THE ENGINE OF KOREA
HANYANG UNIVERSITY

2021 한양대학교 ERICA 논술 출제의도 및 예시답안

ERICA 입학처 입학팀 2021.03.31

2021학년도 한양대학교 ERICA 논술 출제의도 및 예시답안

[수리논술 오후1 문제1]

[문제 1] 다음 제시문 〈가〉~〈라〉를 읽고 물음에 답하시오.

〈가〉 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이면 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값 M과 최솟값 m을 가지므로 다음 부등식이 성립한다.

$$m \cdot (b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M \cdot (b-a)$$

〈나〉 실수 a가 아니면서 a에 충분히 가까운 모든 실수 x에 대하여 세 함수 f, g, h가 $f(x) \le g(x) \le h(x)$ 를 만족하며, $\lim_{x \to a} f(x) = L = \lim_{x \to a} h(x)$ 이면 $\lim_{x \to a} g(x) = L$ 이다.

〈다〉 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 연속일 때, 그 구간에 속하는 임의의 실수 a, b, c에 대하여 다음 등식이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

〈라〉 함수 $F(x)$에 대한 도함수의 정의는 다음과 같다.

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

1-1. 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 $I_n = \int_0^{a^n} f(x)dx$ 일 때, 제시문 〈가〉와 〈나〉를 이용하여 $\lim_{n \to \infty} I_n = 0$ 임을 보이시오. (단, $0 < a < 1$ 이고 n은 자연수) **[10점]**

1-2. 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 $J_n = \int_{a^n}^1 f(x)dx$ 일 때, 제시문 〈가〉 ~ 〈다〉를 이용하여 $\lim_{n \to \infty} J_n = \int_0^1 f(x)dx$ 임을 보이시오. (단, $0 < a < 1$이고 n은 자연수) **[10점]**

1-3. 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 $F(x)$를 다음과 같이 정의하자.

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

제시문 〈가〉 ~ 〈라〉를 이용하여 $F'(x) = f(x)$ 임을 보이시오. **[15점]**

1. 출제 의도

수열의 극한의 다양한 성질을 이해하고 제시문에 주어진 조건과 함께 이를 활용하여 문제를 해결 할 수 있는지 평가한다.

2. 문항 해설

수열의 극한에 대한 다양한 성질이 있고 이를 활용하여 다양한 명제가 참임을 논리적으로 알 수 있다. 학생들이 제시문과 문항을 풀이하면서 참인 명제를 알게 되고 이를 활용하여 최종 문제를 해결하는 추론 능력과 문제해결력을 평가하는 문항이다. 이 과정에서 학생들의 식을 변형하는 능력과 창의적인 능력이 평가 될 수 있다. 때문에 평소 개념과 원리를 등한시 하고 답과 풀이과정을 암기하는 형태의 학습에 익숙한 학생들은 난관에 처할 수도 있다.

1-1. 주어진 수열의 극한값을 수열의 성질을 활용하여 참임을 보이는 문항으로 극한의 성질을 적용할 수 있어야 풀이를 할 수 있다.
1-2. 문제1-1의 상황보다 한 단계의 과정을 더 거쳐서 문제를 해결해야 한다.
1-3. 문제1-2의 상황보다 조금 더 복잡한 논리적 추론과 문제 해결력이 필요한 문항이다.

3. 예시 답안 혹은 정답

1-1.

[풀이]

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이므로 제시문 〈가〉에 의해 이 구간에서 최대값 M과 최소값 m을 가지며

$m \cdot (a^n - 0) \le \int_0^{a^n} f(x)dx \le M \cdot (a^n - 0)$ 가 성립한다.

---[5점]

$I_n = \int_0^{a^n} f(x)dx$ 라 두면

$m \cdot a^n \le I_n \le M \cdot a^n$ 와 같고

$n \to \infty$일 때 $0 < a < 1$인 a에 대해서 $a^n \to 0$ 이므로 제시문 〈나〉에 의해 $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ 이다.

---[10점]

1-2.

[풀이]

제시문 〈다〉에 의해 $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^{a^n} f(x)dx + \int_{a^n}^1 f(x)dx$ 이 성립한다.

$J_n = \int_{a^n}^1 f(x)dx$ 라 두면 $\int_0^1 f(x)dx = I_n + J_n$ 과 같다.

---[5점]

$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} (I_n + J_n)$ 이고 문제 1-1에 의해 $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ 이므로

$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} J_n$ 이 성립한다.

---[10점]

1-3.

