2009학년도 대학수학능력시험 문제지

수리 영역

제 2 교시

가 형

성명		수험 번호					—				

홀수형

○ 자신이 선택한 유형('가' 형/'나' 형)의 문제지인지 확인하시오.

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

---

1. $9^{\frac{3}{2}} \times 27^{-\frac{2}{3}}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{3}$ ② 1 ③ $\sqrt{3}$ ④ 3 ⑤ $3\sqrt{3}$

2. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $(A+B)A$의 모든 성분의 합은? [2점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

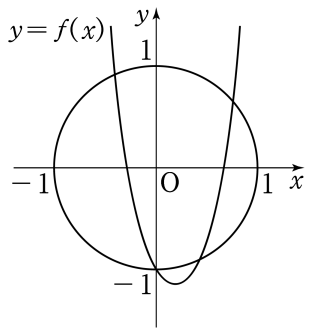
3. 함수 $f(x)=6x^2+2ax$가 $\int_0^1 f(x)\,dx=f(1)$을 만족시킬 때, 상수 a의 값은? [2점]

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

4. 방정식 $\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2-2x}=\frac{1}{2}$의 모든 실근의 합은? [3점]

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

5. 오른쪽 그림은 좌표평면에서 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 1인 원과 점 $(0, -1)$을 지나는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프를 나타낸 것이다. 방정식



$$\frac{1}{f(x)+1}-\frac{1}{f(x)-1}=\frac{2}{x^2}$$

의 서로 다른 실근 x의 개수는? [3점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

6. 함수 $f(x)=x^2-4x+a$와 함수 $g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2|x-b|^n+1}{|x-b|^n+1}$에 대하여 $h(x)=f(x)g(x)$라 하자. 함수 $h(x)$가 모든 실수 x에서 연속이 되도록 하는 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

7. 두 지수함수 $f(x)=a^{bx-1}$, $g(x)=a^{1-bx}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.
(나) $f(4)+g(4)=\frac{5}{2}$

두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은? (단, $0<a<1$) [3점]

① 1 ② $\frac{9}{8}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{11}{8}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

8. 세계핸드볼연맹에서 공인한 여자 일반부용 핸드볼 공을 생산하는 회사가 있다. 이 회사에서 생산된 핸드볼 공의 무게는 평균 350g, 표준편차 16g인 정규분포를 따른다고 한다.
이 회사는 일정한 기간 동안 생산된 핸드볼 공 중에서 임의로 추출된 핸드볼 공 64개의 무게의 평균이 346g 이하이거나 355g 이상이면 생산 공정에 문제가 있다고 판단한다.
이 회사에서 생산 공정에 문제가 있다고 판단할 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$P(0\leqq Z\leqq z)$
2.00	0.4772
2.25	0.4878
2.50	0.4938
2.75	0.4970

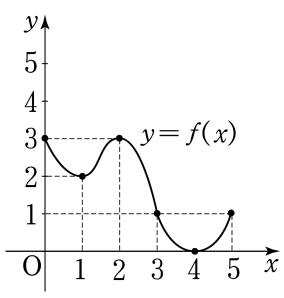
① 0.0290 ② 0.0258 ③ 0.0184
④ 0.0152 ⑤ 0.0092

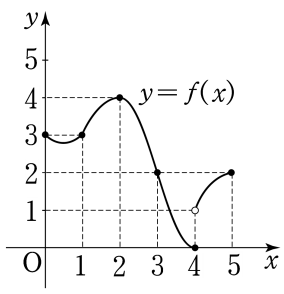
9. 폐구간 $[0, 5]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

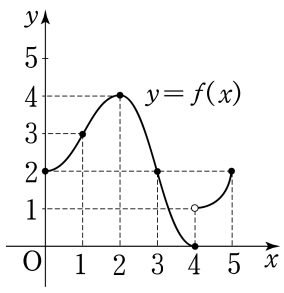
$$g(x)=\begin{cases}\{f(x)\}^2 & (0\leqq x\leqq 3)\\ (f\circ f)(x) & (3<x\leqq 5)\end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 폐구간 $[0, 5]$에서 연속이 되도록 하는 함수 $y=f(x)$의 그래프로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ.


ㄴ.


ㄷ.


① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

10. 수열 $\{a_n\}$이

$$\begin{cases} a_1=\dfrac{1}{2} \\ (n+1)(n+2)\,a_{n+1}=n^2\,a_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

일 때, 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}-\frac{n}{n+1} \qquad \cdots\cdots (*)$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

(1) $n=1$일 때, (좌변) $=\dfrac{1}{2}$, (우변) $=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$이므로 (*)이 성립한다.

