2005학년도 11월 고2 전국연합학력평가 문제지

수 리 영 역 (나형)

제 2 교시 | 성명 | | 수험번호 | | | | | | 2 | | | | | **1**

- ○ 먼저 수험생이 선택한 응시 유형의 문제지인지 확인하시오.
- ○ 문제지에 성명과 수험 번호를 정확히 기입하시오.
- ○ 답안지에 수험 번호, 응시 유형, 답을 표기할 때에는 반드시 '수험생이 지켜야 할 일'에 따라 표기하시오.
- ○ 단답형 답의 숫자에 0이 포함된 경우, 0을 OMR 답안지에 반드시 표기해야 합니다.
- ○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- ○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

1. $\sqrt[3]{-27}-\sqrt[4]{16}+\sqrt[5]{-1}$의 값은? [2점]

① -6
② -5
③ -4
④ -3
⑤ -2

2. $(\log_2 10)(\log_5 10)-(\log_4 25+\log_{25} 4)$를 간단히 하면? [2점]

① 0
② 2
③ 4
④ $2\log_5 2$
⑤ $2\log_2 5$

3. $(x+yi)(1+i)=3-5i$를 만족하는 실수 x, y를 행렬을 이용하여 풀면, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$이다. 이 때, 이차정사각행렬 A의 모든 성분의 합은? (단, $i=\sqrt{-1}$) [3점]

① -3
② -2
③ -1
④ 0
⑤ 1

4. 표는 어느 학교 등산 동아리 학생들이 지난 여름방학 동안 등산한 곳을 조사한 자료의 일부분이다.

번호	이 름	산 이름
1	김 ○ ○	소백산, 속리산, 오대산, 한라산
2	홍 ○ ○	내장산, 설악산
3	박 ○ ○	설악산, 속리산, 한라산
4	이 ○ ○	오대산, 설악산

3×3 행렬 M의 (i, j)성분 a_{ij}를 다음과 같이 정의할 때, 행렬 M으로 옳은 것은? [3점]

(가) $i=j$일 때, a_{ij}는 i번 학생이 등산한 산의 수
(나) $i\neq j$일 때, a_{ij}는 i번 학생과 j번 학생이 같은 산을 등산한 산의 수

① $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
② $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
③ $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
⑤ $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

5. $\log_{10} a = m$, $\log_{10} b = n$ 일 때, 10^{m-2n} 을 a, b 로 나타내면? (단, $a>0$, $b>0$) [2점]

① $\frac{a}{b^2}$
② $\frac{a}{\sqrt{b}}$
③ ab^2
④ $a-b^2$
⑤ $a-2b$

6. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$에 대하여 $AX+A=B$를 만족하는 행렬 X의 모든 성분의 합은? [3점]

① 10
② 11
③ 12
④ 13
⑤ 14

7. x, y에 대한 연립일차방정식 $\begin{cases} ax+by=s \\ cx+dy=t \end{cases}$ 와 s, t에 대한 연립일차방정식 $\begin{cases} es+ft=3 \\ gs+ht=2 \end{cases}$ 가 있다. 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$의 역행렬이 $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$일 때, $x+y$의 값은? [3점]

① 1
② 2
③ 3
④ 4
⑤ 5

8. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n=n^2+1$ 일 때, $\sum_{k=1}^{7} \frac{1}{a_k a_{k+1}}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{4}{15}$
② $\frac{3}{10}$
③ $\frac{7}{15}$
④ $\frac{1}{2}$
⑤ $\frac{7}{10}$

9. $27^{-10}\times 4^{15}$은 소수점 아래 m번째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다. 이 때, m의 값은? (단, $\log_{10}2=0.30$, $\log_{10}3=0.48$로 계산한다.) [3점]

① 3
② 4
③ 5
④ 6
⑤ 7

10. $\begin{cases} a_1=1\ ,\ a_2=2 \\ a_{n+2}=a_{n+1}-a_n \end{cases}$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2005}$의 값은? [3점]

① -2
② -1
③ 1
④ 2
⑤ 3

11. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leqq \frac{a^n+b^n}{2}$ 이 성립함을 증명한 것이다. (단, a, b는 양수이다.)

<증명>

(i) $n=1$ 일 때,

$\frac{a+b}{2}-\frac{a+b}{2}=0$ 이므로 주어진 식은 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, 주어진 식이 성립한다고 가정하면

$\left(\frac{a+b}{2}\right)^k \leqq \frac{a^k+b^k}{2}$ ……㉠ 이 성립한다.

㉠의 양변에 [(가)] 를 곱하면

$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1} \leqq \left(\frac{a^k+b^k}{2}\right)\times$ [(가)]

$= \frac{a^{k+1}+b^{k+1}+ab^k+a^kb}{4}$

이 때,

$a^{k+1}+b^{k+1}-ab^k-a^kb = a^k(a-b)-b^k(a-b)$ [(나)]

$=(a-b)(a^k-b^k)$

이므로,

$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1} \leqq \frac{a^{k+1}+b^{k+1}+ab^k+a^kb}{4}$

$\leqq \frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}$

즉, $n=k+1$ 일 때, 주어진 식이 성립한다.

