영역

“ ” 정답

1	④	*2*	⑤	*3*	③	*4*	②	*5*	①
6	②	*7*	②	*8*	⑤	*9*	③	*10*	③
11	①	*12*	⑤	*13*	⑤	*14*	③	*15*	⑤
16	②	*17*	④	*18*	①	*19*	③	*20*	④
21	④	*22*	9	*23*	2	*24*	12	*25*	26
26	3	*27*	16	*28*	4	*29*	6	*30*	24

해설

1. [출제의도] 집합의 포함관계 이해하기

① $\quad\subset$

② $\quad 1,2\}\subset A$

③ $\{2,3\}\not\subset A$

⑤ $A-B=\{-1,0,1\}$

2. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 계산하기

$$\frac{1}{\log 36}+\frac{1}{\log_3 36}$$
$$=\log_{36}2+\log_{36}3$$
$$=\log_{36}6$$
$$=\frac{1}{2}$$

3. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 계산하기

$$(3\quad 2^4)^{\frac{3}{2}}\times(\quad 2)^{\frac{1}{2}}\div\sqrt[4]{2}$$
$$=2^{\frac{4}{3}\times\frac{3}{2}}\times 2^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}\div 2^{\frac{1}{4}}$$
$$=2^{2+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}=4$$

4. [출제의도] 두 복소수의 서로 같은 성질을 이용하여 복소수 계산하기

$(x+i)(y+i)=(1+i)^4$

$(xy-1)+(x+y)i=-4$

$xy-1=-4,\quad x+y=0$

$\therefore x^2+y^2=0^2-2(-3)=6$

5. [출제의도] 지표와 가수의 성질을 이용하여 문제 해결하기

$\log_{10}A=n+\alpha\quad n\quad$ 정수, $\frac{1}{2}<\alpha<1\Big)$

$\log_{10}\frac{1}{A^2}=-2\log_{10}A=-2n-2\alpha$

조건으로부터 $-2<-2\alpha<-1$ 이므로

$\log_{10}\frac{1}{A^2}=(-2n-2)+(2-2\alpha)$

따라서 $\left[\log_{10}\frac{1}{A^2}\right]=-2n-2$

6. [출제의도] 연립방정식을 행렬로 표현하기

두 연립방정식을 각각 행렬로 표현하면

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&1\\1&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\2&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&1\\1&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-1\\5&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}$$

$$\therefore A=\begin{pmatrix}3&-1\\5&0\end{pmatrix}$$

(별해)

대입하여 정리하면

$x_1=2(2z_1-z_2)+(-z_1+z_2)=3z_1-z_2$

$x_2=(z_1+2z_2)+2(2z_1-z_2)=5z_1$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-1\\5&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}$$

$$\therefore A=\begin{pmatrix}3&-1\\5&0\end{pmatrix}$$

7. [출제의도] 로그의 성질을 이용한 지수 계산하기

$A=4k, B=5k, C=2k\ (k>0)$ 라고 하면

(준식) $=3^{2\log 4k+\log_3 5k-3\log_3 2k}$

$=3^{\log_3 10}=10$

8. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 실수의 대소관계 이해하기

$A=2^{\frac{1}{2}}$ 이면 $\quad A^{18}=(2^{\frac{1}{2}})^{18}=2^9=512$

$B=3^{\frac{1}{3}}$ 이면 $\quad B^{18}=(3^{\frac{1}{3}})^{18}=3^6=729$

$C=9^{\frac{1}{9}}$ 이면 $\quad C^{18}=(9^{\frac{1}{9}})^{18}=9^2=81$

$\therefore C<A<B$

9. [출제의도] 자연수의 성질을 이용하여 증명하기

$A^2=\begin{pmatrix}1&a\\a^2&a^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&a\\a^2&a^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+a^3&a+a^4\\a^2+a^5&a^3+a^6\end{pmatrix}$ 이므로

A^2의 모든 성분의 합은

$(1+a^3)+(a+a^4)+(a^2+a^5)+(a^3+a^6)$

$=(1+a^3)(1+a+a^2+a^3)$

자연수 a가 홀수이므로

$1+a^3$ 과 $1+a+a^2+a^3$은 모두 짝수이다.