(2) $n=m$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m} a_k=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}$$

이다. $n=m+1$일 때, (*)이 성립함을 보이자.

$$\sum_{k=1}^{m+1} a_k=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}+a_{m+1}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}+\boxed{\text{(가)}}\,a_m$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}+\frac{m^2}{(m+1)(m+2)}\cdot\frac{(m-1)^2}{m(m+1)}\cdot\cdots\cdot\frac{1^2}{2\cdot 3}\,a_1$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}+\boxed{\text{(나)}}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}+\frac{1}{(m+1)^2}-\boxed{\text{(다)}}$$

$$=\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k^2}-\frac{m+1}{m+2}$$

그러므로 $n=m+1$일 때도 (*)이 성립한다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 (*)이 성립한다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 들어갈 식으로 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	$\dfrac{m}{(m+1)(m+2)}$	$\dfrac{1}{(m+1)^2(m+2)}$	$\dfrac{1}{(m+1)(m+2)^2}$
②	$\dfrac{m}{(m+1)(m+2)}$	$\dfrac{m}{(m+1)^2(m+2)}$	$\dfrac{1}{(m+1)(m+2)}$
③	$\dfrac{m^2}{(m+1)(m+2)}$	$\dfrac{1}{(m+1)^2(m+2)}$	$\dfrac{1}{(m+1)(m+2)^2}$
④	$\dfrac{m^2}{(m+1)(m+2)}$	$\dfrac{1}{(m+1)^2(m+2)}$	$\dfrac{1}{(m+1)(m+2)}$
⑤	$\dfrac{m^2}{(m+1)(m+2)}$	$\dfrac{m}{(m+1)^2(m+2)}$	$\dfrac{1}{(m+1)(m+2)^2}$

11. 다항함수 $f(x)$와 두 자연수 m, n이

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^m}=1, \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{x^{m-1}}=a$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=b, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x^{n-1}}=9$$

를 모두 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, a, b는 실수이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $m\geqq n$

ㄴ. $ab\geqq 9$

ㄷ. $f(x)$가 삼차함수이면 $am=bn$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

12. 집합 U를

$$U=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d\text{는 } 1\text{이 아닌 양수}\right\}$$

라 하자. U의 부분집합 S를

$$S=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, \log_a d=\log_b c,\ a\neq b,\ bc\neq 1\right\}$$

이라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $A=\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$이면 $A\in S$이다.

ㄴ. $A\in U$이고 A가 역행렬을 가지면 $A\in S$이다.

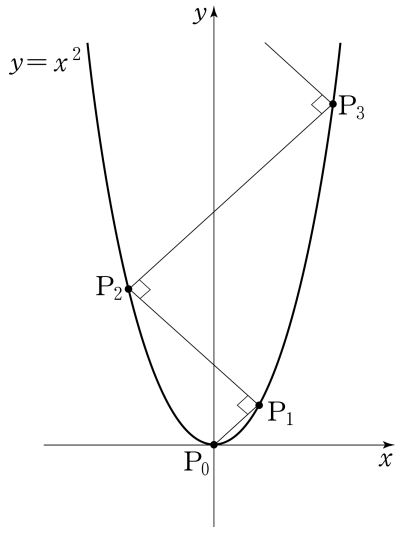
ㄷ. $A\in S$이면 A는 역행렬을 가진다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13. 자연수 n에 대하여 두 점 P_{n-1}, P_n이 함수 $y=x^2$의 그래프 위의 점일 때, 점 P_{n+1}을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 두 점 P_0, P_1의 좌표는 각각 $(0, 0)$, $(1, 1)$이다.
(나) 점 P_{n+1}은 점 P_n을 지나고 직선 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$에 수직인 직선과 함수 $y=x^2$의 그래프의 교점이다. (단, P_n과 P_{n+1}은 서로 다른 점이다.)

$l_n=\overline{\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n}$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{n}$의 값은? [3점]



① $2\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{2}$

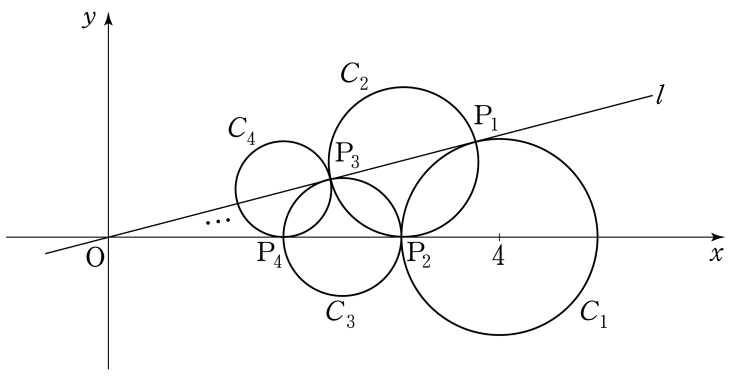
14. 좌표평면에 원 $C_1 : (x-4)^2+y^2=1$이 있다. 그림과 같이 원점에서 원 C_1에 기울기가 양수인 접선 l을 그었을 때 생기는 접점을 P_1이라 하자.

중심이 직선 l 위에 있고 점 P_1을 지나며 x축에 접하는 원을 C_2라 하고 이 원과 x축의 접점을 P_2라 하자.

중심이 x축 위에 있고 점 P_2를 지나며 직선 l에 접하는 원을 C_3이라 하고 이 원과 직선 l의 접점을 P_3이라 하자.

중심이 직선 l 위에 있고 점 P_3을 지나며 x축에 접하는 원을 C_4라 하고 이 원과 x축의 접점을 P_4라 하자.

이와 같은 과정을 계속할 때, 원 C_n의 넓이를 S_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? (단, 원 C_{n+1}의 반지름의 길이는 원 C_n의 반지름의 길이보다 작다.) [4점]



① $\frac{3}{2}\pi$ ② 2π ③ $\frac{5}{2}\pi$ ④ 3π ⑤ $\frac{7}{2}\pi$

15. 어떤 사회봉사센터에서는 다음과 같은 4가지 봉사활동 프로그램을 매일 운영하고 있다.

