THE ENGINE OF KOREA
HANYANG UNIVERSITY

2020 한양대학교 ERICA 논술 출제의도 및 예시답안

ERICA 입학처 입학팀 2020.03.31

2020학년도 한양대학교 ERICA 논술 출제의도 및 예시답안

[수리논술 오전 문제1]

[문제 1] 다음 제시문 〈가〉~〈라〉를 읽고 물음에 답하시오.

〈가〉 연속확률변수 X가 모든 실수값을 가지고, 그 확률밀도함수 $f(x)$가 두 상수 $m, \sigma^2 \ (\sigma > 0)$에 대하여

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

일 때, 확률변수 X의 확률분포를 정규분포라 하고, 기호로 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$과 같이 나타낸다.

〈나〉 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따를 때, 확률변수 $Z = \frac{X-m}{\sigma}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다. 이 때 구간 $[a, b]$에 확률변수 X가 속할 확률은 다음과 같다.

$$\mathrm{P}(a \le X \le b) = \mathrm{P}\left(\frac{a-m}{\sigma} \le Z \le \frac{b-m}{\sigma}\right)$$

〈다〉 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르는 확률변수 Z의 확률분포표는 다음과 같다.

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938
3.0	0.4987

〈라〉 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균의 값이 $\overline{x}$이면, 모평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은 다음과 같다.

$$\overline{x} - 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x} + 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

1-1. 확률변수 X가 평균이 k이고, 분산이 k인 정규분포를 따르고, $\mathrm{P}\left(X \le -\frac{1}{4}\right) = 0.1587$일 때, 제시문 〈다〉의 표준정규분포표를 이용하여 k의 값을 구하시오. (단, $k > 0$) **[10점]**

1-2. 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(6, 2^2)$을 따를 때, $\sum_{n=1}^{5} \mathrm{P}(X \le 2n) = \frac{p}{q}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) **[15점]**

1-3. 정규분포 $\mathrm{N}(m, 0.5^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 99%인 신뢰구간이 $a \le m \le b$이다. 여기서, $b-a \le 0.258$이 되도록 하는 자연수 n의 최솟값을 구하시오. (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58) = 0.99$로 계산한다.) **[15점]**

1. 출제 의도

(1) 표준정규분포와 표준화의 뜻을 알고, 표준정규분포를 활용하여 정규분포의 확률을 구할 수 있는지, (2) 표준화의 필요성과 그 과정을 이해하고, 표준정규분포를 활용하여 문제를 해결할 수 있는지, 그리고 (3) 모집단과 표본의 뜻을 알고, 표본평균과 모평균의 관계를 이해하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가하기 위해 출제된 문제이다. 아울러 문항의 답을 찾기 위해 제시문을 잘 활용하는지와 답안을 논리적으로 작성하는지도 평가한다.

2. 문항 해설

연속 확률분포에서 가장 기본이 되는 정규분포의 성질을 이해하고 이를 활용한 확률을 계산하는 것은 '확률과 통계' 활용의 유용성을 보여줄 수 있다. 본 문항의 핵심적인 내용은 확률과 통계의 '확률분포', '통계적 추정' 단원에서 다루어진다.

따라서 본 문항을 통해 학생들이 제시문을 읽고, 표준정규분포를 활용하여 정규분포의 확률을 구할 수 있는지, 표준화의 필요성과 그 과정을 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있는지, 표본평균과 모평균의 관계를 이해하여 문제를 해결할 수 있는지를 확인하고자 한다.

3. 채점 기준 및 예시 답안 혹은 정답

1-1.

[풀이]

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(k,k)$을 따르므로 확률변수 $Z = \frac{X-k}{\sqrt{k}}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$을 따른다.

따라서, $\mathrm{P}\left(X \le -\frac{1}{4}\right) = \mathrm{P}\left(Z \le \frac{-\frac{1}{4}-k}{\sqrt{k}}\right) = 0.1587$에서 $\mathrm{P}(Z \le -1.0) = 0.1587$ 이므로

$$\frac{-\frac{1}{4}-k}{\sqrt{k}} = -1.0$$

$$k + \frac{1}{4} = \sqrt{k}$$

$\left(k+\frac{1}{4}\right)^2 = k$

$k^2 + \frac{1}{2}k + \frac{1}{16} = k$

$k^2 - \frac{1}{2}k + \frac{1}{16} = 0$

$\left(k-\frac{1}{4}\right)^2 = 0$

따라서, $k = \frac{1}{4} = 0.25$

----------[10점]

1-2.

