2005학년도 4월 고3 전국연합학력평가 문제지

수리 영역 (나형)

제 2 교시 | 성명 | | 수험번호 | | | | | | 3 | | | | | **1**

- ○ 먼저 수험생이 선택한 응시 유형의 문제지인지 확인하시오.
- ○ 문제지에 성명과 수험 번호를 정확히 기입하시오.
- ○ 답안지에 수험 번호, 응시 유형, 답을 표기할 때에는 반드시 '수험생이 지켜야 할 일'에 따라 표기하시오.
- ○ 단답형 답의 숫자에 0이 포함된 경우, 0을 OMR 답안지에 반드시 표기해야 합니다.
- ○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- ○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

1. $\frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{32} \times \sqrt[3]{27}$ 의 값은? [2점]

① $6\sqrt{3}$
② 12
③ $9\sqrt{2}$
④ $9\sqrt{3}$
⑤ 18

2. $A+B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $AX=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $BX=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$를 만족시키는 이차정사각행렬 X는? [2점]

① $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -24 & -12 \end{pmatrix}$
② $\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 24 & -12 \end{pmatrix}$
③ $\begin{pmatrix} -8 & -4 \\ 24 & 12 \end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix} 24 & 12 \\ -8 & -4 \end{pmatrix}$
⑤ $\begin{pmatrix} 24 & -12 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$

3. 수렴하는 무한수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}(n^2-1)a_n=2006$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}n^2+1\right)a_n$의 값은? [2점]

① 0
② $\frac{1}{2}$
③ 1003
④ 2006
⑤ 4012

4. $x+\sqrt{3}x+y-2\sqrt{3}y-27-18\sqrt{3}=0$을 만족시키는 유리수 x, y에 대하여 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$일 때, mn의 값은? [3점]

① -2
② -1
③ 0
④ 1
⑤ 2

5. 이차정사각행렬 A, B에 대하여 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, O는 영행렬, E는 단위행렬이다.) [3점]

<보 기>

ㄱ. $(A-E)^2=A^2-2A+E$
ㄴ. $AB=O$, $A\neq O$이면 $B=O$이다.
ㄷ. $AB=A$, $BA=B$이면 $A^2=A$이다.

① ㄱ
② ㄴ
③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

6. 두 자연수 x, y에 대하여 x^8은 25자리의 수, y^5은 16자리의 수일 때, xy는 n자리의 수가 된다. 이 때, n의 값은? [3점]

① 4
② 5
③ 6
④ 7
⑤ 8

7. $a^2+(b+1)^2=1$을 만족시키는 실수 a, b에 대하여 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2a+1 & 2b+1 \\ -b & a \end{pmatrix}$라 하자.

다음은 연립방정식 $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}$가 $x=y=0$ 이외의 해를 가질 때, $a+b$의 값을 구하는 과정이다.

$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} 2a & 2b+2 \\ -b-1 & a-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ……㉠

㉠이 $x=y=0$ 이외의 해를 가지므로 [(가)] 이다.

이 때, [(가)]와 $a^2+(b+1)^2=1$을 연립하여 풀면 a, b의 값을 구할 수 있다.

따라서 $a+b=$ [(나)] 이다.

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 내용을 바르게 짝지은 것은? [3점]

	(가)	(나)
①	$a(a-1)+(b+1)^2=0$	0
②	$a(a-1)+(b+1)^2=0$	1
③	$a(a-1)+(b+1)^2=0$	2
④	$a(a+1)+(b-1)^2=0$	0
⑤	$a(a+1)+(b-1)^2=0$	2

8. 무한수열 $\{a_n\}$을

$$a_n=\begin{cases} 0 & (n=3k-2) \\ 1 & (n=3k-1) \\ 2 & (n=3k) \end{cases}$$ (단, k는 자연수)

로 정의할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{4^n}$의 값은? [4점]

① $\frac{3}{4}$
② $\frac{2}{21}$
③ $\frac{13}{32}$
④ $\frac{17}{54}$
⑤ $\frac{29}{63}$