프로그램	A	B	C	D
봉사활동 시간	1시간	2시간	3시간	4시간

철수는 이 사회봉사센터에서 5일간 매일 하나씩의 프로그램에 참여하여 다섯 번의 봉사활동 시간 합계가 8시간이 되도록 아래와 같은 봉사활동 계획서를 작성하려고 한다. 작성할 수 있는 봉사활동 계획서의 가짓수는? [4점]

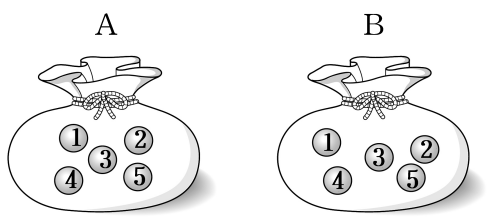
봉사활동 계획서

성명 :

참여일	참여 프로그램	봉사활동 시간
2009.1.5		
2009.1.6		
2009.1.7		
2009.1.8		
2009.1.9		
봉사활동 시간 합계		8시간

① 47 ② 44 ③ 41 ④ 38 ⑤ 35

16. 주머니 A와 B에는 1, 2, 3, 4, 5의 숫자가 하나씩 적혀 있는 다섯 개의 구슬이 각각 들어 있다. 철수는 주머니 A에서, 영희는 주머니 B에서 각자 구슬을 임의로 한 개씩 꺼내어 두 구슬에 적혀 있는 숫자를 확인한 후 다시 넣지 않는다. 이와 같은 시행을 반복할 때, 첫 번째 꺼낸 두 구슬에 적혀 있는 숫자가 서로 다르고, 두 번째 꺼낸 두 구슬에 적혀 있는 숫자가 같을 확률은? [4점]



① $\frac{3}{20}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{7}{20}$

17. 정보이론에서는 사건 E가 발생했을 때, 사건 E의 정보량 $I(E)$가 다음과 같이 정의된다고 한다.

$$I(E)=-\log_2 \mathrm{P}(E)$$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, 사건 E가 일어날 확률 $\mathrm{P}(E)$는 양수이고, 정보량의 단위는 비트이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. 한 개의 주사위를 던져 홀수의 눈이 나오는 사건을 E라 하면 $I(E)=1$이다.

ㄴ. 두 사건 A, B가 서로 독립이고 $\mathrm{P}(A\cap B)>0$이면 $I(A\cap B)=I(A)+I(B)$이다.

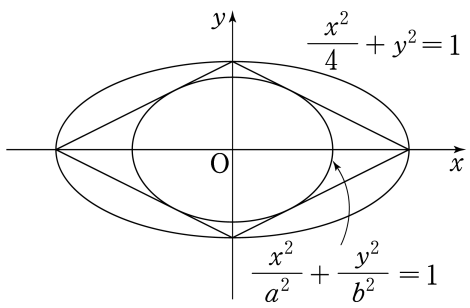
ㄷ. $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$인 두 사건 A, B에 대하여 $2I(A\cup B)\leqq I(A)+I(B)$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

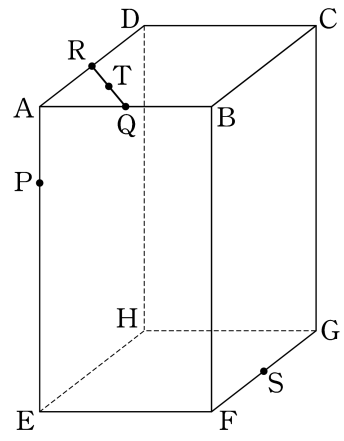
단답형

18. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x+1)-8}{x^2-4}=5$일 때, $f(3)+f'(3)$의 값을 구하시오. [3점]

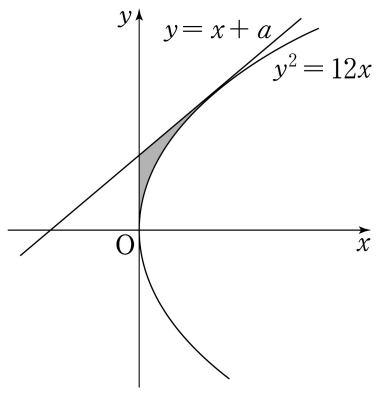
19. 타원 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$의 네 꼭짓점을 연결하여 만든 사각형에 내접하는 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$이 있다. 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점이 $\mathrm{F}(b,\,0)$, $\mathrm{F}'(-b,\,0)$일 때, $a^2b^2=\dfrac{q}{p}$이다.
$p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [3점]



20. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AD}}=4$, $\overline{\mathrm{AE}}=8$인 직육면체 ABCD-EFGH에서 모서리 AE를 1 : 3으로 내분하는 점을 P, 모서리 AB, AD, FG의 중점을 각각 Q, R, S라 하자. 선분 QR의 중점을 T라 할 때, 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{TP}}$와 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{QS}}$의 내적 $\overrightarrow{\mathrm{TP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QS}}$의 값을 구하시오. [3점]



