2004학년도 10월 고3 전국연합학력평가 문제지

제 2 교시

# 수 리 영 역

| ‘나’형 | 성명 | | 수험번호 | | | | | | 3 | | | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

○ 먼저 수험생이 선택한 응시 유형의 문제지인지 확인하시오.
○ 문제지에 성명과 수험 번호를 정확히 기입하시오.
○ 답안지에 수험 번호, 응시 유형 및 답을 표기할 때에는 반드시 ‘수험생이 지켜야 할 일’에 따라 표기하시오.
○ 단답형 답의 숫자에 0이 포함된 경우, 0을 OMR 답안지에 반드시 표기해야 합니다.
○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

1. $\log_2 \frac{8}{5} + \log_4 \frac{25}{4}$의 값은? [2점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

2. $\sum_{k=1}^{10} (k+2)^2$의 값은? [2점]

① 645 ② 630 ③ 615
④ ⑤

3. 두 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$에 대하여 $A^2 + AB$의 모든 성분의 합은? [2점]

① 5 ② 10 ③
④ 20 ⑤ 25

4. 확률변수 $X$에 대하여 확률변수 $Y = \frac{1}{2}X + 5$의 평균이 30일 때, $X$의 평균은? [3점]

① 20 ② 35 ③
④ 45 ⑤ 50

5. 이차 정사각행렬 $A=\begin{pmatrix} 4 & 12 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$와 두 이차 정사각행렬 $B$, $C$에 대하여 $B^{-1}=2A$, $C^{-1}=2B$가 성립할 때, 행렬 $C$는? (단, $X^{-1}$는 $X$의 역행렬이다.) [3점]

① $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 4 & 12 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix} 8 & 24 \\ -16 & 0 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 16 & 48 \\ -32 & 0 \end{pmatrix}$

6. 다음은 네 자연수 1, 2, 3, 4를 한 번씩 사용하여 만든 네 자리 정수를 크기 순으로 나열한 것이다.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1234 | 1243 | … | 1423 | 1432 |
| 2134 | 2143 | … | 2413 | 2431 |
| 3124 | 3142 | … | 3412 | 3421 |
| 4123 | 4132 | … | 4312 | 4321 |

위의 모든 수들의 총합은? [3점]

① 88880 ② 77770 ③ 66660
④ 55550 ⑤ 44440

7. $\frac{12}{99}$를 순환소수로 나타낼 때, 소수점 아래 $n$째 자리의 수를 이라 하자. 예를 들면 이다.

이때, 의 값은? [3점]

① ② ③
④ ⑤

8. 좌표평면에서 두 점 $\mathrm{P}(a, b)$와 $\mathrm{Q}(c, d)$를 지나는 직선을 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대응시킨다. 〈보기〉의 행렬의 연산 결과에 대응하는 직선 중 행렬 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$에 대응하는 직선과 서로 평행한 것을 모두 고른 것은? [3점]

〈 보 기 〉

ㄱ. $2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

ㄴ. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

ㄷ. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

9. 연속확률변수 $X$가 취하는 값의 범위가 이고, 확률밀도함수 $f(x)$가

$$f(x)=kx\ (0\leqq x\leqq 2)$$

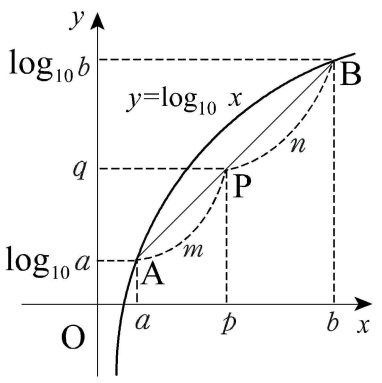
일 때, 확률 $\mathrm{P}(0\leqq X\leqq k)$의 값은? (단, 는 상수) [4점]

① $\frac{1}{32}$ ② $\frac{1}{16}$ ③
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

10. 다음은 함수 $y = \log_{10} x$의 그래프를 이용하여 두 수 $\frac{na+mb}{m+n}$, $a^{\frac{n}{m+n}} b^{\frac{m}{m+n}}$의 대소관계를 알아보는 과정이다. (단, $0 < a < b$, $m$, $n$은 양수)

그림에서 두 점 $A(a, \log_{10} a)$, $B(b, \log_{10} b)$를 이은 선분 AB를 $m : n$으로 내분하는 점을 $P(p, q)$라 하면

$p = \frac{na+mb}{m+n}$, $q = \frac{1}{m+n} \times$ (가)