따라서, (i), (ii)에 의하여

모든 자연수 n에 대하여 주어진 식은 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)
①	$\frac{a+b}{2}$	$<$
②	$\frac{a-b}{2}$	$\leqq$
③	$\frac{a+b}{2}$	$\leqq$
④	$\frac{a-b}{2}$	$\geqq$
⑤	$\frac{a+b}{2}$	$\geqq$

4 수리 영역 (나형)

12. 거듭제곱근에 대한 설명으로 〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고르면? (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[7]{5}$

ㄴ. $[\sqrt[3]{1}]+[\sqrt[3]{2}]+[\sqrt[3]{3}]+\cdots+[\sqrt[3]{36}]=75$

ㄷ. $[\sqrt{a}]+[\sqrt{10-a}]=[\sqrt{10}]$을 만족하는 자연수 a는 5개이다.

① ㄴ
② ㄷ
③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13. 1부터 5까지의 숫자가 적혀있는 카드를 그림과 같이 규칙적으로 배열하였다.

1행 | 1 |

2행 | 2 | 3 |

3행 | 4 | 5 | 4 | 3 |

4행 | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 4 |

5행 | 3 | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |

⋮ ⋮

10행 | a | | | | … | | | | b |

이 때, $a+b$의 값은? [4점]

① 6
② 7
③ 8
④ 9
⑤ 10

14. 양의 실수 x를 $x=n+\alpha$ (n은 정수, $0\leq\alpha<1$)로 나타낼 수 있다. α, n, x가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, x의 값을 구하는 과정이다.

α, n, x가 등비수열이므로

$\frac{\alpha}{n} =$ (가)

한편, $n\neq 0$, $\alpha\neq 0$이므로

$$1\leq n<\frac{n}{\alpha}=\frac{1}{\text{(가)}}=\frac{n+\alpha}{n}$$

$$=1+\text{(나)}<2$$

$\therefore\ n=1$

따라서, $n=1$을 $\frac{\alpha}{n} =$ (가)에 대입하여 x의 값을 구하면 $x=$ (다)이다.

위에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [4점]

	(가)	(나)	(다)
①	$\frac{x}{\alpha}$	$\frac{\alpha}{n}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$
②	$\frac{x}{\alpha}$	$\frac{n}{\alpha}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$
③	$\frac{n}{x}$	$\frac{\alpha}{n}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$
④	$\frac{n}{x}$	$\frac{n}{\alpha}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$
⑤	$\frac{n}{x}$	$\frac{\alpha}{n}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

15. 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$와 $A+E$의 역행렬이 모두 존재하지 않을 때, 〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고르면? (단, E는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $a+b=-1$

ㄴ. $A-E$의 역행렬이 존재한다.

ㄷ. $A+A^2+A^3+\cdots+A^{10}=A$

① ㄱ
② ㄷ
③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 정수부분이 세 자리인 양의 실수 x에 대하여 $\log_{10} x$의 가수가 $\log_{10}\frac{1}{x}$의 가수의 2배일 때, $\log_{10} x+\log_{10} x^2+\cdots+\log_{10} x^9$의 값은? (단, $\log_{10} x$의 가수는 0이 아니다.) [4점]

① 60
② 90
③ 120
④ 150
⑤ 180

17. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$에 대하여 $A^n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$일 때, $a_n+b_n+c_n+d_n \geqq 2005$를 만족하는 자연수 n의 최소값은? (단, $A^{n+1}=A^n A$) [4점]

① 7
② 8
③ 9
④ 10
⑤ 11

18. 양의 실수 a, b에 대하여 $\log_3 a+\log_3 b=0$, $\log_3(a+b)=1$일 때, a^2+b^2의 값은? [3점]

① 3
② 4
③ 5
④ 6
⑤ 7

19. 갑은 암호장치를 이용하여 4개의 알파벳으로 이루어진 단어를

암호화된 행렬로 바꾸려고 한다. 암호장치는 3단계로 되어 있으며 그 과정은 다음과 같다.

〔1단계〕 4개의 알파벳을 코드표를 이용하여 순서대로 코드번호 a_1, a_2, a_3, a_4를 얻는다.