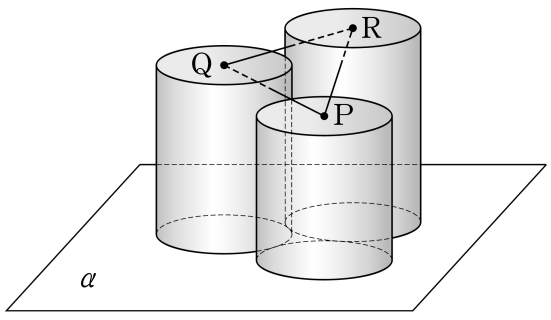
21. 직선 $y=x+a$가 포물선 $y^2=12x$에 접할 때, 포물선 $y^2=12x$와 직선 $y=x+a$ 및 y축으로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피를 $b\pi$라 하자. 두 상수 a, b의 곱 ab의 값을 구하시오. [3점]



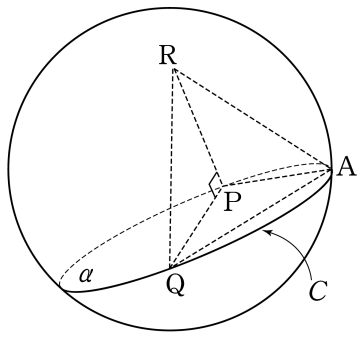
22. 좌표공간의 점 A(3, 3, 3)과 중심이 원점 O인 구 $x^2+y^2+z^2=9$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\left|\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OP}\right|$의 최댓값은 $a+b\sqrt{3}$이다. $10(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점]

23. 자연수 $n(n\geqq 2)$으로 나누었을 때, 몫과 나머지가 같아지는 자연수를 모두 더한 값을 a_n이라 하자. 예를 들어 4로 나누었을 때, 몫과 나머지가 같아지는 자연수는 5, 10, 15이므로 $a_4=5+10+15=30$이다. $a_n>500$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구하시오. [4점]

24. 그림과 같이 반지름의 길이가 모두 $\sqrt{3}$이고 높이가 서로 다른 세 원기둥이 서로 외접하며 한 평면 α 위에 놓여 있다. 평면 α와 만나지 않는 세 원기둥의 밑면의 중심을 각각 P, Q, R라 할 때, 삼각형 QPR는 이등변삼각형이고, 평면 QPR와 평면 α가 이루는 각의 크기는 $60°$이다. 세 원기둥의 높이를 각각 8, a, b라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, $8<a<b$) [4점]



25. 좌표공간에서 구 $S : x^2+y^2+z^2=4$와 평면 $\alpha : y-\sqrt{3}z=2$가 만나서 생기는 원을 C라 하자. 원 C 위의 점 A(0, 2, 0)에 대하여 원 C의 지름의 양 끝점 P, Q를 $\overline{AP}=\overline{AQ}$가 되도록 잡고, 점 P를 지나고 평면 α에 수직인 직선이 구 S와 만나는 또 다른 점을 R라 하자. 삼각형 ARQ의 넓이를 s라 할 때, s^2의 값을 구하시오. [4점]



26번부터 30번까지는 선택과목 문항입니다. 선택한 과목의 문제를 풀기 바랍니다.

미분과 적분

26. $0 \leq x < 2\pi$일 때, 방정식 $\sin 2x = 2\cos x - 2\cos^2 x$를 만족시키는 서로 다른 모든 x의 값의 합은? [3점]

① π ② $\frac{5}{4}\pi$ ③ $\frac{3}{2}\pi$ ④ $\frac{7}{4}\pi$ ⑤ 2π

27. 폐구간 $[0, 1]$에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 $f(0)=0$, $f(1)=1$이며, 개구간 $(0, 1)$에서 이계도함수를 갖고 $f'(x)>0$, $f''(x)>0$일 때, $\int_0^1 \{f^{-1}(x) - f(x)\}dx$의 값과 같은 것은? [3점]

① $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{k}{n} - f\left(\frac{k}{n}\right) \right\} \frac{1}{2n}$

② $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{k}{n} - f\left(\frac{k}{n}\right) \right\} \frac{2}{n}$

③ $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{k}{n} - f\left(\frac{k}{n}\right) \right\} \frac{1}{n}$

④ $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{k}{2n} - f\left(\frac{k}{n}\right) \right\} \frac{1}{n}$

⑤ $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{2k}{n} - f\left(\frac{k}{n}\right) \right\} \frac{1}{n}$

28. 함수 $f(x) = 4\ln x + \ln(10-x)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

<보 기>

ㄱ. 함수 $f(x)$의 최댓값은 $13\ln 2$이다.
ㄴ. 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄷ. 함수 $y = e^{f(x)}$의 그래프는 구간 $(4, 8)$에서 위로 볼록하다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

29. 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\int_a^x\{2+\sin(t^2)\}dt$$

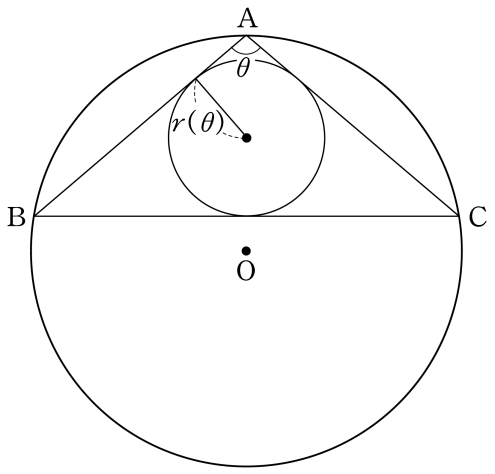
라 하자. $f''(a)=\sqrt{3}\,a$일 때, $(f^{-1})'(0)$의 값은?