[풀이]

확률변수 X**가 정규분포** $\mathrm{N}(6,2^2)$**을 따르므로 확률변수** $Z = \frac{X-6}{2}$**은 표준정규분포** $\mathrm{N}(0,1)$**을 따른다.**

$$\sum_{n=1}^{5} \mathrm{P}(X \le 2n) = \sum_{n=1}^{5} \mathrm{P}\left(Z \le \frac{2n-6}{2}\right) = \sum_{n=1}^{5} \mathrm{P}(Z \le n-3)$$

$$= \mathrm{P}(Z \le -2) + \mathrm{P}(Z \le -1) + \mathrm{P}(Z \le 0) + \mathrm{P}(Z \le 1) + \mathrm{P}(Z \le 2)$$

(여기서, 표준정규분포의 대칭성을 이용하여)

$$= \mathrm{P}(Z \ge 2) + \mathrm{P}(Z \ge 1) + \mathrm{P}(Z \le 0) + \mathrm{P}(Z \le 1) + \mathrm{P}(Z \le 2)$$

$$= \{\mathrm{P}(Z \ge 2) + \mathrm{P}(Z \le 2)\} + \{\mathrm{P}(Z \ge 1) + \mathrm{P}(Z \le 1)\} + \mathrm{P}(Z \le 0)$$

$$= 1 + 1 + 0.5$$

$$= 2.5 = \frac{5}{2}$$

따라서, $\frac{p}{q} = \frac{5}{2}$**이므로** $p+q = 5+2 = 7$**.**

----------[15점]

1-3.

[풀이]

크기가 n**인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균의 값을** $\overline{x}$**라 하자. 모표준편차** 0.5**이므로 모평균** m**에 대한 신뢰도** 99%**인 신뢰구간은 다음과 같다.**

$$\overline{x} - 2.58 \times \frac{0.5}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x} + 2.58 \times \frac{0.5}{\sqrt{n}}$$

이 때, $a \le m \le b$**에서**

$b - a = 2 \times 2.58 \times \frac{0.5}{\sqrt{n}}$ **이므로**

$$2 \times 2.58 \times \frac{0.5}{\sqrt{n}} \le 0.258$$

$$\sqrt{n} \ge 10$$

양변을 제곱하면 $n \ge 100$

따라서, 자연수 n**의 최솟값은** 100**이다.**

----------[15점]

[수리논술 오전 문제2]

[문제 2] 다음 제시문 〈가〉와 〈나〉를 읽고 물음에 답하시오.

〈가〉 합성함수의 미분법

두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 각각 u, x에 대하여 미분가능하면 합성함수 $y=(f\circ g)(x)=f(g(x))$도 x에 대하여 미분 가능하고, 그 도함수는 다음과 같다.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

〈나〉 $f(x)$와 $g(x)$는 실수 전체 집합에서 미분가능한 함수이고 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다. 따라서 $f(x)$와 $g(x)$는 다음 성질을 만족한다.

① $(f\circ g)(x)=f(g(x))=x$, $(g\circ f)(x)=g(f(x))=x$.

② 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)g'(x)>0$ 이다.

2-1. 제시문 〈나〉의 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 $g(2)=1$일 때, $f(1)f'(1)g'(2)$의 값을 구하시오. **[15점]**

2-2. 제시문 〈나〉의 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 $g(2)=1$이고, $g(5)=5$일 때,

정적분 $\int_1^5 \frac{1}{[g'(f(x))]^2 f'(x)}dx$의 값을 구하시오. **[15점]**

1. 출제 의도

고교수학의 핵심개념인 역함수의 성질, 합성함수의 성질 및 미분, 정적분 등의 내용을 잘 숙지하고 있고 이를 매우 추상적으로 주어진 경우에도 적용 할 수 있는 능력이 있는지를 평가한다.