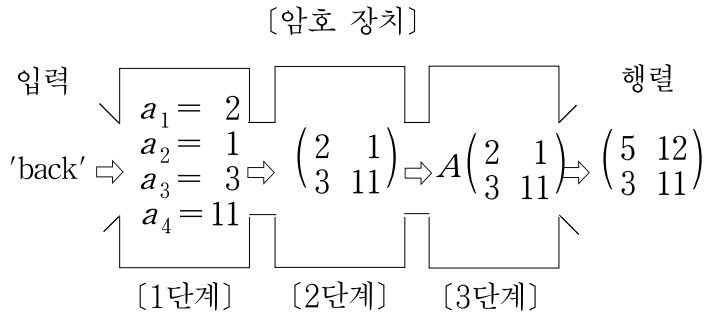
〔2단계〕 코드번호 a_1, a_2, a_3, a_4를 행렬 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$로 만든다.

〔3단계〕 만들어진 행렬을 암호키인 이차정사각행렬 A의 오른쪽에 곱하여 암호화된 행렬을 얻는다.

〔코드표〕

알파벳	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
코드번호	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
알파벳	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
코드번호	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

그림은 'back'이 암호장치를 통하여 암호화된 행렬 $\begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$로 바뀐 것이다.



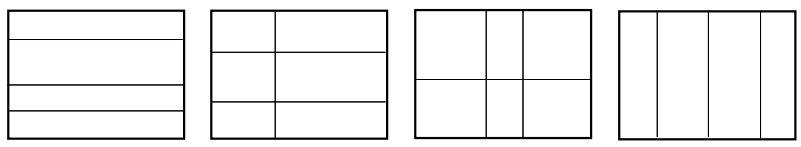
이 때, 갑이 4개의 알파벳으로 이루어진 단어로 암호장치를 통하여 암호화된 행렬 $\begin{pmatrix} 15 & 17 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$를 얻었다면, 갑이 입력한 단어는? 〔4점〕

① code
② high
③ math
④ note
⑤ stop

20. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$로 정의될 때, $\log_4(a_{99} + 1)$의 값은? 〔4점〕

① 50
② 55
③ 60
④ 65
⑤ 70

21. 어떤 직사각형의 내부에 가로 또는 세로에 평행한 n개의 직선을 그어 분할되는 영역의 최대 개수를 a_n이라 하자. 예를 들면, $n = 3$인 경우는 〔그림1〕, 〔그림2〕, 〔그림3〕, 〔그림4〕와 같이 4가지이고, 그 중에 영역의 개수가 최대일 때는 〔그림2〕 또는 〔그림3〕의 경우이므로 $a_3 = 6$이다.


〔그림1〕 〔그림2〕 〔그림3〕 〔그림4〕

이 때, a_{25}의 값은? 〔4점〕

① 156
② 169
③ 182
④ 196
⑤ 210

단답형

22. $A+B=\begin{pmatrix}-4 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $A-B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 4\end{pmatrix}$를 만족하는 행렬 A, B에 대하여 $AB=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$일 때, $|ad-bc|$의 값을 구하시오. 〔3점〕

23. 자연수의 집합에서 정의되는 두 함수 f와 g는

$f(n+1)=f(n)+3$, $f(5)=23$

$g(n+1)=5g(n)$, $g(1)=5$

를 만족한다. $(f\circ g)(k)=383$일 때, $20k$의 값을 구하시오. (단, $f\circ g$는 f와 g의 합성함수이다.) 〔3점〕

24. $a^{8x}=3+\sqrt{8}$ 일 때, $\dfrac{a^{x}+a^{2x}+a^{3x}}{a^{-x}+a^{-2x}+a^{-3x}}=m+\sqrt{n}$을 만족하는 유리수 m, n에 대하여 $100m+n$의 값을 구하시오. (단, $a>0$) 〔3점〕

25. 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$에 대하여 $A+kE$의 역행렬이 존재하지 않을 때, $k^2+\dfrac{1}{k^2}$의 값을 구하시오.(단, k는 상수이고, E는 단위 행렬이다.) 〔3점〕

26. 수열 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$이 등차수열이고 $a_5=10$, $a_{10}=5$ 일 때, a_2의 값을 구하시오. 〔3점〕

27. x, y에 대한 연립일차방정식 $\begin{cases}(a-1)x+2y=0\\ 3x+(b-2)y=0\end{cases}$ 이 $x=y=0$ 이외의 해를 갖도록 하는 양의 정수 a, b에 대하여 ab의 최대값을 M, 최소값을 m이라 하자. 이 때, $M+m$의 값을 구하시오. 〔4점〕

28. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 일반항이 $a_n=2^n-10$, $b_n=2n-6$ 일 때, $\sum_{i=1}^{6}\left(\sum_{j=1}^{6}a_i b_j\right)$의 값을 구하시오. 〔4점〕

29. $\log_x(4-|x|-|y|)$이 정의될 때, 점 (x, y)의 개수를 구하시오.(단, x, y는 모두 정수이다.) 〔4점〕

30. 10^9의 모든 양의 약수의 곱을 N이라 할 때, $\log_{10}N$의 값을 구하시오. [4점]

※ 확인사항

○ 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.