(단, a는 $0<a<\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 인 상수이다.) [4점]

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$ ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

단답형

30. 반지름의 길이가 1인 원 O 위에 점 A가 있다. 그림과 같이 양수 θ에 대하여 원 O 위의 두 점 B, C를 $\angle BAC=\theta$이고 $\overline{AB}=\overline{AC}$가 되도록 잡는다. 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to\pi-0}\frac{r(\theta)}{(\pi-\theta)^2}=\frac{q}{p}$이다. p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

확률과 통계

26. 어떤 농구 선수는 매일 40번씩 자유투 연습을 하였다. 아래의 줄기와 잎 그림은 처음 10일 동안 매일 성공한 횟수에 대하여 십의 자리의 수를 줄기로, 일의 자리의 수를 잎으로 나타낸 것이다. 11일째의 자유투 성공 횟수가 n번이었으며 처음 11일 동안의 자유투 성공 횟수에 대한 평균이 아래의 줄기와 잎 그림에서의 최빈값과 같았을 때, n의 값은? [3점]

줄기	잎
0	9
1	7 9
2	1 4 4 6
3	0 1 3

① 24 ② 26 ③ 28 ④ 30 ⑤ 32

27. 한 개의 동전을 세 번 던져 나온 결과에 대하여, 다음 규칙에 따라 얻은 점수를 확률변수 X라 하자.

(가) 같은 면이 연속하여 나오지 않으면 0점으로 한다.
(나) 같은 면이 연속하여 두 번만 나오면 1점으로 한다.
(다) 같은 면이 연속하여 세 번 나오면 3점으로 한다.

확률변수 X의 분산 $\mathrm{V}(X)$의 값은? [3점]

① $\frac{9}{8}$ ② $\frac{19}{16}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{21}{16}$ ⑤ $\frac{11}{8}$

28. 1부터 9까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 9개의 공이 주머니에 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 수 중에서 가장 큰 수와 가장 작은 수의 합이 7 이상이고 9 이하일 확률은? [3점]

① $\frac{5}{9}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{4}{9}$ ④ $\frac{7}{18}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

29. 확률변수 X와 Y는 평균이 모두 0이고 분산이 각각 σ^2과 $\frac{\sigma^2}{4}$인 정규분포를 따르고, 확률변수 Z는 표준정규분포를 따른다. 두 양수 a와 b에 대하여

$$\mathrm{P}(|X| \leqq a) = \mathrm{P}(|Y| \leqq b)$$

일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $a > b$

ㄴ. $\mathrm{P}\left(Z > \frac{2b}{\sigma}\right) = \mathrm{P}\left(Y > \frac{a}{2}\right)$

ㄷ. $\mathrm{P}(Y \leqq b) = 0.7$일 때, $\mathrm{P}(|X| \leqq a) = 0.3$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

30. 어떤 모집단에서 임의로 100명을 추출하여 구한 모비율에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $\left[\frac{1}{10} - c,\ \frac{1}{10} + c\right]$이었다. 같은 모집단에서 n명을 임의로 추출하여 구한 모비율에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $\left[\frac{1}{9} - s(n),\ \frac{1}{9} + s(n)\right]$이고 $s(n) = \frac{50}{81}c$이다. n의 값을 구하시오. [4점]

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

이산수학

26. 수열 $\{a_n\}$이 점화 관계

$$\begin{cases} a_1=1,\ a_2=2 \\ a_{n+2}+a_{n+1}+a_n=6 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{11} a_k$의 값은? [3점]

① 15 ② 18 ③ 21 ④ 24 ⑤ 27

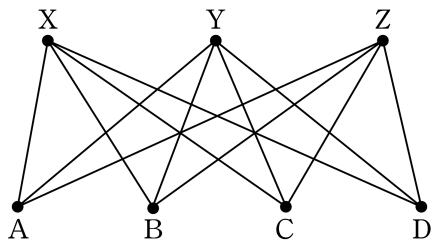
27. 다음 표는 어떤 공장에서 특정 상품을 만들기 위해 필요한 작업과 각 작업에 걸리는 시간 및 작업의 순서 관계를 나타낸 것이다.

작업	작업 시간(일)	먼저 행해져야 할 작업
A	2	없음
B	3	A
C	5	A
D	3	A, C
E	2	B, C
F	4	D
G	3	E, F

위 표에 있는 작업을 모두 끝마치는 데 필요한 최소 작업 시간(일)은? [3점]

① 21 ② 20 ③ 19 ④ 18 ⑤ 17

28. 꼭짓점 A, B, C, D, X, Y, Z로 이루어진 다음 그래프에 최소 개수의 변을 추가하여 꼭짓점을 적절하게 색칠하는 데 필요한 최소 색의 수가 4인 그래프 H를 만들 때, 가능한 그래프 H의 개수는? [3점]



① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

29. 여섯 개의 문자 A, B, C, D, E, F를 모두 사용하여 만든 6자리 문자열 중에서 다음 조건을 모두 만족시키는 문자열의 개수는?

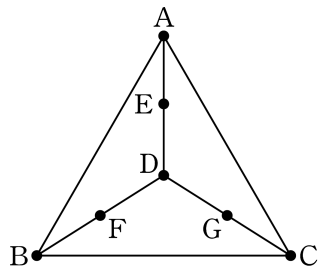
(가) A의 바로 다음 자리에 B가 올 수 없다. (나) B의 바로 다음 자리에 C가 올 수 없다. (다) C의 바로 다음 자리에 A가 올 수 없다.