2. 문항 해설

2-1. 매우 추상적으로 주어진 식 속에 숨겨진 역함수와 합성함수의 미분개념을 찾아내 이를 사용하여 합성함수의 도함수 값을 구하는 문제이다.

2-2. 합성함수의 미분과 역함수의 성질을 이용하여 추상적으로 주어진 함수의 정적분 값을 구하는 문제이다.

3. 채점 기준 및 예시 답안 혹은 정답

2-1.

[풀이]

$f(g(x))=x$이므로 $[f(g(x))]^2=x^2$이다.

양변을 미분하면 제시문 〈가〉의 합성함수의 미분법에 의해,

$$2f(g(x))\cdot f'(g(x))g'(x)=2x$$

----------[10점]

양변에 $x=2$를 대입하면

$$2f(1)f'(1)g'(2)=4$$
$$f(1)f'(1)g'(2)=2.$$

----------[15점]

2-2.

[풀이]

$g(f(x))=x$이므로 제시문 〈가〉의 합성함수의 미분법에 의해,

$$\frac{1}{[g'(f(x))]^2f'(x)}=\frac{f'(x)}{[g'(f(x))f'(x)]^2}=f'(x).$$

----------[5점]

그러므로 $\int_1^5\frac{1}{[g'(f(x))]^2f'(x)}dx=\int_1^5\frac{f'(x)}{[g'(f(x))\cdot f'(x)]^2}dx=\int_1^5 f'(x)dx=f(5)-f(1).$

----------[10점]

그런데 $g(2)=1$, $g(5)=5$이므로 $f(5)=5$, $f(1)=2$.

따라서 구하는 정적분의 값은 3.

----------[15점]

[수리논술 오전 문제3]

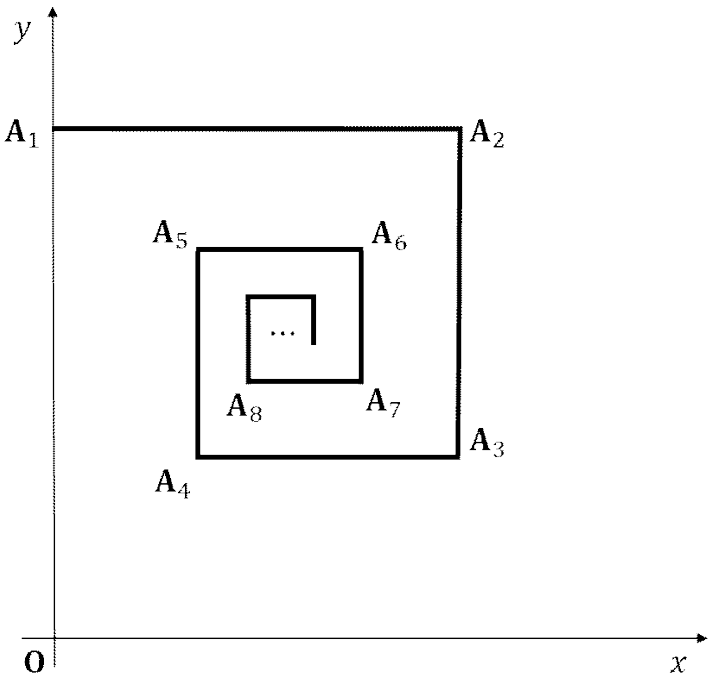
[문제 3] 다음 제시문 〈가〉와 〈나〉를 읽고 물음에 답하시오.

〈가〉 좌표평면 위의 점 $\mathrm{A_n}\,(\mathrm{n}=1, 2, 3, \cdots)$은 그림과 같이 주어지고 다음 규칙을 만족한다.

① 점 $\mathrm{A_1}$의 좌표는 $(0,\ 1)$이다.

② 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$은 선분 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{A}_{n+2}$와 수직이다.

③ $\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{A}_{n+2}} = r \times \overline{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}}$ 이며 $0 < r < 1$이다.



〈나〉 첫째항이 a 공비가 p인 등비급수는 $|p|<1$일 때 수렴하고 그 합은 $\frac{a}{1-p}$이다.

