THE ENGINE OF KOREA
HANYANG UNIVERSITY

2021 한양대학교 ERICA 논술 출제의도 및 예시답안

ERICA 입학처 입학팀 2021.03.31

[수리논술 오후2 문제1]

[문제 1] 다음 제시문 〈가〉 ~ 〈라〉를 읽고 물음에 답하시오.

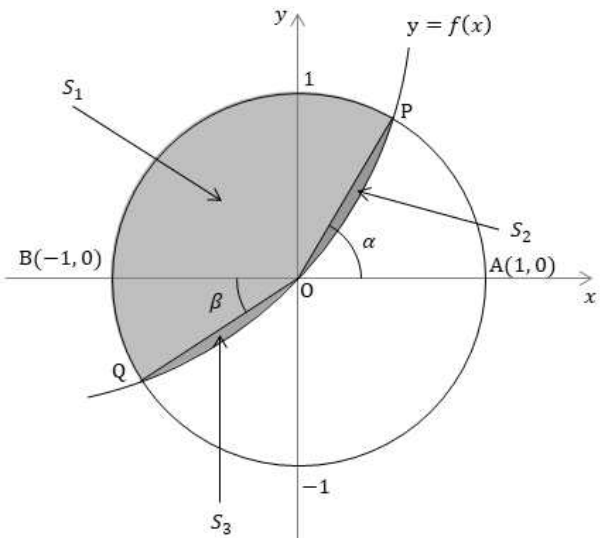
〈가〉 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$을 지나는 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$x_1x+y_1y=r^2$$

〈나〉 $a>0,\ b>0$ 이면 $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ 이다. (단, 등호는 $a=b$ 일 때만 성립)

〈다〉 좌표평면의 원점 O 에서 x 축의 양의 방향을 시초선으로 하고, 일반각의 크기 θ 가 나타내는 동경을 OP 라 하자. 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r인 원과 OP 가 만나는 점을 $\mathrm{P}(x, y)$라 할 때, $x=r\cos\theta$ 이고 $y=r\sin\theta$ 이다.

〈라〉



1-1. 직선 $y=ax+1$과 원 C: $x^2+y^2=1$의 제3사분면에서의 교점을 R이라 하자. 점 R에서의 원의 접선이 직선 $y=-2$와 만나는 점과, 두 직선 $y=ax+1$과 $y=-2$가 만나는 점 사이의 거리의 최솟값과 그 때의 a의 값을 구하여라. (단, $a>1$) **[15점]**

1-2. 제시문 〈라〉에 있는 그림과 같이 곡선 $f(x)=x^2+2mx$와 원 C: $x^2+y^2=1$의 두 교점 중 제1사분면에 위치한 점을 P라 하자. 원점 O와 점 $\mathrm{A}(1, 0)$에 대하여 $\angle\mathrm{AOP}=\alpha$라 할 때, m을 α로 나타내어라. (단, $m>1$) **[10점]**

1-3. 1-2에서 정의된 곡선 $f(x)$와 원 C의 두 교점 중 제3사분면에 위치한 점을 Q라 하고, 점 $\mathrm{B}(-1, 0)$에 대하여 $\angle\mathrm{BOQ}=\beta$라 하자. 제시문 〈라〉의 그림과 같이 부채꼴 POQ를 S_1, 선분 OP와 함수 $f(x)$로 둘러싸인 영역을 S_2, 선분 OQ와 함수 $f(x)$로 둘러싸인 영역을 S_3이라 하자. 이 때, 세 영역 S_1, S_2, S_3의 넓이를 각각 α, β로 나타내어라. **[20점]**

1. 출제 의도

(1) 조건을 만족하는 점에서 원의 접선의 방정식을 구할 수 있는지, (2) 각을 이용하여 점의 좌표를 표현하고 활용할 수 있는지, 그리고 (3) 삼각함수의 정적분을 활용하여 주어진 도형의 넓이를 구할 수 있는지 평가하기 위해 출제된 문항이다.

2. 문항 해설

1-1. 직선과 곡선의 교점의 좌표를 구하고, 이를 활용하여 곡선의 접선의 방정식을 구하는 문제이다. 제시문에 주어진 산술평균과 기하평균의 관계를 활용하여 최솟값을 구한다.

1-2. 삼각함수의 정의를 이해하고 점의 좌표를 각을 이용하여 나타낸다.

1-3. 삼각함수의 정적분을 활용하여 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하는 문제이다.

3. 예시 답안 혹은 정답

1-1.