(예를 들어 CDFBAE는 조건을 만족시키지만 CDFABE는 조건을 만족시키지 않는다.) [4점]

① 380 ② 432 ③ 484 ④ 536 ⑤ 598

단답형

30. 다음 그래프의 서로 다른 생성수형도의 총 개수를 구하시오. [4점]



* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2009학년도 대학수학능력시험 문제지

수리 영역

제 2 교시

나 형

성명		수험 번호					—				

홀수형

○ 자신이 선택한 유형('가' 형/'나' 형)의 문제지인지 확인하시오.

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

1. $9^{\frac{3}{2}} \times 27^{-\frac{2}{3}}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{3}$ ② 1 ③ $\sqrt{3}$ ④ 3 ⑤ $3\sqrt{3}$

2. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $(A+B)A$의 모든 성분의 합은? [2점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

3. $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+1}}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. 함수 $y=3+\log_3(x^2-4x+31)$의 최솟값은? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

5. 네 수 1, a, b, c는 이 순서대로 공비가 r인 등비수열을 이루고 $\log_8 c = \log_a b$를 만족시킨다. 공비 r의 값은? (단, $r>1$) [3점]

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

6. $a=\log_2 10$, $b=2\sqrt{2}$일 때, $a\log b$의 값은? [3점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

7. 두 지수함수 $f(x)=a^{bx-1}$, $g(x)=a^{1-bx}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.
(나) $f(4)+g(4)=\frac{5}{2}$

두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은? (단, $0<a<1$) [3점]

① 1 ② $\frac{9}{8}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{11}{8}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

8. 세계핸드볼연맹에서 공인한 여자 일반부용 핸드볼 공을 생산하는 회사가 있다. 이 회사에서 생산된 핸드볼 공의 무게는 평균 350g, 표준편차 16g인 정규분포를 따른다고 한다.
이 회사는 일정한 기간 동안 생산된 핸드볼 공 중에서 임의로 추출된 핸드볼 공 64개의 무게의 평균이 346g 이하이거나 355g 이상이면 생산 공정에 문제가 있다고 판단한다.
이 회사에서 생산 공정에 문제가 있다고 판단할 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$P(0\leq Z\leq z)$
2.00	0.4772
2.25	0.4878
2.50	0.4938
2.75	0.4970

① 0.0290 ② 0.0258 ③ 0.0184
④ 0.0152 ⑤ 0.0092

9. $\left(x+\frac{1}{x^3}\right)^4$의 전개식에서 $\frac{1}{x^4}$의 계수는? [4점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

10. 수열 $\{a_n\}$이

$$\begin{cases} a_1=\dfrac{1}{2} \\ (n+1)(n+2)\,a_{n+1}=n^2\,a_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

일 때, 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}-\frac{n}{n+1} \qquad \cdots\cdots (*)$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

(1) $n=1$일 때, (좌변) $=\dfrac{1}{2}$, (우변) $=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$이므로 (*)이 성립한다.

(2) $n=m$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m} a_k=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}$$

이다. $n=m+1$일 때, (*)이 성립함을 보이자.

$$\sum_{k=1}^{m+1} a_k=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}+a_{m+1}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}+\boxed{\text{(가)}}\,a_m$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}+\frac{m^2}{(m+1)(m+2)}\cdot\frac{(m-1)^2}{m(m+1)}\cdot\cdots\cdot\frac{1^2}{2\cdot 3}\,a_1$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}+\boxed{\text{(나)}}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}+\frac{1}{(m+1)^2}-\boxed{\text{(다)}}$$

$$=\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k^2}-\frac{m+1}{m+2}$$

그러므로 $n=m+1$일 때도 (*)이 성립한다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 (*)이 성립한다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 들어갈 식으로 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	$\dfrac{m}{(m+1)(m+2)}$	$\dfrac{1}{(m+1)^2(m+2)}$	$\dfrac{1}{(m+1)(m+2)^2}$
②	$\dfrac{m}{(m+1)(m+2)}$	$\dfrac{m}{(m+1)^2(m+2)}$	$\dfrac{1}{(m+1)(m+2)}$
③	$\dfrac{m^2}{(m+1)(m+2)}$	$\dfrac{1}{(m+1)^2(m+2)}$	$\dfrac{1}{(m+1)(m+2)^2}$
④	$\dfrac{m^2}{(m+1)(m+2)}$	$\dfrac{1}{(m+1)^2(m+2)}$	$\dfrac{1}{(m+1)(m+2)}$
⑤	$\dfrac{m^2}{(m+1)(m+2)}$	$\dfrac{m}{(m+1)^2(m+2)}$	$\dfrac{1}{(m+1)(m+2)^2}$

11. $0<a<\dfrac{1}{2}$인 상수 a에 대하여

직선 $y=x$가 곡선 $y=\log_a x$와 만나는 점을 $(p,\ p)$,

직선 $y=x$가 곡선 $y=\log_{2a} x$와 만나는 점을 $(q,\ q)$

라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $p=\dfrac{1}{2}$이면 $a=\dfrac{1}{4}$이다.

ㄴ. $p<q$

ㄷ. $a^{p+q}=\dfrac{pq}{2^q}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

12. 집합 U를

$$U=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a,\ b,\ c,\ d\text{는 } 1\text{이 아닌 양수}\right\}$$

라 하자. U의 부분집합 S를

$$S=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, \log_a d=\log_b c,\ \ a\neq b,\ \ bc\neq 1\right\}$$

이라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $A=\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$이면 $A\in S$이다.