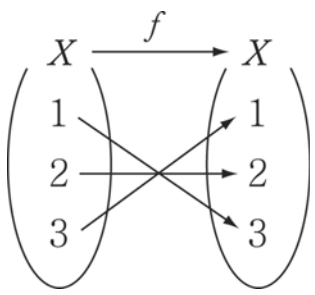
9. 두 양의 실수 a, b에 대하여 연산 $*$를

$$a*b=\begin{cases} a^b & (a<b) \\ b^a & (a\geqq b) \end{cases}$$

라 정의할 때, $(2*\sqrt{2})*2\sqrt{2}$ 의 값은? [3점]

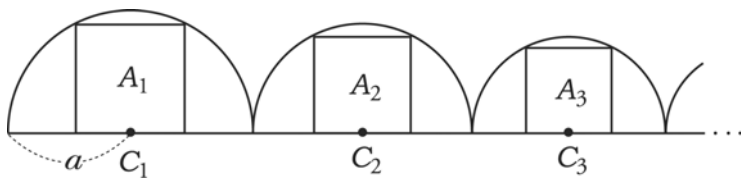
① $2^{\sqrt{2}}$
② $2^{\frac{3}{2}}$
③ $2^{2\sqrt{2}}$
④ 2^4
⑤ 2^8

10. 그림과 같이 정의된 함수 $f: X\to X$에 대하여 3×3행렬 A의 (i, j) 성분 a_{ij}를 $a_{ij}=\begin{cases} 1 & (f(i)\geqq j) \\ 0 & (f(i)<j) \end{cases}$ 으로 정의할 때, 행렬 A의 모든 성분의 합은? [3점]



① 6
② 7
③ 8
④ 9
⑤ 10

11. 그림과 같이 반지름의 길이가 a인 반원 C_1에 내접하는 정사각형을 A_1이라 하자. A_1의 한 변의 길이를 반지름으로 하는 반원 C_2에 내접하는 정사각형을 A_2라 하자. A_2의 한 변의 길이를 반지름으로 하는 반원 C_3에 내접하는 정사각형을 A_3라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 정사각형을 만들어 나갈 때, 이들 정사각형의 넓이의 합은? [4점]



① a^2
② $2a^2$
③ $3a^2$
④ $4a^2$
⑤ $5a^2$

12. 무한수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, α는 상수) [3점]

<보 기>

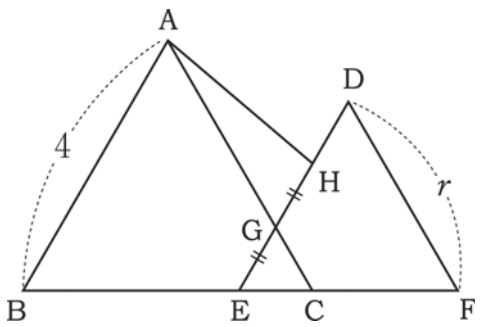
ㄱ. $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=0$이면 $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=0$이다.

ㄴ. $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$이면 $\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha$ 이다.

ㄷ. $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\alpha$ 이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=1$이다.

① ㄱ
② ㄷ
③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC와 한 변의 길이가 r인 정삼각형 DEF를 겹쳐서 점 E가 $\overline{BC}$ 위에 오도록 정삼각형 GEC를 만들고, $\overline{EG}=\overline{GH}$가 되도록 점 H를 $\overline{DG}$ 위에 잡는다.



△GEC, △AGH, △DEF의 각각의 넓이가 이 순서로 공비가 r인 등비수열을 이룰 때, r의 값은? [4점]

① $\frac{3}{2}$
② 2
③ $\frac{5}{2}$
④ 3
⑤ $\frac{7}{2}$

14. 무한수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{2n^2}{2n^2+1}\right)=\frac{1}{3}$일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은? [3점]

① $-\frac{2}{3}$
② $-\frac{1}{3}$
③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{2}{3}$
⑤ 1

15. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\geq 2\left\{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right\}$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명하는 과정이다.