[풀이]

C : $x^2+y^2=1$ 와 $y=ax+1$의 교점은

$x^2+(ax+1)^2=1,\ (a^2+1)x^2+2ax=0$

$x\neq 0$의 해는, $x=-\dfrac{2a}{a^2+1},\ y=\dfrac{-a^2+1}{a^2+1}$

따라서 R$\left(-\dfrac{2a}{a^2+1},\dfrac{-a^2+1}{a^2+1}\right)$이 되고, 점 R 에서 접하는 접선의 방정식은 제시문 **〈가〉**를 이용하여

$-\dfrac{2a}{a^2+1}x+\dfrac{-a^2+1}{a^2+1}y=1,\ -2ax+(-a^2+1)y=a^2+1$

직선 $y=ax+1$이 직선 $y=-2$와 만나는 점 $y=-2$이면, $x=-\dfrac{3}{a}$ 이므로 $\left(-\dfrac{3}{a},-2\right)$

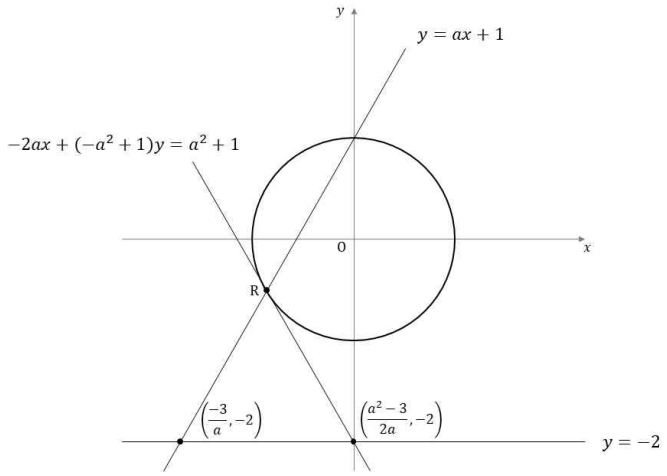
접선 $-2ax+(-a^2+1)y=a^2+1$ 이 직선 $y=-2$와 만나는 점 $y=-2$이면, $x=\dfrac{a^2-3}{2a}$ 이므로 $\left(\dfrac{a^2-3}{2a},-2\right)$

이 때, 제시문 **〈나〉**를 이용하면,

$\left|\dfrac{a^2-3}{2a}+\dfrac{3}{a}\right|=\dfrac{a^2+3}{2a}=\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{3}{a}\right)\geq\sqrt{a\cdot\dfrac{3}{a}}=\sqrt{3}$

이 때, 등호가 성립하는 것은 $a=\dfrac{3}{a}$, $a=\sqrt{3}$

따라서 $a=\sqrt{3}$ 일 때, 최솟값은 $\sqrt{3}$ 이다.



[15점]

1-2.

[풀이]

$f(x)=x^2+2mx$**에 대해, 점** $\mathrm{P}(\cos\alpha,\sin\alpha)$**가 곡선** $y=f(x)$ **위에 있으므로,** $\sin\alpha=\cos^2\alpha+2m\cos\alpha$

따라서, $m=\dfrac{\sin\alpha-\cos^2\alpha}{2\cos\alpha}=\dfrac{1}{2}(\tan\alpha-\cos\alpha)$

[10점]

1-3.

[풀이]

$S_1=\dfrac{1}{2}\cdot 1^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha+\dfrac{\pi}{2}+\beta\right)=\dfrac{1}{2}(\pi-\alpha+\beta)$

선분 OP **:** $y=x\tan\alpha$ **와 곡선** $y=f(x)$**로 둘러싸인 부분의 면적** S_2**는 제시문 〈나〉를 이용하여**

$S_2=\displaystyle\int_0^{\cos\alpha}\{x\tan\alpha-f(x)\}dx=\int_0^{\cos\alpha}(-x^2+x\cos\alpha)dx=\frac{1}{6}cos^3\alpha$

$Q(-\cos\beta,-\sin\beta)$**에서, 선분** OQ **:** $y=x\tan\beta$ **와 곡선** $y=f(x)$**로 둘러싸인 부분의 면적** S_3**는 제시문 〈나〉를 이용하여**

$S_3=\displaystyle\int_{-\cos\beta}^{0}\{x\tan\beta-f(x)\}dx=\int_{-\cos\beta}^{0}(-x^2-x\cos\beta)dx=\frac{1}{6}\cos^3\beta$

$S=S_1+S_2+S_3=\dfrac{1}{2}(\pi-\alpha+\beta)+\dfrac{1}{6}(\cos^3\alpha+\cos^3\beta).$

[20점]

[수리논술 오후2 문제2]

[문제 2] 다음 제시문 〈가〉 ~ 〈나〉를 읽고 물음에 답하시오.

〈가〉 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, $[a, b]$를 n등분하여 양 끝점과 각 분점의 x좌표를 차례로 $a = x_0, x_1, \cdots, x_n = b$라고 하면 소구간의 길이 Δx는 $\Delta x = \frac{b-a}{n}$이고 $k = 0, 1, \cdots, n$에 대해 $x_k = a + k\Delta x$이다.

이 때, $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$라고 하면 극한값 $\lim_{n \to \infty} S_n$이 항상 존재하는데, 이 극한값을 $\int_a^b f(x)dx$로 나타낸다.

즉,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}$$

이다.