[풀이]

제시문 〈라〉의 도함수 정의에 의해

$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ **이고**

제시문 〈다〉에 의해

$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_0^{x+h}f(t)dt-\int_0^{x}f(t)dt}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h}f(t)dt}{h}$ **가 성립한다.**

[5점]

제시문 〈가〉에 의해

$m\le f(x)\le M$ **인** m,M**이 존재해서**

$m\cdot h\le\int_x^{x+h}f(t)dt\le M\cdot h$ **가 성립하고 양변을** h**로 나누어 주면**

$$m\le\frac{\int_x^{x+h}f(t)dt}{h}\le M$$ **가 성립한다.**

[10점]

$h\to 0$ **일 때** $x+h\to x$ **이고** $f(x)$**는 닫힌구간** $[x,x+h]$**에서 연속이므로** $h\to 0$ **일 때** $f(x+h)\to f(x)$ **이므로** $h\to 0$**일 때**

$m=f(x)\le\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h}f(t)dt}{h}\le M=f(x)$ **가 되어 제시문 〈나〉 에 의해** $\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h}f(t)dt}{h}=f(x)$ **가 된다.**

즉,

$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h}f(t)dt}{h}=f(x)$ **가 된다.**

[15점]

[수리논술 오후1 문제2]

[문제 2] 다음 제시문 〈가〉 ~ 〈다〉를 읽고 물음에 답하시오.

〈가〉 어떤 시행에서 표본공간 S가 유한집합이고 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같을 때, 사건 A가 일어날 수학적 확률은 다음과 같다.

$$\mathrm{P}(A)=\frac{(\text{사건 } A\text{의 원소의 개수})}{(\text{표본공간 } S\text{의 원소의 개수})}$$

〈나〉 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, $[a, b]$를 n등분하여 양 끝점과 각 분점의 x좌표를 차례로 $a=x_0, x_1, \cdots, x_n=b$라고 하면 소구간의 길이 Δx는 $\Delta x=\frac{b-a}{n}$이고, $k=0, 1, \cdots, n$에 대해 $x_k=a+k\Delta x$이다.

이 때, $S_n=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$라고 하면, 극한값 $\lim_{n\to\infty} S_n$이 항상 존재하는데, 이 극한값을 $\int_a^b f(x)dx$로 나타낸다.

즉,

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}$$

이다.

〈다〉 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분 가능하고, 두 도함수 $f'(x)$, $g'(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 다음 등식이 성립한다.

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx=[f(x)g(x)]_a^b-\int_a^b f(x)g'(x)dx$$

2-1. 10개의 상자가 일렬로 배열되어 있고 맨 앞의 상자와 맨 뒤의 상자에는 공이 한 개씩 들어있으며, 나머지 상자에는 공이 한 개 들어있거나 비어있다고 하자. 이 때, 비어있는 상자가 연속하여 나타나지 <u>않을</u> 확률을 구하여라. (단, 상자마다 공이 한 개 들어있거나 비어있을 확률은 각각 $\frac{1}{2}$로 같다.) **[15점]**

2-2. n개의 서로 다른 공을 $2n$개의 서로 다른 상자에 모두 나누어 넣는다. 각 상자에는 공이 하나도 들어있지 않을 수 있으며 여러 개의 공이 들어있을 수도 있다. 각 상자에 한 개 이하의 공만 들어있을 확률을 p_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln p_n}{n}$을 구하여라. **[20점]**

1. 출제 의도

(1)확률과 통계 단원의 핵심으로 볼 수 있는 다양한 상황에서의 수학적 확률을 창의적이고 논리적으로 구할 수 있는지를 평가한다. (2)급수의 극한값을 정적분을 활용하여 계산할 수 있는지를 평가하고 그 과정에서 합성함수의 미분을 이해하고 적용할 수 있는 지를 평가한다.

2. 문항 해설

2-1. 수학적 확률에 대한 정확한 이해를 바탕으로 주어진 문제에 접근해야 되는 문항으로 주어진 문제 상황을 논리적으로 파악하고 경우의 수를 나누어서 확률의 덧셈정리를 적용해서 풀이해야 한다. 이 과정에서 문제 상황을 분석하고 조건에 맞는 해결방안을 모색하는 능력이 필요하다.

2-2. 주어진 문제 상황에서 논리적으로 확률을 구한 뒤 극한값을 구하는 과정에서 정적분을 어떻게 적용하여 문제를 해결해야 하는지 학생 스스로 파악해야 하며 이를 위해 창의적이고 논리적인 과정이 필요하다. 또한 계산 과정에서 합성함수의 미분의 개념을 정확하게 사용하야 정답을 구할 수 있다.

