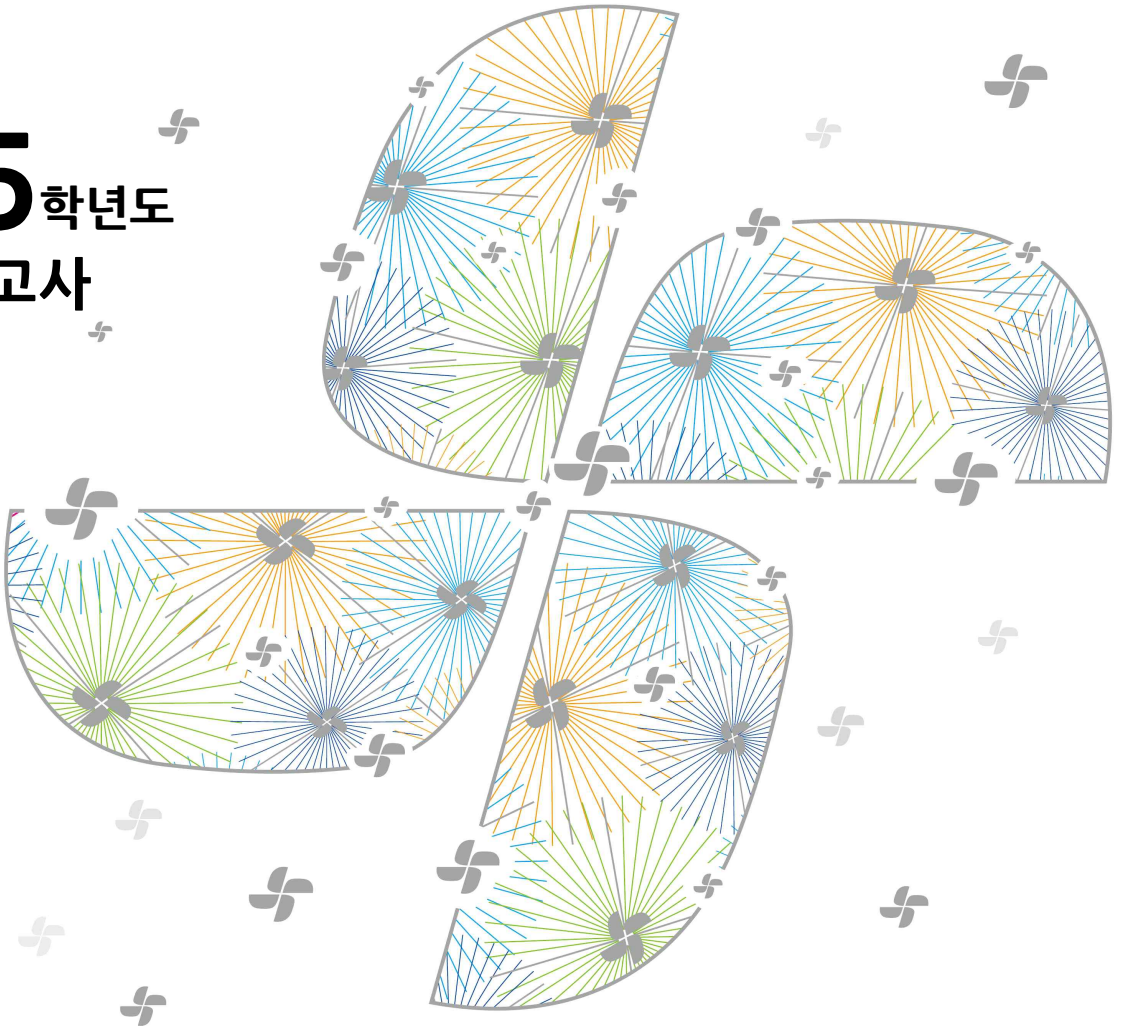
# 2025학년도
# 논술 모의고사
## [의예과]



Gachon
University


128 논술 모의고사 문제 [의예과]

132 논술 모의고사 답안 및 해설 [의예과]


가천대학교
Gachon University

# 2025학년도 의예과 논술 모의고사

[문제 1]

2 이상인 자연수 $n$에 대하여 곡선 $y=\ln(n+x)-\ln(n-x)$과
직선 $y=\ln(2n-1)$ 및 $y$축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S_n$이라 하자.