따라서 A^2의 모든 성분의 합은 4의 배수가 된다.

10. [출제의도] 복소수와 제곱근의 성질 이해하기

ㄷ. $i^{4n+2}=i^{4n}\cdot i^2=-1$

11. [출제의도] 삼각함수를 이용하여 수학 외적인 상황의 문제 해결하기

BD : $\overline{DC}=3:4$이므로 $\overline{AD}$는 $\angle$A의 이등분선이 된다.

$\triangle ABC=\triangle ABD+\triangle ADC$

$\frac{1}{2}\times 15\times 20\times\sin 120^\circ$

$=\frac{1}{2}\times 15\times\overline{AD}\times\sin 60^\circ$

$+\frac{1}{2}\times 20\times\overline{AD}\times\sin 60^\circ$

그러므로 $\overline{AD}=\frac{60}{7}$

12. [출제의도] 삼각함수의 성질을 이용하여 삼각함수 계산하기

$0<A<\pi,\quad 0<B<\pi$일 때,

$\sin A=\sin B$ 이므로 $\quad A+B=\pi$ 이다.

ㄱ. $\sin\frac{A+B}{2}=\sin\frac{\pi}{2}=1$

ㄴ. $\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{B}{2}$

$=\sin\frac{A}{2}-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)$

$=\sin\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}$

$=0$

ㄷ. $\tan A+\tan B$

$=\tan A+\tan(\pi-A)$

$=\tan A-\tan A$

$=0$

13. [출제의도] 무리함수의 그래프를 이해하여 유리함수의 그래프 나타내기

$y=a\quad bx+c$ 의 그래프에서

$a<0,\ b<0,\quad c>0$이다.

따라서 $y=\frac{b}{x+a}+c$은

점근선이 $x=-a>0,\ y=c>0$ 이고,

$b<0$ 인 그래프이다.

14. [출제의도] 행렬과 역행렬의 관계를 이해하여 문제 해결하기

$A-E=\begin{pmatrix}a-1&b\\c&d-1\end{pmatrix}$이

역행렬을 갖지 않으므로

$(a-1)(d-1)-bc=0$

$ad-bc=a+d-1\cdots$ ㉠

$\begin{pmatrix}a&-1\\d&1\end{pmatrix}$이 역행렬을 갖지 않으므로

$a+d=0\cdots$ ㉡

㉠과 ㉡에서

$ad-bc=-1\cdots$ ㉢

㉡, ㉢에서

$a^2+bc=1,\ ab+bd=0$

$ac+cd=0,\ bc+d^2=1$

$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$에서

$A^2=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}a^2+bc&ab+bd\\ac+cd&bc+d^2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=E$

따라서 $A^3=A$

(별해)

케일리-해밀턴의 정리에 의하여

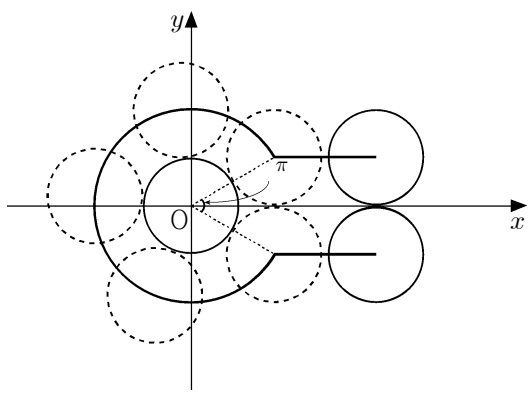
$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=0$

$A^2-E=0$

$A^2=E$

$\therefore A^3=A$

15. [출제의도] 원의 중심이동 거리 구하기



직선으로 움직인 거리

$(4-\sqrt{3})\times 2=2(4-\sqrt{3})$

곡선으로 움직인 거리

$$= r\theta = 2\times\frac{5}{3}\pi = \frac{10}{3}\pi$$

그러므로 $\frac{10}{3}\pi + 2(4-3)$ 이다.