3-1. 제시문 〈가〉에서 점 $\mathrm{A_n}$의 좌표를 $(x_n,\ y_n)$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} x_n$과 $\lim_{n\to\infty} y_n$을 r로 나타내시오. **[10점]**

3-2. 제시문 〈가〉에 주어진 그림에서 y축과 평행한 선분 $\mathrm{A}_{2n}\mathrm{A}_{2n+1}$을 y축 중심으로 회전시켜 생기는 원기둥 옆면의 겉넓이를 S_n이라 하자. $r=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값을 구하시오. **[20점]**

1. 출제 의도

본 문제는 좌표평면 상의 점들의 좌표를 평면벡터와 좌표와의 대응관계를 이용해 제시문에 주어진 조건을 만족하도록 구할 수 있는지, 그리고 결과식에 나타나 있는 등비수열의 규칙성을 읽어내고 첫째항과 공비를 찾아 제시문에 주어진 등비급수의 합 공식을 써서 질문에 답할 수 있는지를 평가한다.

3-1. 평면 상의 점들의 좌표를 평면벡터와 대응시켜 주어진 조건을 이용해 구할 수 있는지, 좌표 표현식에 나타나 있는 등비급수의 첫째항과 공비를 읽어내 극한을 구할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

3-2. 원기둥의 표면적의 합을 구하는 식을 만들 수 있는지, 여러 등비급수가 복합적으로 엮여져 있는 경우에도 등비급수 공식을 잘 활용할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

2. 문항 해설

교과과정에서 배운 평면벡터와 좌표와의 대응관계를 써서 제시문에 주어진 조건들을 순차적으로 적용해 좌표 표현식들을 구한 뒤, 식들에 숨겨져 있는 규칙성을 역시 교과과정에서 배운 수열의 개념과 연관해 파악해내고, 가장 간단한 종류의 수열인 등비수열과 등비수열의 모든 항들의 합인 등비급수를 잘 이해하고 활용할 수 있는지를 평가하기 위해 출제된 문제이다. 그리고, 공비가 무리수로 주어졌을 때 이차방정식의 해라는 점을 인지하여 복잡한 계산을 피해 답을 도출할 수 있는지도 평가한다. 등비급수에서는 첫째항과 공비를 읽어내는 것이 매우 중요하며 제시문에 주어지지 않은 조건들을 답을 쉽게 얻기 위해 임의로 가정하는 것은 감점 요인이 된다. 아울러 답안 작성시 제시문을 잘 활용하는지, 또한 답안을 논리적으로 작성하는지도 평가한다.

3. 채점 기준 및 예시 답안 혹은 정답

3-1.

[풀이]

점 A_1의 좌표가 $(0,1)$, 점 A_2의 좌표가 (x_2, y_2)이므로 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}_1} = (0, 1)$,

벡터 $\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2} = (x_2, y_2 - 1)$이다.

$\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}$를 벡터 $\vec{a}$라 하면, 벡터 $\vec{b} = (y_2 - 1, -x_2)$는 $\vec{a}$와 수직이고 $|\vec{b}| = |\vec{a}|$.

점 A_3의 좌표가 (x_3, y_3)이므로 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3} = (x_3 - x_2, y_3 - y_2)$는 제시문 〈가〉의

규칙에 의해 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}$에 수직이므로 벡터 $\vec{b}$에 평행하고 크기가 r배 작아진다.

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3} = r\,\vec{b}$이다.

점 A_3의 좌표 (x_3, y_3)은 다음과 같이 벡터합을 이용해 구할 수 있다.

$$(x_3, y_3) = \overrightarrow{\mathrm{OA}_3} = \overrightarrow{\mathrm{OA}_1} + \overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2} + \overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3} = (0, 1) + (x_2, y_2 - 1) + r(y_2 - 1, -x_2)$$
$$= (x_2 + r(y_2 - 1), y_2 - rx_2)$$

마찬가지로, 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4} = (x_4 - x_3, y_4 - y_3)$는 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3}$에 수직,