$\lim_{n\to\infty}\left(S_n+n\ln\frac{2}{n}\right)$의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

무단복제 및 전재금지

[문제 2]

다음 조건을 만족시키는 실수 전체의 집합에서 미분가능한 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $f\left(\frac{1}{2}\right)$의 최댓값을 구하는 과정을 서술하시오.

(가) $0 < x < 1$일 때, $\dfrac{\displaystyle\int_0^x t f(t)\,dt}{\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt} = \dfrac{x e^x - e^x + 1}{e^x - 1}$이다.

(나) $0 \le x \le 1$일 때, $0 < f(x) \le 1$이다.

무단복제 및 전재금지

[문제 3]

실수 $t$와 함수 $f(x) = -x^3 + 6x$에 대하여 $x$에 대한 방정식 $f(x) = t$의 서로 다른 실근의 개수를 $n$이라 할 때, 함수 $g(t)$를 다음과 같이 정의한다.

(가) $n = 1$일 때, $x$에 대한 방정식 $f(x) = t$의 해가 $x = \alpha$이면 $g(t) = \alpha^2$이다.

(나) $n \geq 2$일 때, $g(t)$는 $x$에 대한 방정식 $f(x) = t$의 가장 작은 실근과 가장 큰 실근의 곱이다.

$\lim_{t \to -4\sqrt{2}+} g(t) + \lim_{t \to 4\sqrt{2}+} g(t)$의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

무단복제 및 전재금지

[문제 4]

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax+1}{(x-2)^2} & (x<1)\\ b\left(e^{x-1}+\ln x+3(x-1)^2\right) & (x\geq 1)\end{cases}$$

가 있다. 양수 $s$에 대하여 점 $(s,0)$과 점 $(x,f(x))$ 사이의 거리가 $x=t$에서 최소일 때, 실수 $f(t)$의 값을 $g(s)$라 하자. 함수 $g(s)$의 역함수를 $h(s)$라 할 때, $h'(1)$의 값을 구하는 과정을 서술하시오. (단, $a,b$는 상수이다.)

무단복제 및 전재금지

## 1. 일반 정보

| | | |
|---|---|---|
| 유형 | 논술 고사 | |
| 전형명 | 의예 모의 논술 전형 | |
| 출제영역 | 수학 | |
| 출제범위 | 교육과정 과목명 | 수학 I, 수학 II, 미적분 |
| | 핵심개념 및 용어 | 미분과 수열의 극한 |

## 2. 문항 및 제시문

2 이상인 자연수 $n$에 대하여 곡선 $y=\ln(n+x)-\ln(n-x)$과 직선 $y=\ln(2n-1)$ 및 $y$축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S_n$이라 하자.

$\lim_{n\to\infty}\left(S_n+n\ln\frac{2}{n}\right)$의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

## 3. 출제 의도

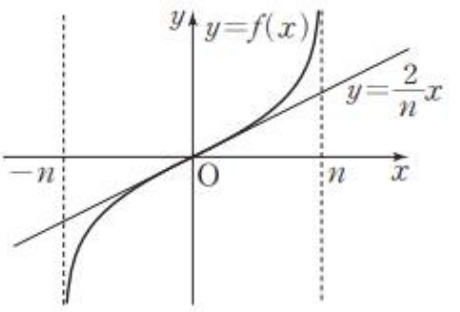
미분과 수열의 극한

## 4. 출제 근거

| 도서명 | 저자 | 발행처 | 발행년도 | 쪽수 |
|---|---|---|---|---|
| 수능특강 | EBS 교육방송 편집부 | 한국교육방송공사 | 2024 | 미적분 (72p,2번) |

## 5. 문항 해설

$y=\ln(n+x)-\ln(n-x)$라 하자. 로그의 진수 조건에 의하여 $n+x>0$, $n-x>0$이므로 $-n<x<n$. 즉, 함수 $f(x)$의 정의역은 열린구간 $(-n,n)$이다. $f'(x)=\frac{1}{n+x}-\frac{-1}{n-x}=\frac{2n}{n^2-x^2}$ 이므로 $-n<x<n$에서 $f'(x)>0$이다. $-n<x<n$인 모든 실수 $x$에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로 곡선 $y=f(x)$는 원점에 대하여 대칭이다. 또한, $\lim_{x\to -n+}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to n-}f(x)=\infty$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.