〈나〉 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고, $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

2-1. 함수 $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$에 대하여, $a_n = \int_0^n f(x)dx$의 값을 구하여라. (단, n은 자연수) **[10점]**

2-2. 제시문 〈가〉와 2-1의 결과를 이용하여, $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} \ln(1 - a_k)$의 값을 구하여라. **[15점]**

1. 출제 의도

(1) 치환적분법을 활용하여 정적분의 값을 구할 수 있는지, (2) 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가하기 위해 출제된 문제이다.

2. 문항 해설

2-1. 미적분 교과에서 학습한 여러 가지 적분법 중 치환적분법을 활용하여 지수함수의 정적분의 값을 구하는 문항이다.
2-2. 급수로 표현된 식을 정적분으로 변형하여 값을 구하는 문항이다.

3. 예시 답안 혹은 정답

2-1.

[풀이]

$$a_n = \int_0^n x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$\frac{x^2}{2} = t$로 치환

$$x\,dx = dt$$

$$a_n = \int_0^{\frac{n^2}{2}} e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{\frac{n^2}{2}}$$

$$= -e^{-\frac{n^2}{2}} + e^0$$

$$= 1 - e^{-\frac{n^2}{2}}$$

그러므로 $a_n = 1 - e^{-\frac{n^2}{2}}$

[10점]

2-2.

[풀이]

$1 - a_k = e^{-\frac{k^2}{2}}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} \ln(1-a_k) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} \left(\ln\left(e^{-\frac{k^2}{2}} \right) \right) \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[-\frac{1}{2n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 \right) = \lim_{n\to\infty} \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n} \right)^2 \right]$$

이때 $x_x = \frac{k}{n}$이라 하면, $\Delta x = \frac{1}{n}$이므로 정적분과 급수의 합 사이의 관계에 의하여

$$(\text{주어진 식}) = -\frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n} \right)^2 = -\frac{1}{2} \int_0^1 x^2 dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}$$

[15점]

[수리논술 오후2 문제3]

[문제 3] 다음 제시문 〈가〉 ~ 〈나〉를 읽고 물음에 답하시오.

〈가〉 실수계수를 갖는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하고 $D=b^2-4ac$라 하자. (단, $a \neq 0$)

1) $D>0$이면 서로 다른 두 실근을 갖는다.
2) $D=0$이면 중근을 갖는다.

〈나〉 미분 가능한 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$에 대하여 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수는 다음과 같다.

$$\{f(g(x))\}' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

3-1. 함수 $f(x)=(x-4)e^x$에 대하여 점$(b, 0)$에서 서로 다른 2개의 접선을 그을 수 있다. 이 때, b의 값이 될 수 없는 정수를 모두 구하여라. **[15점]**

3-2. 함수 $f(x)=(x-4)e^x$과 실수 t에 대하여 기울기가 t인 직선이 $y=f(x)$에 접할 때, 접점의 x좌표를 $g(t)$라 하자. 점$(4, 0)$에서 함수 $f(x)$에 대한 접선의 기울기가 a일 때, 미분 가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $g'(a)$를 구하여라. (단, $x>2$) **[15점]**

1. 출제 의도

(1) 지수함수의 미분법을 활용하여 접선의 방정식을 구할 수 있는지, (2) 조건에 맞는 함수를 구하고 합성함수의 미분법을 활용할 수 있는지를 평가하기 위해 출제된 문제이다.

2. 문항 해설

3-1. 지수함수의 미분을 활용하여 주어진 점에서 그을 수 있는 접선의 개수를 이차방정식의 판별식을 활용하여 구하는 문제이다.

3-2. 문제에서 정의한 함수를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있는지 평가하는 문제이다.

3. 예시 답안 혹은 정답

3-1.

[풀이]

$y=(x-4)e^x \Rightarrow y'=(x-3)e^x$

곡선 위의 점 $(x_1,(x_1-4)e^{x_1})$**에서의 접선의 방정식** $y-(x_1-4)e^{x_1}=(x_1-3)e^{x_1}(x-x_1)$

$(b,0)$**을 지나므로** $-(x_1-4)e^{x_1}=(x_1-3)e^{x_1}(b-x_1)$

$\Rightarrow -(x_1-4)=(x_1-3)(b-x_1)$

$\Rightarrow (x_1-b)(x_1-3)=x_1-4$

$\Rightarrow x_1^2-(3+b)x_1+3b=x_1-4$

$\Rightarrow x_1^2-(4+b)x_1+3b+4=0$

서로 다른 두 실근 : $(4+b)^2-4(3b+4)>0$

$\Rightarrow b^2+8b+16-12b-16>0$

$\Rightarrow b^2-4b>0$

$\Rightarrow b>4, b<0$

정수 : $b=0,1,2,3,4$

[15점]

3-2.

[풀이]

$f'(g(t))=t$

$g(t)=x$ **라하면** $t=f'(g(t))=f'(x)=(x-3)e^x$

$\Rightarrow g\left((x-3)e^x\right)=x$

양변을 미분하면

$\Rightarrow g'\left((x-3)e^x\right)\cdot(x-2)e^x=1$

$\Rightarrow g'\left((x-3)e^x\right)=\dfrac{1}{(x-2)e^x}$

$g'(e^4)=\dfrac{1}{2e^4}$

[15점]