16. [출제의도] 상용로그를 이용하여 문제 해결하기

n시간 후 소금물의 농도가 2배 이상이 되려면

$$\frac{a}{100(1-0.1)^n}\times 100 \geqq 2a$$

$$100(0.9)^n \leqq 50$$

$$n \geqq \frac{-\log 2}{2\log 3 - 1} = 6.5\text{xx}$$

최소의 자연수 n은 7이다.

17. [출제의도] 정의된 함수를 이해하고 문제 해결하기

$2f(x)+f(1-x)=3x^2 \quad \cdots$㉠

㉠에 x 대신에 $1-x$ 를 대입하면,

$2f(1-x)+f(x)=3(1-x)^2 \quad \cdots$㉡

㉠, ㉡를 연립하여 풀면

$f(x)=x^2+2x-1$

$=(x+1)^2-2$

그러므로

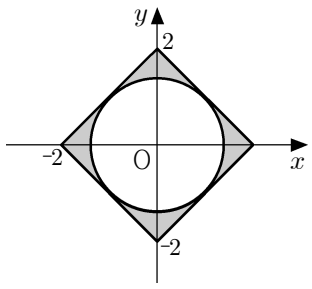
ㄱ. $f(0)=-1$

ㄴ. $f(x)$ 의 최소값은 -2

ㄷ. 대칭축이 $x=-1$이므로

$f(x)=f(-2-x)$가 성립한다.

18. [출제의도] 부등식의 영역을 이용한 행렬의 성분 구하기



구하고자 하는 어두운 부분의 영역의 넓이는 $8-2\pi$

19. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 수학 외적인 상황의 문제 해결하기

월의 쓰레기 양 $800=\left(\frac{3}{4}\right)^{kt}$

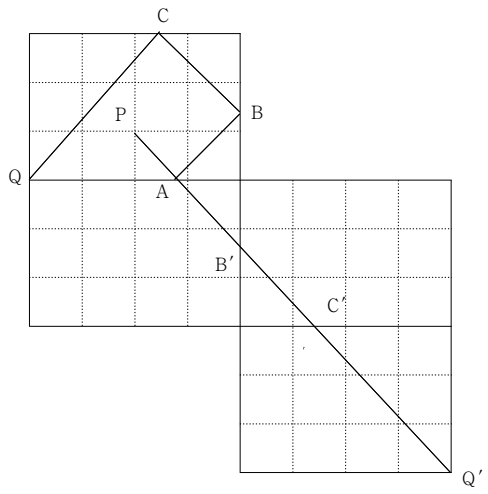
6월의 쓰레기 양

$600 = W_0\left(\frac{3}{4}\right)^{k(t+4)} = W_0\left(\frac{3}{4}\right)^{kt}\left(\frac{3}{4}\right)^{4k}$ 이므로

$600 = 800\left(\frac{3}{4}\right)^{4k}$

그러므로 $k=\frac{1}{4}$

20. [출제의도] 대칭을 이용하여 공이 움직인 거리 구하기



P→A→B→C→Q 의 길이는

P→A→B′→C′→Q′ 의 길이와 같다.

따라서 가로의 길이 6, 세로의 길이 7인 직사각형의 대각선 길이이므로 $\sqrt{85}$ 이다.

21. [출제의도] 행렬의 여러 가지 성질 이해하기

ㄱ. 일반적으로 $B=O$이라 해서

$A=O$ 또는 $B=O$은 아니다.

(반례) $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$

ㄴ. $AB+A=E$에서 $A(B+E)=E$이므로

A의 역행렬은 $B+E$이다.

ㄷ. $AB=E$ 이면 $B=A^{-1}$, $BA=E$이다.