$y=\ln(2n-1)$과 $y=\ln(n+x)-\ln(n-x)$이 만나는 점은 $(n-1,\ln(2n-1))$이다. 곡선 $y=\ln(n+x)-\ln(n-x)$과 직선 $y=\ln(2n-1)$ 및 $y$축으로 둘러싸인 부분의 넓이 $S_n$은 $S_n=(n-1)\ln(2n-1)-\int_0^{n-1}\ln(n+x)-\ln(n-x)\,dx$이다. $\int_0^{n-1}\ln(n+x)-\ln(n-x)\,dx=(2n-1)\ln(2n-1)-2n\ln n$ 이므로 $S_n=2n\ln n-n\ln(2n-1)$ 이다.

$$\left(S_n+n\ln\frac{2}{n}\right)=2n\ln n-n\ln(2n-1)+n\ln 2-n\ln n$$
$$=n\ln 2n-n\ln(2n-1)=\ln\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^n$$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\left(S_n+n\ln\frac{2}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}ln\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^n$이다.

$$\lim_{n\to\infty}ln\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2n}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}ln\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{-2n\times-1/2}}=\ln\frac{1}{e^{-1/2}}=\frac{1}{2}.$$

## 6. 채점 기준

| 답안 | 배점 |
|---|---|
| $(n-1,\ln(2n-1))$ | 3 |
| $S_n=(n-1)\ln(2n-1)-\int_0^{n-1}\ln(n+x)-\ln(n-x)dx$ | 6 |
| $S_n=2n\ln n-n\ln(2n-1)$ | 6 |
| $\lim_{n\to\infty}\left(S_n+n\ln\frac{2}{n}\right)=\frac{1}{2}$ | 5 |

무단복제 전재금지

## 1. 일반 정보

| | | |
|---|---|---|
| 유형 | 논술 고사 | |
| 전형명 | 의예 모의 논술 전형 | |
| 출제영역 | 수학 | |
| 출제범위 | 교육과정 과목명 | 수학 II, 미적분학 |
| | 핵심개념 및 용어 | 정적분 |

## 2. 문항 및 제시문

다음 조건을 만족시키는 실수 전체의 집합에서 미분가능한 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $f\left(\frac{1}{2}\right)$의 최댓값을 구하는 과정을 서술하시오.

(가) $0 < x < 1$일 때, $\dfrac{\displaystyle\int_0^x t f(t)\,dt}{\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt} = \dfrac{x e^x - e^x + 1}{e^x - 1}$이다.

(나) $0 \le x \le 1$일 때, $0 < f(x) \le 1$이다.

## 3. 출제 의도

정적분의 값 구하기

## 4. 출제 근거

| 도서명 | 저자 | 발행처 | 발행년도 | 쪽수 |
|---|---|---|---|---|
| 수능특강 (미적분) | EBS 교육방송 편집부 | 한국교육방송공사 | 2024 | p76 참고<br>p81 유제7 |

## 5. 문항 해설

$0<x<1$ 일 때 (가) 식의 양변을 미분하면

$$\frac{e^x(e^x-x-1)}{(e^x-1)^2}=\frac{xf(x)\int_0^x f(t)dt-f(x)\int_0^x tf(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}=\frac{f(x)}{\int_0^x f(t)dt}\left[x-\frac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}\right]$$

$$=\frac{f(x)}{\int_0^x f(t)dt}\left[x-\frac{xe^x-e^x+1}{e^x-1}\right]$$

$$=\frac{f(x)}{\int_0^x f(t)dt}\left[\frac{e^x-x-1}{e^x-1}\right]$$

즉, $\frac{f(x)}{\int_0^x f(t)dt}=\frac{e^x}{e^x-1}$ 이다. $\int_0^x f(t)dt=\frac{e^x-1}{e^x}f(x)=(1-e^{-x})f(x)$ 의 양변을 미분해서 정리하면 $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1-e^{-x}}{1-e^{-x}}=1$ 이다. 이제 양변을 적분하면

$\ln f(x)=\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=x+C$이므로 $f(x)=ke^x$ 이다.($k=e^C>0$, $C$는 적분상수)

$f(x)$ 는 증가함수이므로 (나)에 의해서 $f(x)\le f(1)=ke\le 1$이고 $k\le\frac{1}{e}$ 이다.

따라서 $f\left(\frac{1}{2}\right)\le\frac{e^{1/2}}{e}=\frac{1}{\sqrt{e}}$ 이다. $f(x)=\frac{e^x}{e}$ 일 때, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{e}}$ 이므로 $f\left(\frac{1}{2}\right)$의 최댓값은 $\frac{1}{\sqrt{e}}$ 이다.