즉 $\vec{a}$와 반대 방향이고 크기는 다시 r배 더 작아지므로

$\overrightarrow{\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4} = -r^2\,\vec{a}$이다. 따라서 점 A_4의 좌표 (x_4, y_4)는

$$(x_4, y_4) = \overrightarrow{\mathrm{OA}_4} = \overrightarrow{\mathrm{OA}_3} + \overrightarrow{\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4} = (x_2 + r(y_2 - 1), y_2 - rx_2) - r^2(x_2, y_2 - 1)$$
$$= (x_2 + r(y_2 - 1) - r^2 x_2,\ y_2 - rx_2 - r^2(y_2 - 1)).$$

같은 방법으로 $\overrightarrow{\mathrm{A}_4\mathrm{A}_5} = -r^3\,\vec{b}$이 되고, 점 A_5의 좌표 (x_5, y_5)는

$(x_5,\ y_5)=\overrightarrow{\mathrm{OA}_5}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_4}+\overrightarrow{\mathrm{A}_4\mathrm{A}_5}=(x_2+r(y_2-1)-r^2x_2,\ y_2-rx_2-r^2(y_2-1))-r^3(y_2-1,\ -x_2)$

$=(x_2+r(y_2-1)-r^2x_2-r^3(y_2-1),\ y_2-rx_2-r^2(y_2-1)+r^3x_2).$

----------[5점]

$\overrightarrow{\mathrm{A}_{2n-1}\mathrm{A}_{2n}}=(-1)^{n-1}r^{2n-2}\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{A}_{2n}\mathrm{A}_{2n+1}}=(-1)^{n+1}r^{2n-1}\vec{b}$ 임을 써서 위의 과정을 반복하면, 점 A_n의 좌표 $(x_n,\ y_n)$은 $n\to\infty$의 극한에서 등비급수가 포함된 식으로 나타내어지며 그 극한값은 다음과 같다.

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x_2(1-r^2+r^4-\cdots)+(y_2-1)r(1-r^2+r^4-\cdots)=\frac{x_2+(y_2-1)r}{1+r^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}y_n=1+(y_2-1)(1-r^2+r^4-\cdots)-x_2r(1-r^2+r^4-\cdots)=\frac{r^2-x_2r+y_2}{1+r^2}$$

----------[10점]

(별해)

점 A_1, A_2의 좌표가 각각 $(0,1)$, $(x_2,\ y_2)$이다. 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$의 길이를 a라 놓자.

($a=\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}=\sqrt{(x_2)^2+(y_2-1)^2}$)

점 A_2에서, 점 A_1을 지나 x축과 평행한 직선에 내린 수선의 발을 H_2라 하면, 삼각형 $\mathrm{A_1A_2H_2}$는 세 변의 길이가 a, $|x_2|$, $|y_2-1|$인 직각삼각형이다. 제시문 〈가〉에서 $\overline{\mathrm{A_2A_3}}=ar$이다. 점 A_3에서, 점 A_2를 지나 y축과 평행한 직선에 내린 수선의 발을 H_3라 하면, 삼각형 $\mathrm{A_2A_3H_3}$은 세 변의 길이가 ar, $|y_2-y_3|$, $|x_3-x_2|$인 직각삼각형이고 삼각형 $\mathrm{A_1A_2H_2}$과 닮은꼴이다. 닮은꼴 삼각형 사이의 비례식을 써서 좌표들 사이의 관계식을 구하면 $y_2-y_3=ar\cdot\frac{x_2}{a}$, $x_3-x_2=ar\cdot\frac{y_2-1}{a}$이므로

점 A_3의 좌표는 $(x_3,\ y_3)=(x_2+r(y_2-1),\ y_2-rx_2)$이 된다.

마찬가지 방법으로 점 A_4의 좌표를 구하면, $x_3-x_4=ar^2\cdot\frac{x_2}{a}$, $y_3-y_4=ar^2\cdot\frac{y_2-1}{a}$에서

$(x_4,\ y_4)=(x_2+r(y_2-1)-r^2x_2,\ y_2-rx_2-r^2(y_2-1))$.

점 A_5의 좌표는 $x_4-x_5=ar^3\cdot\frac{y_2-1}{a}$, $y_5-y_4=ar^3\cdot\frac{x_2}{a}$에서

$(x_5,\ y_5)=(x_2+r(y_2-1)-r^2x_2-r^3(y_2-1),\ y_2-rx_2-r^2(y_2-1)+r^3x_2)$.

