계 열 문 항

<가>
세 집합 X, Y, Z에 대하여 두 함수

$$f : X \to Y,\ g : Y \to Z$$

가 주어질 때, 집합 X의 각 원소 x에 대하여 $f(x)$는 집합 Y의 원소이고, 집합 Y의 원소 $f(x)$에 대하여 $g(f(x))$는 집합 Z의 원소이다. 따라서 집합 X의 각 원소 x에 집합 Z의 원소 $g(f(x))$를 대응시키면 X를 정의역, Z를 공역으로 하는 새로운 함수를 정의할 수 있다.
이 새로운 함수를 f와 g의 합성함수라 하며, 이것을 기호로

$$g \circ f : X \to Z$$

와 같이 나타낸다.
또 합성함수 $g \circ f : X \to Z$에 대하여 x에서의 함숫값을 기호로

$$(g \circ f)(x)$$

와 같이 나타낸다. 이때 X의 임의의 원소 x에 Z의 원소 $g(f(x))$가 대응하므로

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

이다. 따라서 f와 g의 합성함수를

$$y = g(f(x))$$

와 같이 나타낼 수도 있다.

<나>
방정식 $f(x) = g(x)$의 실근은 두 함수 $y = f(x)$와 $y = g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다. 따라서 방정식 $f(x) = g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y = f(x)$와 $y = g(x)$의 그래프의 교점의 개수를 조사하여 구할 수 있다.

제시문 <가>와 <나>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

1-1. 이차함수 $f(x) = a(x+2)(x-3)$에 대하여 방정식 $f(f(x)) = 0$의 서로 다른 실근의 개수가 3일 때, 실수 a의 값을 구하시오. (단, $a > 0$)

1-2. 함수 $f(x) = a\sin x\ (0 \le x \le \pi)$에 대하여 방정식 $f(f(x)) = 0$의 서로 다른 실근의 개수가 4일 때, 실수 a의 범위를 구하시오. (단, $a > 0$)

계 열 문 항

<다>

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 교점의 x좌표는 방정식

$ax^2+bx+c=mx+n$, 즉

$$ax^2+(b-m)x+c-n=0 \quad \cdots\cdots \text{①}$$

의 실근과 같다. 따라서 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치 관계는 이차방정식 ①의 판별식

$$D=(b-m)^2-4a(c-n)$$

의 값의 부호에 따라 다음과 같다.

(1) $D>0$이면 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $D=0$이면 한 점에서 만난다. (접한다.)

(3) $D<0$이면 만나지 않는다.

제시문 <다>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

2-1. 두 이차함수 $y=-x^2-2$과 $y=x^2-2ax+a^2+a$의 그래프에 동시에 접하는 직선이 두 개 존재하고 서로 수직으로 만날 때, 실수 a의 값을 구하시오.

2-2. 두 이차함수 $y=x^2$과 $y=ax^2-ax\,(a>0)$의 그래프에 동시에 접하는 직선의 개수와 두 이차함수의 그래프의 교점의 개수는 서로 같음을 보이시오.

계 열 문 항

<라>
임의의 실수 a, b를 포함하는 구간에서 연속인 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

이다.

<마>
닫힌구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $f(x)$와 미분가능한 함수 $x = g(t)$에 대하여 $a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$일 때 $x = g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 α, β를 포함하는 구간에서 연속이면

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

이다.

제시문 <라>와 <마>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

3-1. 실수 전체에서 연속인 함수 $f(x)$가 상수 c에 대하여

$$f(x) + f(c-x) = c$$

를 만족시킨다. $\int_0^c f(x)dx = 2$일 때, 상수 c의 값을 모두 구하시오.

3-2. 실수 전체에서 연속인 함수 $f(x)$가 상수 c에 대하여

$$f(x) + f(c-x) = c$$

를 만족시킨다. 정적분

$$\int_{\frac{c}{4}}^{\frac{3c}{4}} f(f(x))dx$$

의 값을 구하시오.