$(A-B)^2+2E$

$=A^2-AB-BA+B^2+2E$

$=A^2+B^2$

22. [출제의도] 행렬의 곱과 역행렬 계산하기

$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

$A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}$, $AB=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & 5\end{pmatrix}$

$A^{-1}+AB=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -2 & 7\end{pmatrix}$

$\therefore 2+2-2+7=9$

23. [출제의도] 합성함수의 함수값 구하기

$f^{-1}(-3)=k$ 라 놓으면

$f(k)=-3$이므로 $k=-1$이다.

그러므로 $g(f^{-1}(-3))$

$=g(-1)$

$=2$

24. [출제의도] 함수의 뜻을 알고 함수의 개수 구하기

$f(-1)\neq -1$, $f(1)\neq 1$ 이므로

X의 원소 -1, 0, 1에 대응할 수 있는 경우의 수가 각각 2, 3, 2가지이다.

$\therefore 2\times 3\times 2=12$

(별해)

함수 f의 개수는 모두 27 개이다.

i) $f(-1)=-1$인 함수의 개수는 9 개

ii) $f(1)=1$ 인 함수의 개수는 9 개

iii) $f(-1)=-1$, $f(1)=1$ 인 함수의 개수는 3 개이다.

$\therefore \quad 27-(9+9-3)=12$

25. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 계산하기

$\frac{8^x+8^{-x}}{2^x+2^{-x}}$

$=\frac{(2^x+2^{-x})(4^x-2^x\quad 2^{-x}+4^{-x})}{2^x+2^{-x}}$

$=4^x-1+4^{-x}$

$=5-1+\frac{1}{5}=\frac{21}{5}$

26. [출제의도] 선분의 내분점, 외분점을 활용하여 문제 해결하기

$O(0,0)$, $O'(4,0)$ 이라 놓으면

OO'를 3 : 1으로 내분하는 점P와 3 : 1로 외분하는 점Q는

$P\left(\frac{12+0}{3+1},0\right)=P(3,0)$

$Q\left(\frac{12-0}{3-1},0\right)=Q(6,0)$

$\triangle OPA : \triangle OQB$

$= OP : OQ = 1 : 2$

$\therefore\ m+n=3$

27. [출제의도] 역행렬을 구하고 산술·기하평균을 이용한 최소값 구하기

$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{8}{a} & 3\\ 5 & 2a\end{pmatrix}$

모든 성분의 합은

$2a+\frac{8}{a}+8 \geqq 2\quad 2a\cdot\frac{8}{a}+8=16$

(등호는 $a=2$일 때 성립)

28. [출제의도] 근과 계수와의 관계를 이해하고 삼각형의 무게중심의 좌표를 이용한 기울기 구하기

두 교점을 (x_1, y_1), (x_2, y_2)라 하면

$x^2-6x=mx+n$

$x^2-(m+6)x-n=0$의 두 근이 x_1, x_2 이므로

근과 계수와의 관계에 의해

$x_1+x_2=m+6$이다.

두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)와 $P(2,5)$ 의

무게중심이 $(4,1)$이므로

$\frac{x_1+x_2+2}{3}=4$에서 $x_1+x_2=10$이므로

$m+6=10$

$\therefore\ m=4$

29. [출제의도]지수법칙을 이용하여 로그 계산하기

1이 아닌 세 자연수 a,b,c에 대하여

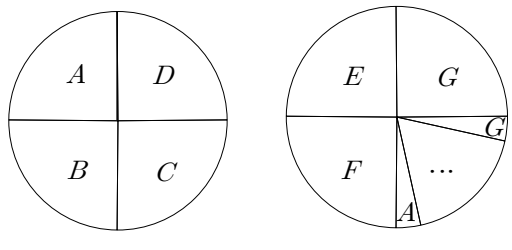
$a^2=b^3=c^4=k$를 만족하는 k는 2, 3, 4의 최소공배수가 12이므로

$k=2^{12},\ 3^{12},\ 4^{12},\ \ldots$

따라서 k의 최소값은 2^{12} 이므로 $p=2^{12}$

$\Rightarrow \log_4 2^{12}=6$

30. [출제의도] 실생활과 관련된 수학 외적 문제 상황을 식으로 표현하기



$\therefore\ \frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$

따라서 $28-4=24$