그런데, $\log_{10} p$ (나) $q$이므로

부등식 $\frac{na+mb}{m+n}$ (다) $a^{\frac{n}{m+n}} b^{\frac{m}{m+n}}$가 성립한다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은? [3점]

① $\log_{10}(ab)^{mn}$, >, >
② $\log_{10}(ab)^{mn}$, <, <
③ $\log_{10} a^n b^m$, >, <
④ $\log_{10} a^n b^m$, >, >
⑤ $\log_{10} a^n b^m$, <, <

11. 다음은 $n$이 자연수일 때

등식 $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r a^{n-r} b^r$이 성립함을 수학적귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

(증명)

(ⅰ) $n = 1$ 일 때,

$(a+b)^1 = \sum_{r=0}^{1} {}_1C_r a^{1-r} b^r = a + b$이므로

주어진 등식은 성립한다.

(ⅱ) $n = k(k \geq 1)$ 일 때,

주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$(a+b)^k = \sum_{r=0}^{k} {}_kC_r a^{k-r} b^r$이므로

$$(a+b)^{k+1} = \left(\sum_{r=0}^{k} {}_kC_r a^{k-r} b^r\right)(a+b)$$

$$= \sum_{r=0}^{k} {}_kC_r a^{k-r+1} b^r + \sum_{r=0}^{k} {}_kC_r a^{k-r} b^{r+1}$$

$$= {}_kC_0 a^{k+1} + \sum_{r=1}^{k} {}_kC_r a^{k-r+1} b^r$$

$$+ \sum_{r=0}^{k-1} {}_kC_r a^{k-r} b^{r+1} + {}_kC_k b^{k+1}$$

그런데,

$\sum_{r=0}^{k-1} {}_kC_r a^{k-r} b^{r+1} =$ (가)

${}_kC_r + {}_kC_{r-1} =$ (나)

이므로

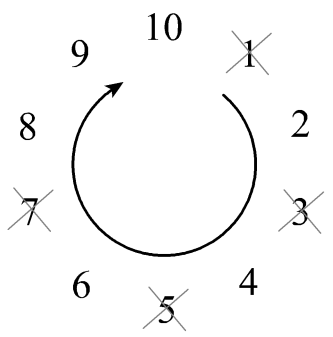
$(a+b)^{k+1} = \sum_{r=0}^{k+1} {}_{k+1}C_r a^{k+1-r} b^r$

(ⅰ)과 (ⅱ)에서 모든 자연수 $n$에 대하여 주어진 등식은 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 식을 순서대로 적은 것은? [3점]

① ,
② ,
③ ,
④ ,
⑤ ,

12. 그림과 같이 1부터 10까지의 자연수가 시계방향으로 둥글게 놓여있다.




맨 처음 1을 지우고 2를 건너뛰어 3을 지운다. 다시 4를 건너뛰어 5를 지운다. 이와 같이 한 개의 수를 지우고 난 다음 아직 지워지지 않고 남아있는 수 중에서 한 개의 수를 건너뛰어 그 다음에 남아있는 수를 지우는 시행을 반복하면 1, 3, 5, 7, 9, 2, 6, 10, 8이 차례로 지워지고 마지막에 4가 남는다.

1부터 $n$까지의 자연수를 시계방향으로 둥글게 놓고 이와 같은 시행을 반복할 때, $k$번째 ($1 \le k < n$)에 지워지는 수를 ${}_nA_k$로 나타내자. 예를 들면 ${}_{10}A_6 = 2$이다. 이때, <보기> 중 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

〈 보 기 〉

ㄱ. $n$이 홀수일 때, ${}_nA_k = n$이면 $k = \frac{n+1}{2}$이다.

ㄴ. $n$이 짝수일 때, ${}_nA_k = n$이면 $k = \frac{n}{2} + 1$이다.

ㄷ. $n = 2^6$일 때, 시행 후 마지막에 남는 수는 $2^6$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

13. 숫자 1이 적힌 카드가 1장, 2가 적힌 카드가 2장, 3이 적힌 카드가 3장, 4가 적힌 카드가 4장 있다. 이 10장의 카드를 모두 섞은 후 두 장의 카드를 임의로 뽑을 때, 두 장의 카드에 적힌 수가 같을 확률은? [4점]

①  ②  ③
④  ⑤

14. 서로 다른 세 양수  에 대하여 부등식

$$\log_2 a - \log_2 b > \log_2 b - \log_2 c > \log_2 c - \log_2 a$$

가 성립할 때, <보기> 중 항상 성립하는 것을 모두 고른 것은? [4점]

〈 보 기 〉

ㄱ. $a > b$  ㄴ. $b > c$  ㄷ.