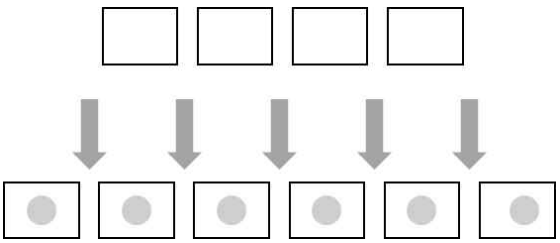
3. 예시 답안 혹은 정답

2-1.

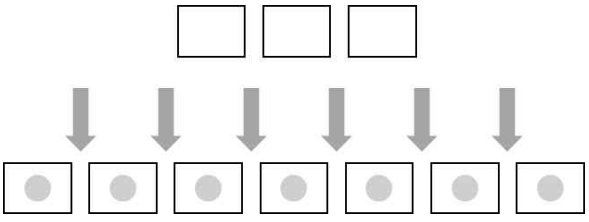
[풀이]

10개의 상자가 일렬로 배열되어 있으며 맨 앞의 상자와 맨 뒤의 상자에는 공이 하나씩 들어있고 나머지 상자에 공이 하나 들어있던지 비어있을 전체 경우의 수는 2^8 이다. 나열된 상자 중 맨 앞과 맨 뒤를 제외하고 나머지 8개 상자에 공을 4개 이상 넣어야 비어있는 상자가 연속하여 나타나지 않게 할 수 있다. 공을 넣을 상자를 먼저 배열한 뒤 그 상자들 사이를 선택하여 나머지 비어있는 상자를 배열하면 다음과 같다.

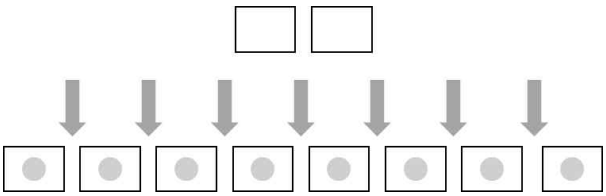
case1 : 공을 4개를 나누어 넣는 경우는 ${}_5C_4$이다.



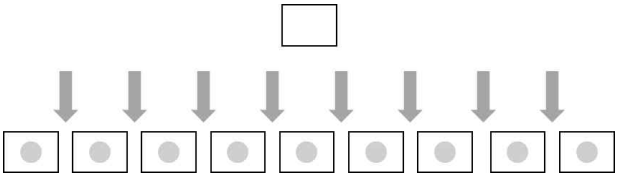
case2 : 공을 5개를 나누어 넣는 경우는 ${}_6C_3$이다.



case3 : 공을 6개를 나누어 넣는 경우는 ${}_7C_2$이다.



case4 : 공을 7개를 나누어 넣는 경우는 ${}_8C_1$이다.



case5 : 공을 8개를 나누어 넣는 경우는 ${}_9C_0$이다.



${}_5C_4 + {}_6C_3 + {}_7C_2 + {}_8C_1 + {}_9C_0 = 55$

따라서 비어있는 상자가 연속하여 나타나지 않을 확률은 $\frac{55}{2^8} = \frac{55}{256}$ 이다.

[15점]

2-1. [별해]

n개의 상자가 일렬로 배열되어 있으며 맨 앞의 상자와 맨 뒤의 상자에는 공이 하나씩 들어있고 나머지 상자에 공이 하나 들어있던지 비어있을 전체 경우의 수는 2^{n-2} 이다.

a_n을 n개의 일렬로 배열된 상자 중 양쪽 끝에는 공이 하나씩 들어있으며, 나머지 상자에는 비어있는 상자가 연속하여 나타나지 않게 공이 들어가 있을 경우의 수라 하자.

두 번째 상자에 공이 하나 들어있는 경우 : 첫 번째 상자를 제외한 나머지 $n-1$개의 상자 중 양쪽 끝에 공이 하나씩 들어가고 나머지 상자에는 비어있는 상자가 연속하여 나타나지 않게 공이 들어가 있어야 하므로 이 경우의 수는 a_{n-1} 이다.

두 번째 상자가 비어있는 경우 : 세 번째 상자에는 반드시 공이 하나 들어있어야 한다. 따라서, 첫 번째와 두 번째 상자를 제외한 나머지 $n-2$개의 상자의 양쪽 끝에는 공이 하나씩 들어가고 나머지 상자에는 비어있는 상자가 연속하여 나타나지 않게 공이 들어가 있어야 하므로 이 경우의 수는 a_{n-2} 이다.