ㄴ. $A\in U$이고 A가 역행렬을 가지면 $A\in S$이다.

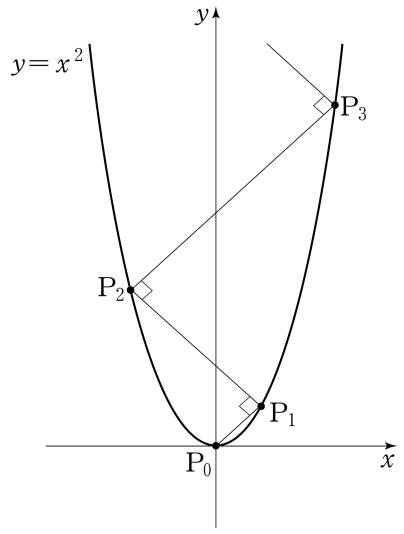
ㄷ. $A\in S$이면 A는 역행렬을 가진다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13. 자연수 n에 대하여 두 점 P_{n-1}, P_n이 함수 $y=x^2$의 그래프 위의 점일 때, 점 P_{n+1}을 다음 규칙에 따라 정한다.

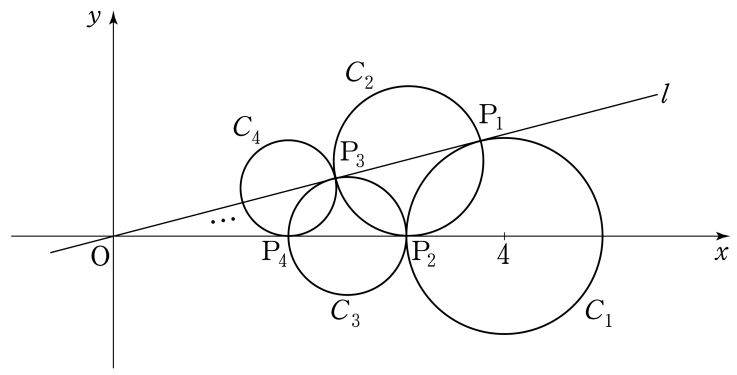
> (가) 두 점 P_0, P_1의 좌표는 각각 $(0, 0)$, $(1, 1)$이다.
> (나) 점 P_{n+1}은 점 P_n을 지나고 직선 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$에 수직인 직선과 함수 $y=x^2$의 그래프의 교점이다. (단, P_n과 P_{n+1}은 서로 다른 점이다.)

$l_n=\overline{\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n}$이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{l_n}{n}$의 값은? [3점]



① $2\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{2}$

14. 좌표평면에 원 $C_1:(x-4)^2+y^2=1$이 있다. 그림과 같이 원점에서 원 C_1에 기울기가 양수인 접선 l을 그었을 때 생기는 접점을 P_1이라 하자.
중심이 직선 l 위에 있고 점 P_1을 지나며 x축에 접하는 원을 C_2라 하고 이 원과 x축의 접점을 P_2라 하자.
중심이 x축 위에 있고 점 P_2를 지나며 직선 l에 접하는 원을 C_3이라 하고 이 원과 직선 l의 접점을 P_3이라 하자.
중심이 직선 l 위에 있고 점 P_3을 지나며 x축에 접하는 원을 C_4라 하고 이 원과 x축의 접점을 P_4라 하자.
이와 같은 과정을 계속할 때, 원 C_n의 넓이를 S_n이라 하자. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}S_n$의 값은? (단, 원 C_{n+1}의 반지름의 길이는 원 C_n의 반지름의 길이보다 작다.) [4점]



① $\dfrac{3}{2}\pi$ ② 2π ③ $\dfrac{5}{2}\pi$ ④ 3π ⑤ $\dfrac{7}{2}\pi$

15. 어떤 사회봉사센터에서는 다음과 같은 4가지 봉사활동 프로그램을 매일 운영하고 있다.

프로그램	A	B	C	D
봉사활동 시간	1시간	2시간	3시간	4시간

철수는 이 사회봉사센터에서 5일간 매일 하나씩의 프로그램에 참여하여 다섯 번의 봉사활동 시간 합계가 8시간이 되도록 아래와 같은 봉사활동 계획서를 작성하려고 한다. 작성할 수 있는 봉사활동 계획서의 가짓수는? [4점]

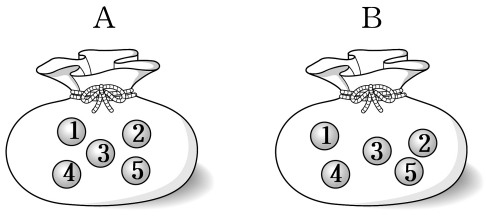
봉사활동 계획서

성명 :

참여일	참여 프로그램	봉사활동 시간
2009.1.5		
2009.1.6		
2009.1.7		
2009.1.8		
2009.1.9		
봉사활동 시간 합계		8시간