< 증 명 >

(i) $n=1$일 때, (좌변) $=1\geq 2\times\frac{1}{1\cdot 2}=$(우변)이므로 주어진 부등식은 성립한다.

(ii) $n=k(k\geq 1)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\geq 2\left\{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}\right\}$$

이 식의 양변에 $\frac{1}{k+1}$을 더하면

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}$$
$$\geq 2\left\{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}\right\}+\frac{1}{k+1}$$
$$\geq 2\left\{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}\right\}+\frac{1}{k+2}$$
$$=2\left\{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}\right\}+\frac{1}{k+1}$$ · (가)

(나)

$$\geq 2\left\{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}\right\}+\frac{\qquad}{(k+1)(k+2)}$$
$$=2\left\{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$

$\therefore 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k+1}$
$$\geq 2\left\{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식은 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 내용을 바르게 짝지은 것은? [3점]

	(가)	(나)
①	$\frac{1}{k+1}$	1
②	$\frac{1}{k+1}$	2
③	$\frac{1}{k+2}$	1
④	$\frac{k+1}{k+2}$	1
⑤	$\frac{k+1}{k+2}$	2

16. 0이 아닌 세 실수 a, b, c에 대하여 $a+b+c=0$이고 $3^a=x$, $3^b=y$, $3^c=z$ 이다. 이 때, $\log_x yz+\log_y zx+\log_z xy$의 값은? [3점]

① -3
② -1
③ 0
④ 1
⑤ 3

17. 2005년 1월 1일 현재 인구가 같은 두 도시 A, B가 있다. A도시의 인구는 매년 전년도에 비해 2%씩 증가하고, B도시의 인구는 매년 전년도에 비해 2%씩 감소한다고 가정할 때, 처음으로 A도시의 인구가 B도시 인구의 2배 이상이 되는 시기는? (단, $\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}4.9=0.6902$, $\log_{10}5.1=0.7076$) [4점]

① 2020년 ~ 2021년
② 2022년 ~ 2023년
③ 2024년 ~ 2025년
④ 2026년 ~ 2027년
⑤ 2028년 ~ 2029년

단답형

18. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix}2&3\\-1&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&1\\-1&2\end{pmatrix}$에 대하여 $3A+B+2X=A-2B+3X$를 만족시키는 행렬 X의 2행 2열의 성분을 구하시오. [3점]

19. $\sum_{k=2}^{10}(k+1)^2-\sum_{k=1}^{10}(k-1)^2$의 값을 구하시오. [3점]

20. 표의 빈 칸에 6개의 자연수를 한 칸에 하나씩 써넣어 가로, 세로, 대각선 방향으로 각각 등차수열을 이루도록 할 때, 빈 칸에 써넣을 6개의 수의 합을 구하시오. [3점]

3		7
	11	

21. 함수 $f(x)$를 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n+3}{x^n+1}$으로 정의할 때, $f(-3)+f\left(\frac{1}{4}\right)+f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

22. 실수 x, y에 대한 연립일차방정식

$$\begin{cases} ax+by=t \\ cx+dy=-t^2 \end{cases}$$

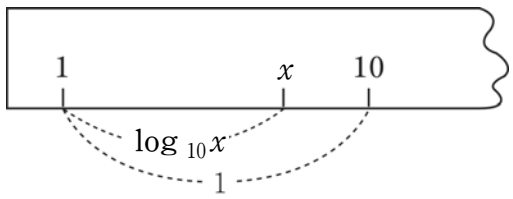
에 대하여 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$의 역행렬이 $\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$일 때, $x+y$의 최대값을 구하시오. (단, t는 실수) [4점]