## 6. 채점 기준

| 답안 | 배점 |
|---|---|
| $\frac{f(x)}{\int_0^x f(t)dt}=\frac{e^x}{e^x-1}$ 또는 $\int_0^x f(t)dt=\frac{e^x-1}{e^x}f(x)=(1-e^{-x})f(x)$ | 7 |
| $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1-e^{-x}}{1-e^{-x}}=1$ | 7 |
| $\ln f(x)=\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=x+C$ 또는 $f(x)=e^Ce^x=ke^x$ | 4 |
| $f\left(\frac{1}{2}\right)$의 최댓값은 $\frac{1}{\sqrt{e}}$. | 2 |

무단복제 및 전재금지

## 1. 일반 정보

| | | |
|---|---|---|
| 유형 | 논술 고사 | |
| 전형명 | 의예 모의 논술 전형 | |
| 출제영역 | 수학 | |
| 출제범위 | 교육과정 과목명 | 수학 II |
| | 핵심개념 및 용어 | 극한, 도함수의 응용 |

## 2. 문항 및 제시문

실수 $t$와 함수 $f(x)=-x^3+6x$에 대하여 $x$에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $n$이라 할 때, 함수 $g(t)$를 다음과 같이 정의한다.

(가) $n=1$일 때, $x$에 대한 방정식 $f(x)=t$의 해가 $x=\alpha$이면 $g(t)=\alpha^2$이다.

(나) $n \geq 2$일 때, $g(t)$는 $x$에 대한 방정식 $f(x)=t$의 가장 작은 실근과 가장 큰 실근의 곱이다.

$\lim_{t \to -4\sqrt{2}+} g(t) + \lim_{t \to 4\sqrt{2}+} g(t)$의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

## 3. 출제 의도

불연속 함수의 우극한 구하기

## 4. 출제 근거

| 도서명 | 저자 | 발행처 | 발행년도 | 쪽수 |
|---|---|---|---|---|
| 수능특강 (수학 2) | EBS 교육방송 편집부 | 한국교육방송공사 | 2024 | 28(3번) |

## 5. 문항 해설

3차 방정식 $x^3-6x+t=0$의 실근을 크기 순으로 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$라 하자. 즉, $\alpha \le \beta \le \gamma$이고 $\alpha \ne \gamma$이다. 3차 방정식의 근과 계수와의 관계로부터 $\alpha\beta\gamma=-t$이므로 $g(t)=\alpha\gamma=-\frac{t}{\beta}$이다. 또한, $\beta^3-6\beta+t=0$이므로

$$g(t)=-\frac{t}{\beta}=\frac{\beta^3-6\beta}{\beta}=\beta^2-6$$

$y=-x^3+6x$의 도함수는 $x=\pm\sqrt{2}$의 좌우에서 부호가 바뀌고 극댓값은 $4\sqrt{2}$, 극솟값은 $-4\sqrt{2}$. 따라서 $x^3-6x+t=0$이 서로 다른 2개 이상의 실근을 가지기 위한 $t$의 범위는 $[-4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}]$이고, 이때 $g(t)=-\frac{t}{\beta}=\beta^2-6$이다. 그 외의 구간에서는 한 개의 실근을 갖고, 이때 $f(x)=t$의 해가 $x=\alpha$이면 $g(t)=\alpha^2$이다. 구간 $[-4\sqrt{2}, 0]$에서 $\beta$의 값이 $-\sqrt{2}$에서 0으로 증가할 때 $g(t)$의 값은 $-4$에서 $-6$으로 감소한다. 구간 $[0, 4\sqrt{2}]$에서 $\beta$의 값이 0에서 $\sqrt{2}$로 증가할 때 $g(t)$의 값은 $-6$에서 $-4$로 증가한다. 따라서 $\lim_{t\to -4\sqrt{2}+} g(t)=-4$. 또한, $|t|>4\sqrt{2}$일 때 $|\alpha|>2\sqrt{2}$이므로 $g(t)>8$이고, $\lim_{t\to 4\sqrt{2}+} g(t)=8$이다. 결국,

$$\lim_{t\to -4\sqrt{2}+} g(t)+\lim_{t\to 4\sqrt{2}+} g(t)=-4+8=4$$

## 6. 채점 기준

| 답안 | 배점 |
|---|---|
| $x^3-6x+t=0$의 실근을 크기 순으로 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$라 할 때, $g(t)=-\frac{t}{\beta}=\frac{\beta^3-6\beta}{\beta}=\beta^2-6$ | 6 |
| 서로 다른 2개 이상의 실근을 가지기 위한 $t$의 범위는 $[-4\sqrt{2}.4\sqrt{2}]$. | 4 |
| $\lim_{t\to -4\sqrt{2}+} g(t)=-4$ | 5 |
| $\lim_{t\to 4\sqrt{2}+} g(t)=8$ | 5 |