따라서 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ 인 수열이 된다.

$n=2$인 경우 두 상자 모두 공이 들어있으므로 $a_2 = 1$

$n=3$인 경우 양쪽 끝에는 공이 들어있고 가운데는 공이 들어있을 수도 비어있을 수도 있으므로 $a_3 = 2$

나머지는 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$에 의하여 $a_4 = 3,\ a_5 = 5,\ a_6 = 8,\ a_7 = 13,\ a_8 = 21,\ a_9 = 34,\ a_{10} = 55$

따라서 비어있는 상자가 연속하여 나타나지 않을 확률은 $\frac{55}{2^8} = \frac{55}{256}$ 이다.

[15점]

2-2.

[풀이]

n개의 서로 다른 공을 $2n$개의 서로 다른 상자에 넣는 방법은 $(2n)^n$가지이다.

어떤 상자에든 한 개 이하의 공만 들어있는 경우는 ${}_{2n}P_n$가지이므로, 확률 $p_n = \frac{{}_{2n}P_n}{(2n)^n}$이다.

[5점]

$$p_n = \frac{{}_{2n}P_n}{(2n)^n} = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{2n}{n} \cdot \frac{2n-1}{n} \cdot \cdots \cdot \frac{2n-n+2}{n} \cdot \frac{2n-n+1}{n}$$

$$= \frac{1}{2^n} \cdot \frac{n+n}{n} \cdot \frac{n+n-1}{n} \cdot \cdots \cdot \frac{n+2}{n} \cdot \frac{n+1}{n}$$

$$= \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1+\frac{n-1}{n}\right)\left(1+\frac{n}{n}\right)$$

$$\ln p_n = \ln\frac{1}{2^n} + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{n-1}{n}\right) + \ln\left(1+\frac{n}{n}\right) = \ln\frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

[10점]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln p_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{-n\ln 2 + \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right\} = -\ln 2 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$$= -\ln 2 + \int_0^1 \ln(1+x)\,dx = -\ln 2 + \left[(1+x)\ln(1+x) - (1+x)\right]_0^1$$

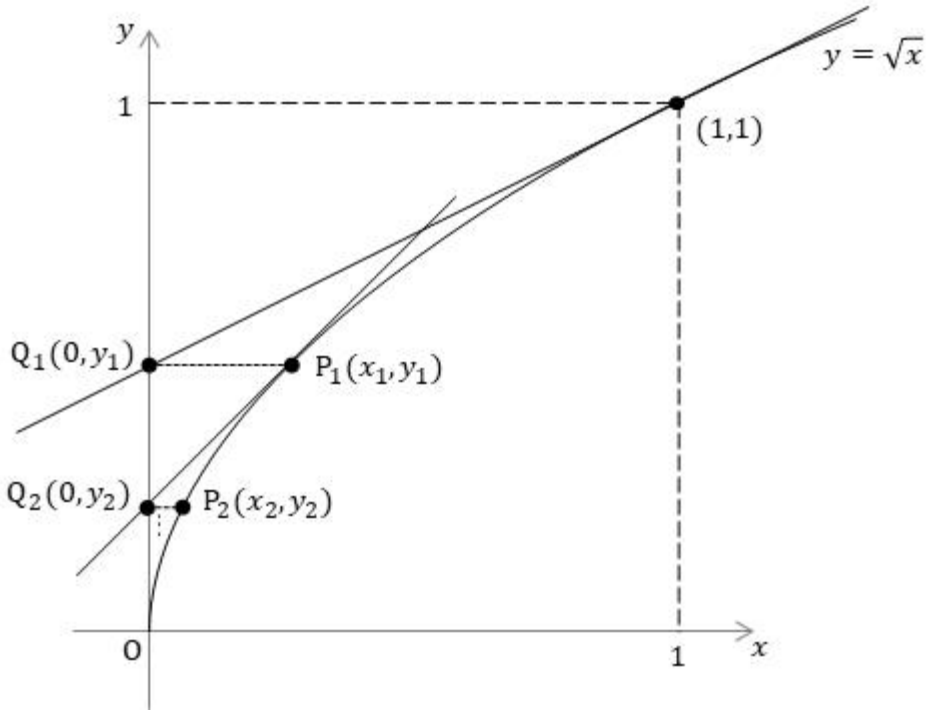
$$= -\ln 2 + 2\ln 2 - 1 = \ln 2 - 1$$

[20점]

[수리논술 오후1 문제3]

[문제 3] 다음 제시문 〈가〉 ~ 〈나〉를 읽고 물음에 답하시오.