23. A, B의 두 비커에 농도가 같은 소금물이 같은 양만큼 들어 있다. 갑은 A비커, 을은 B비커의 소금물을 가지고 각각 다음과 같은 방법을 반복하여 새로운 소금물을 만들려고 한다.

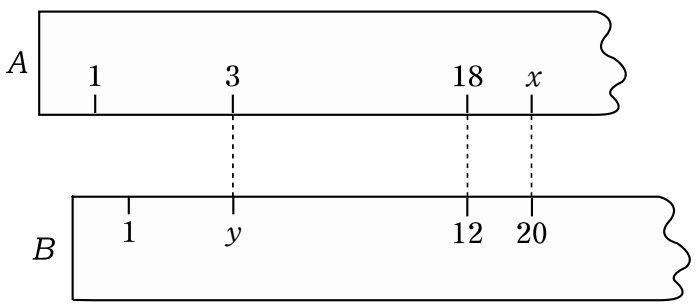
> 갑 : 소금물의 양의 $\frac{3}{4}$을 버린 후 버린 양만큼 물을 섞는다.
>
> 을 : 소금물의 양의 $\frac{1}{2}$을 버린 후 버린 양만큼 물을 섞는다.

위의 과정을 갑은 5회, 을은 n회 반복하면 농도가 같은 소금물을 만들 수 있다. 이 때, n의 값을 구하시오. [4점]

24. 그림과 같이 기점 1로부터의 거리가 $\log_{10} x$인 곳에 눈금 x를 매긴 자를 '로그자'라고 한다. '로그자'에서는 $\log_{10} 1 = 0$이므로 기점의 로그눈금은 1이다.



두 개의 로그자 A, B의 세 개의 눈금의 위치가 그림과 같이 서로 일치할 때, $x-y$의 값을 구하시오. [4점]



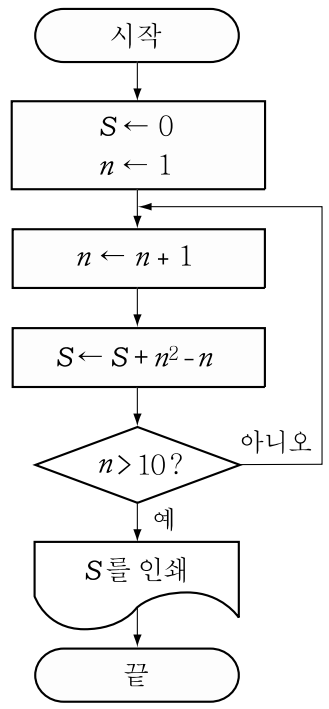
25. $a_1 = 2$, $a_2 = 1$,

$a_{n+1}a_n - 2a_{n+2}a_n + a_{n+1}a_{n+2} = 0$ ($n = 1, 2, 3, \cdots$)

으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{a_k}$의 값을 구하시오. [4점]

5 지 선 다형

26. 순서도에서 인쇄되는 S의 값은? [4점]



① 300
② 330
③ 350
④ 440
⑤ 550

27. 임의의 실수 k에 대하여, 행렬 $\begin{pmatrix} 2k & k-1 \\ b(k+1) & 2k+a-1 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하도록 하는 정수 a, b의 순서쌍 (a, b) 중에서 $a < b$를 만족시키는 순서쌍의 개수는? [4점]

① 3
② 4
③ 5
④ 6
⑤ 7

28. x에 대한 이차방정식 $x^2+4x-(2n-1)(2n+1)=0$의 두 근 α_n, β_n에 대하여 $\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)$의 값은? [4점]

① $\frac{11}{21}$
② $\frac{20}{21}$
③ $\frac{31}{21}$
④ $\frac{40}{21}$
⑤ $\frac{50}{21}$

29. 수렴하는 두 무한수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} (n=1, 2, 3, \cdots)$$

으로 정의할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$의 값은? (단, $a_1=4$, $b_1=6$) [4점]

① $\frac{1}{3}$
② $\frac{1}{2}$
③ 1
④ $\frac{2}{3}$
⑤ 2

단답형

30. 다음과 같이 1, 3, 5, 7, 9를 규칙적으로 나열했을 때, 제 20행에 나열된 수들의 합을 구하시오. [4점]

제 1행				1			
제 2행			3	5	7		
제 3행		9	1	3	5	7	
제 4행	9	1	3	5	7	9	1
⋮				⋮			

※ 확인사항

○ 문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.