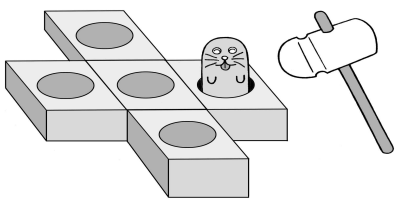
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

15. 어느 상품의 수요량 $D$와 판매가격 $P$사이에는 $\log_a D = \log_a c - \frac{1}{3}\log_a P$ ($a$, $c$는 양의 상수, $a \neq 1$) 인 관계가 성립한다고 한다. 이 상품의 판매가격이 $P_1$, $4P_1$일 때의 수요량을 각각 $D_1$, $D_2$라 할 때, 의 값은? [4점]

① $2^{-\frac{2}{3}}$  ② $2^{-\frac{1}{3}}$  ③
④ $2^{\frac{1}{3}}$  ⑤ $2^{\frac{2}{3}}$

16. 그림과 같이  개의 정사각형 중의 한 개에서 두더지 인형

이 튀어나왔다 들어가고, 다시 한 정사각형에서 두더지 인형이 튀어나왔다 들어가기를 반복하는 오락 기계가 있다.



매번 각 정사각형에서 두더지 인형이 나올 가능성이 모두 같다. 이 오락기계의 두더지 인형이 두 번 튀어나왔다가 들어갈 때, 두더지 인형이 나온 두 정사각형이 서로 이웃할 확률은? (단, 한 변만을 공유하는 두 정사각형을 이웃하는 정사각형이라고 한다.) [4점]

① $\frac{4}{25}$ ② $\frac{5}{25}$ ③ $\frac{6}{25}$
④ $\frac{7}{25}$ ⑤ $\frac{8}{25}$

17. 어느 장학재단은 14억 원의 기금을 조성하였다. 매년 초에 기금을 운용하여 연말까지 20%의 이익을 내고, 기금과 이익을 합한 금액의 40%를 매년 말에 장학금으로 지급하려 한다. 장학금으로 지급하고 남은 금액을 기금으로 하여 기금의 운용과 장학금의 지급을 매년 이와 같은 방법으로 실시 할 계획이다. 이 계획대로 해마다 지급한 장학금의 총액의 극한값은? (단, 단위는 억 원이다.) [4점]

① 24 ② 26 ③ 28
④ 30 ⑤ 32

## 단답형

18. $\lim_{n\to\infty} \frac{(3n)^3}{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}$ 의 값을 구하시오. [3점]

19. $a = 2^{\frac{2}{3}}$, $b = 3^{\frac{1}{6}}$ 일 때, $a^m b^n = 36$을 만족하는 두 자연수 $m$, $n$의 합 의 값을 구하시오. [3점]

20. 7개의 문자 $a$, $b$, $b$, $c$, $c$, $c$, $d$를 일렬로 나열할 때, 양쪽 끝에는 서로 다른 문자가 오는 경우의 수를 구하시오. [3점]

21. $x$에 대한 방정식 $(\log_2 x)\left(\log_2 \frac{16}{x}\right) = \frac{m}{16}$의 해가

존재하도록 실수 $m$의 값의 범위를 정할 때, $m$의 최대값을 구하시오. [3점]

22. 수열 $\{a_n\}$이

$$a_1 = 2,\ a_n + a_{n+1} = 3n\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

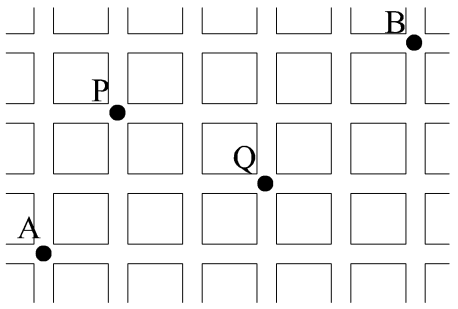
으로 정의된다. 이때, 두 수

$$P = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \cdots + a_{19}$$
$$Q = a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + \cdots + a_{20}$$

에 대하여 $P - Q$의 값을 구하시오. [4점]

23. 철수와 영희는 볼링 시합에서 두 게임을 연속하여 이기는 사람이 우승하기로 하였다. 매게임마다 철수가 영희를 이길 확률이 $\frac{2}{3}$라고 할 때, 다섯 번째 게임에서 철수가 우승할 확률은 $\frac{q}{p}$ ($p$, $q$는 서로소인 자연수)이다. 이때, 의 값을 구하시오. (단, 비기는 경우는 없다.) [4점]