----------[5점]

이 과정을 반복하면, 점 A_n의 좌표 $(x_n,\ y_n)$은 $n\to\infty$의 극한에서 등비급수가 포함된 식으로 나타내어지며 극한값은 다음과 같다.

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x_2(1-r^2+r^4-\cdots)+(y_2-1)r(1-r^2+r^4-\cdots)=\frac{x_2+(y_2-1)r}{1+r^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}y_n=1+(y_2-1)(1-r^2+r^4-\cdots)-x_2r(1-r^2+r^4-\cdots)=\frac{r^2-x_2r+y_2}{1+r^2}$$

----------[10점]

3-2.

[풀이]

선분 $\mathrm{A}_{2n}\mathrm{A}_{2n+1}$가 y축과 평행하려면 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$가 y축에 수직인 경우에 해당한다.

($a = \overline{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2} = |x_2|$)

선분 $\mathrm{A_2A_3}$에 의한 원기둥의 옆 면적 $= 2\pi a \cdot ar = 2\pi\, a^2 r$

선분 $\mathrm{A_4A_5}$에 의한 원기둥의 옆 면적 $= 2\pi(a - ar^2) \cdot ar^3 = 2\pi\, a^2(r^3 - r^5)$

선분 $\mathrm{A_6A_7}$에 의한 원기둥의 옆 면적 $= 2\pi\,(a - ar^2 + ar^4) \cdot ar^5 = 2\pi\, a^2(r^5 - r^7 + r^9)$

선분 $\mathrm{A_8A_9}$에 의한 원기둥의 옆 면적

$$= 2\pi(a - ar^2 + ar^4 - ar^6) \cdot ar^7 = 2\pi\, a^2(r^7 - r^9 + r^{11} - r^{13})$$

선분 $\mathrm{A_{10}A_{11}}$에 의한 원기둥의 옆 면적

$$= 2\pi(a - ar^2 + ar^4 - ar^6 + ar^8) \cdot ar^9 = 2\pi\, a^2(r^9 - r^{11} + r^{13} - r^{15} + r^{17})$$

선분 $\mathrm{A_{12}A_{13}}$에 의한 원기둥의 옆 면적

$$= 2\pi(a - ar^2 + ar^4 - ar^6 + ar^8 - ar^{10}) \cdot ar^{11} = 2\pi\, a^2(r^{11} - r^{13} + r^{15} - r^{17} + r^{19} - r^{21})$$

----------**[5점]**

따라서 각 면적을 모두 더하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} S_n = 2\pi a^2\{\ \ & r \\ & + r^3 - r^5 \\ & + r^5 - r^7 + r^9 \\ & + r^7 - r^9 + r^{11} - r^{13} \\ & + r^9 - r^{11} + r^{13} - r^{15} + r^{17} \\ & + r^{11} - r^{13} + r^{15} - r^{17} + r^{19} - r^{21} \\ & + \cdots\cdots \qquad\qquad\qquad\qquad \}\end{aligned}$$

이 식에서 세로 줄의 항들이 각각 등비급수를 이루는 것을 알 수 있다. 제시문 〈나〉를 써서 합을 구하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} S_n &= 2\pi\, a^2\{r\,(1 + r^2 + r^4 + \cdots) - r^5(1 + r^2 + r^4 + \cdots) + r^9(1 + r^2 + r^4 + \cdots) - r^{13}(1 + r^2 + r^4 + \cdots) + \cdots\} \\ &= 2\pi\, a^2 r\,(1 + r^2 + r^4 + \cdots)(1 - r^4 + r^8 - \cdots) \\ &= \frac{2\pi\, a^2 r}{(1 + r^4)(1 - r^2)}\end{aligned}$$

----------**[15점]**

$r = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$은 이차방정식 $r^2 + r - 1 = 0$의 해이다.

$r^2 = 1 - r$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = 2\pi\, a^2 \frac{r}{3(1 - r) \cdot r} = \frac{2\pi\, a^2}{3} \frac{1}{1 - r} = \frac{2\pi\,(x_2)^2}{3} \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

----------**[20점]**