무단복제 및 재배포 금지

## 1. 일반 정보

| | | |
|---|---|---|
| 유형 | 논술 고사 | |
| 전형명 | 의예 모의 논술 전형 | |
| 출제영역 | 수학 | |
| 출제범위 | 교육과정 과목명 | 수학 II, 미적분학 |
| | 핵심개념 및 용어 | 미분가능과 연속, 여러 가지 미분법 |

## 2. 문항 및 제시문

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax+1}{(x-2)^2} & (x<1)\\ b\left(e^{x-1}+\ln x+3(x-1)^2\right) & (x\geq 1)\end{cases}$$

가 있다. 양수 $s$에 대하여 점 $(s,0)$과 점 $(x,f(x))$ 사이의 거리가 $x=t$에서 최소일 때, 실수 $f(t)$의 값을 $g(s)$라 하자. 함수 $g(s)$의 역함수를 $h(s)$라 할 때, $h'(1)$의 값을 구하는 과정을 서술하시오. (단, $a,b$는 상수이다.)

## 3. 출제 의도

미분가능과 연속 및 여러 가지 미분법 적용

## 4. 출제 근거

| 도서명 | 저자 | 발행처 | 발행년도 | 쪽수 |
|---|---|---|---|---|
| 수능특강 (미적분) | EBS 교육방송 편집부 | 한국교육방송공사 | 2024 | 57(1번) |

## 5. 문항 해설

$f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax+1}{(x-2)^2} & (x<1)\\ b\left(e^{x-1}+\ln x+3(x-1)^2\right) & (x\geq 1)\end{cases}$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하므로 연속이다.

따라서 $a+1=b$을 만족하고, 미분계수가 존재하므로 $3a+2=2b$를 만족한다. 따라서, $a=0, b=1$ 이다.

최소 거리이기 위해서는 점 $Q(s,0)$와 점 $P(t,f(t))$에 대하여 $P$에서의 접선과 직선 $PQ$가 서로 수직이다.

$t\geq 1$일 때, $\left(\dfrac{e^{t-1}+\ln t+3(t-1)^2}{t-s}\right)\times\left(e^{t-1}+\dfrac{1}{t}+6(t-1)\right)=-1$ 이므로

$s=\left(e^{t-1}+\ln t+3(t-1)^2\right)\times\left(e^{t-1}+\dfrac{1}{t}+6(t-1)\right)+t$ 를 만족한다.

이때, $g(s)=f(t)=e^{t-1}+\ln t+3(t-1)^2$ 이고 $t=1$일 때, $s=3$이므로 $g(3)=f(1)=1$이고 역함수 $h(1)=3$이다.

$g(h(s))=s$를 미분하면 $h'(s)=\dfrac{1}{g'(h(s))}$ 이므로 $h'(1)=\dfrac{1}{g'(h(1))}=\dfrac{1}{g'(3)}$을 계산한다.

$g'(s)=f'(t)\dfrac{dt}{ds}=\left(e^{t-1}+\dfrac{1}{t}+6(t-1)\right)$

$\times\left(\left(e^{t-1}+\dfrac{1}{t}+6(t-1)\right)^2+\left(e^{t-1}+\ln t+3(t-1)^2\right)\left(e^{t-1}-\dfrac{1}{t^2}+6\right)+1\right)^{-1}$

이므로 $g'(3)=\dfrac{2}{11}$ 이고, $h'(1)=\dfrac{1}{g'(3)}=\dfrac{11}{2}$ 이다.

## 6. 채점 기준

| 답안 | 배점 |
|---|---|
| $a=0, b=1$ | 6 |
| $\left(\dfrac{e^{t-1}+\ln t+3(t-1)^2}{t-s}\right)\times\left(e^{t-1}+\dfrac{1}{t}+6(t-1)\right)=-1$ | 4 |
| $g'(3)=\dfrac{2}{11}$ | 6 |
| $h'(1)=\dfrac{11}{2}$ | 4 |

무단전재 및 재배포 금지