24. 그림과 같이 바둑판 모양의 도로망이 있다. 교차로 P와 교차로 Q를 지날 때에는 직진 또는 우회전은 할 수 있으나 좌회전은 할 수 없다고 한다. 이때, A지점에서 B지점까지 최단거리로 가는 방법의 수를 구하시오. [4점]




25. 오른쪽 표는 어느 달 국내 원유 수입량의 70%를 차지하는 두바이(Dubai)유의 1배럴당 국제 가격을 일주일 간격으로 나타낸 것이다. 이 표에 있는 두바이유의 가격 $a_n$은 다음 관계식을 만족한다.

$$a_n = 34.4 + 0.3 \times b_n$$

(단, $n$은 자연수)

(가격단위 : 달러)

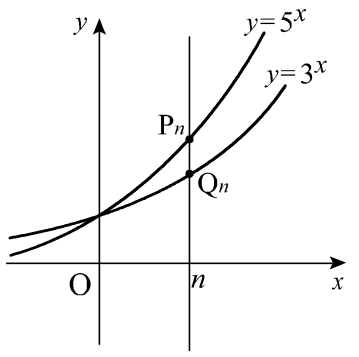
| $n$ 째주 | 두바이유 가격 $a_n$ |
|---|---|
| 1 | 34.7 |
| 2 | 35.0 |
| 3 | 35.6 |
| 4 | 36.8 |
| 5 | 39.2 |
| ⋮ | ⋮ |

이러한 추세로 가격이 결정될 때, $\sum_{k=1}^{8} b_k$의 값을 구하시오. [4점]

## 5지 선다형

26. 자연수 $n$에 대하여 두 지수함수 $y = 5^x$, $y = 3^x$의 그래프와 직선 $x = n$과의 교점을 각각 $P_n$, $Q_n$이라 하자.

이때, $\lim_{n\to\infty} \frac{\overline{P_{n+1}Q_{n+1}}}{\overline{P_nQ_n}}$의 값은? [3점]




① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

27. 동전 한 개를 두 번 던진 결과 적어도 한 번은 앞면이 나왔다고 한다. 두 번째 던진 동전이 앞면이 나왔을 확률은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

28. 지수함수 $f(x)=a^x$에 대한 <보기> 의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은 ? ( 단, $a>0$, $a\neq 1$ ) [3점]

〈 보 기 〉

ㄱ. $f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}$

ㄴ. $f(x)=\sqrt{f(2x)}$

ㄷ. $f(x^3)=\{f(x)\}^3$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

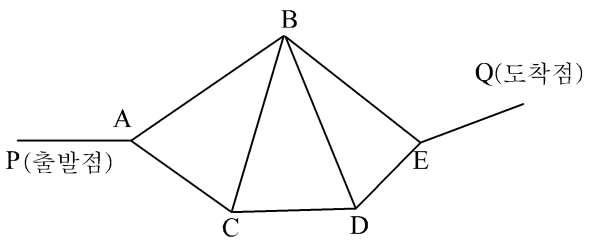
29. 전국 연합학력평가 후 응시생 1600 명을 임의로 추출하여 가채점 하였더니 수리영역 점수의 표준편차가 16 점이었다. 수험생 전체 수리영역의 평균점수 $m$을 95% 의 신뢰도로 추정한 신뢰구간이 $\alpha \leqq m \leqq \beta$일 때, $\beta-\alpha$의 값은?

( 단, $P(0 \leqq Z \leqq 1.96)=0.475$ ) [4점]

① 0.784 ② 1.568 ③ 2.352
④ 3.136 ⑤ 3.920

## 단답형

30. 그림과 같이 어느 지역의 5 개의 관광지를 연결하는 도로망이 있다.




어느 여행사에서는 P지점을 출발하여 A , B , C , D , E 5개 지역을 모두 방문하거나 일부 지역만을 방문하면서, 한 번 방문한 관광지는 다시 지나지 않고 Q지점에 도착하는 7 가지 경우의 관광코스를 만들었다. 그리고, 한 관광지를 방문할 때마다 14,000 원씩 요금을 부가하여 각 관광코스별 관광요금을 결정하였다. 예를 들면 P→A→B→E→Q관광코스의 요금은 원이다.

한 관광객이 임의로 7 개의 관광코스 중 어느 하나를 선택하였을 때, 그 관광코스의 요금을 확률변수 라고 하자. 이 때, 확률변수 $\dfrac{X}{1000}$ 의 평균을 구하시오. [4점]

※ 확인 사항

○ 문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.