〈가〉 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위의 점 $(1,1)$에서의 접선과 y축과의 교점을 $\mathrm{Q}_1(0,y_1)$이라 하고 점 Q_1을 지나고 x축에 평행한 직선과 곡선 $y=\sqrt{x}$의 교점을 $\mathrm{P}_1(x_1,y_1)$라 하자. 점 P_1에서의 접선과 y축과의 교점을 $\mathrm{Q}_2(0,y_2)$라 하고 점 Q_2를 지나고 x축에 평행한 직선과 곡선 $y=\sqrt{x}$의 교점을 $\mathrm{P}_2(x_2,y_2)$라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 점을 $\mathrm{P}_n(x_n,y_n)$이라 하자.



〈나〉 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=ar^{n-1}$이고, $r\neq 1$일 때 첫째항부터 제 n항까지의 합은 $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$이다. 또한 $|r|<1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\dfrac{a}{1-r}$이다.

3-1. 제시문 〈가〉에서 점 $\mathrm{P}_n(x_n,y_n)$의 좌표를 구하여라. **[10점]**

3-2. 점 $\mathrm{P}_n(x_n,y_n)$에서 곡선 $y=\sqrt{x}$에 접하는 직선과 y축 및 곡선 $y=\sqrt{x}$로 둘러싸인 영역의 넓이를 A_n이라 할 때, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$을 구하여라. **[20점]**

1. 출제 의도

무리함수의 미분을 활용하여 접선을 구하고 이를 일반화시키고 곡선과 직선으로 이루어진 부분의 넓이를 정적분을 활용하여 구하는 수행 능력을 평가한다.

2. 문항 해설

3-1. 무리함수의 미분을 정확하게 수행하고 주어진 접점에서 접선을 구할 수 있어야 하며 주어진 조건에 의해 연쇄적으로 일어나는 시행의 일반화를 할 수 있어야 한다.

3-2. 무리함수와 직선이 이루는 부분의 넓이를 구하기 위해 정적분을 사용해야 하는데 이 과정에서 정확한 개념이 필요하며 무리함수의 적분을 수행해야 한다.

3. 예시 답안 혹은 정답

3-1.

[풀이]

점 $(1, 1)$에서의 접선의 방정식은 $y-1=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)$. 즉, $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ 이다. 따라서 점 Q_1의 좌표는 $\mathrm{Q}_1\left(0, \frac{1}{2}\right)$이고 $y_1=\frac{1}{2}$이고, 점 $\mathrm{P}_1(x_1, y_1)$의 좌표는 $\mathrm{P}_1\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$이다. 즉 $x_1=\frac{1}{4}$.

점 $\mathrm{P}_n(x_n, y_n)$에서의 접선의 방정식은

$$y-y_n=\frac{1}{2\sqrt{x_n}}(x-x_n) \Rightarrow y-\sqrt{x_n}=\frac{1}{2\sqrt{x_n}}(x-x_n)$$

$$\Rightarrow y=\frac{x}{2\sqrt{x_n}}+\frac{\sqrt{x_n}}{2}$$

따라서 $\mathrm{Q}_{n+1}(0, y_{n+1})$의 좌표의 $y_{n+1}=\frac{\sqrt{x_n}}{2}$ 이므로 $\sqrt{x_{n+1}}=\frac{\sqrt{x_n}}{2}$이다. 따라서 $x_{n+1}=\frac{1}{4}x_n$ 이므로 $x_n=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{4}\right)^n$ 이고 $y_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 이다. 따라서 $\mathrm{P}_n(x_n, y_n)$의 좌표는 $\mathrm{P}_n(x_n, y_n)=\mathrm{P}_n\left(\left(\frac{1}{4}\right)^n, \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$이다.

[10점]

3-2.

[풀이]

$$A_n=x_ny_n-\frac{1}{2}x_n(y_n-y_{n+1})-\int_0^{x_n}\sqrt{x}\,dx$$

$$=x_n\sqrt{x_n}-\frac{1}{2}\left(\sqrt{x_n}-\sqrt{x_{n+1}}\right)-\frac{2}{3}x_n\sqrt{x_n}$$

$$=-\frac{1}{6}x_n\sqrt{x_n}+x_n\sqrt{x_{n+1}}$$

$$=-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$=-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{8}\right)^n+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}\right)^n$$

$$=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{8}\right)^n$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \frac{1}{12} \cdot \frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{8}} = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{84}$$

[20점]