① 47 ② 44 ③ 41 ④ 38 ⑤ 35

16. 주머니 A와 B에는 1, 2, 3, 4, 5의 숫자가 하나씩 적혀 있는 다섯 개의 구슬이 각각 들어 있다. 철수는 주머니 A에서, 영희는 주머니 B에서 각자 구슬을 임의로 한 개씩 꺼내어 두 구슬에 적혀 있는 숫자를 확인한 후 다시 넣지 않는다. 이와 같은 시행을 반복할 때, 첫 번째 꺼낸 두 구슬에 적혀 있는 숫자가 서로 다르고, 두 번째 꺼낸 두 구슬에 적혀 있는 숫자가 같을 확률은? [4점]



① $\frac{3}{20}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{7}{20}$

17. 정보이론에서는 사건 E가 발생했을 때, 사건 E의 정보량 $I(E)$가 다음과 같이 정의된다고 한다.

$$I(E)=-\log_2 \mathrm{P}(E)$$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, 사건 E가 일어날 확률 $\mathrm{P}(E)$는 양수이고, 정보량의 단위는 비트이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. 한 개의 주사위를 던져 홀수의 눈이 나오는 사건을 E라 하면 $I(E)=1$이다.

ㄴ. 두 사건 A, B가 서로 독립이고 $\mathrm{P}(A\cap B)>0$이면 $I(A\cap B)=I(A)+I(B)$이다.

ㄷ. $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$인 두 사건 A, B에 대하여 $2I(A\cup B)\leqq I(A)+I(B)$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

18. 지수함수 $y=5^{x-1}$의 그래프가 두 점 $(a, 5)$, $(3, b)$를 지날 때, $a+b$의 값을 구하시오. [3점]

19. 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1+a_5+a_9=45$$

일 때, a_1+a_{10}의 값을 구하시오. [3점]

20. 공비가 같은 두 무한등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $a_1-b_1=1$이고 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=8$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=6$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$의 값을 구하시오. [3점]

21. $1<a<b$인 두 실수 a, b에 대하여

$$\frac{3a}{\log_a b}=\frac{b}{2\log_b a}=\frac{3a+b}{3}$$

가 성립할 때, $10\log_a b$의 값을 구하시오. [3점]

22. 주사위를 두 번 던질 때, 나오는 눈의 수를 차례로 m, n이라 하자. $i^m\cdot(-i)^n$의 값이 1이 될 확률이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, $i=\sqrt{-1}$이고 p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

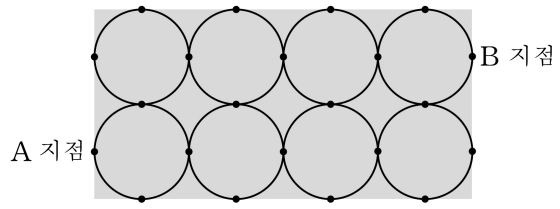
23. 자연수 $n(n \geq 2)$으로 나누었을 때, 몫과 나머지가 같아지는 자연수를 모두 더한 값을 a_n이라 하자. 예를 들어 4로 나누었을 때, 몫과 나머지가 같아지는 자연수는 5, 10, 15이므로 $a_4 = 5 + 10 + 15 = 30$이다. $a_n > 500$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구하시오. [4점]

24. 이차정사각행렬 A는 모든 성분의 합이 0이고

$$A^2 + A^3 = -3A - 3E$$

를 만족시킨다. 행렬 $A^4 + A^5$의 모든 성분의 합을 구하시오. (단, E는 단위행렬이다.) [4점]

25. 직사각형 모양의 잔디밭에 산책로가 만들어져 있다. 이 산책로는 그림과 같이 반지름의 길이가 같은 원 8개가 서로 외접하고 있는 형태이다.



A 지점에서 출발하여 산책로를 따라 최단 거리로 B 지점에 도착하는 경우의 수를 구하시오. (단, 원 위에 표시된 점은 원과 직사각형 또는 원과 원의 접점을 나타낸다.) [4점]

5지선다형

26. 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A) = \frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B^C) = \frac{2}{3}$이며 $\mathrm{P}(B|A) = \frac{1}{6}$일 때, $\mathrm{P}(A^C|B)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{7}{12}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

27. 자연수 n에 대하여 $\log n$의 가수를 $f(n)$이라 할 때, 집합

$$A=\{f(n) \mid 1 \leqq n \leqq 150,\ n\text{은 자연수}\}$$

의 원소의 개수는? [3점]

① 131 ② 133 ③ 135 ④ 137 ⑤ 139

28. 단위행렬이 아닌 두 이차정사각행렬 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) A, B는 모두 역행렬을 가진다.
(나) $BAB=E$, $ABA=A^{-1}$

$A^n=E$가 성립하는 자연수 n의 최솟값은? (단, E는 단위행렬이다.) [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

29. 다음은 어떤 모집단의 확률분포표이다.

X	10	20	30	계
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	a	$\frac{1}{2}-a$	1

이 모집단에서 크기가 2인 표본을 복원추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. $\overline{X}$의 평균이 18일 때, $P(\overline{X}=20)$의 값은? [4점]

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{19}{50}$ ③ $\frac{9}{25}$ ④ $\frac{17}{50}$ ⑤ $\frac{8}{25}$

단답형

30. 두 주사위 A, B를 동시에 던질 때, 나오는 각각의 눈의 수 m, n에 대하여 $m^2+n^2 \leqq 25$가 되는 사건을 E라 하자. 두 주사위 A, B를 동시에 던지는 12회의 독립시행에서 사건 E가 일어나는 횟수를 확률변수 X라 할 때, X의 분산 $V(X)$는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.