[문항정보]

	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	2018 온라인 모의논술고사	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	의학계(수학)	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학II, 미적분I
	핵심개념 및 용어	수열의 합, 급수의 수렴과 발산, 등비급수의 활용
예상 소요 시간	60분	

문항 및 제시문

Ⅰ. 다음 제시문과 그림을 참조하여 논제에 답하시오. (60점)

[가] 일반적으로 수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때 a_n의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면, 수열 $\{a_n\}$은 α에 수렴한다고 한다. 이때 α를 수열 $\{a_n\}$의 극한값 또는 극한이라고 하며, 이것을 기호로

$$\lim_{n\ \infty} a_n = \alpha \text{ 또는 } n \quad \infty \text{일 때 } a_n \to \alpha$$

와 같이 나나낸다. 여기서 ∞는 한없이 커지는 상태를 나타내는 기호로 무한대라고 읽는다.
수열이 수렴하지 않을 때, 그 수열은 발산한다고 한다.

[나] 수열 $\{a_n\}$의 각 항을 차례로 덧셈 기호 $+$를 사용하여 연결한 식

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

을 급수라고 하며, 이것을 기호 $\sum$를 사용하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 같이 나타낸다. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$에서 첫째항부터 제n항까지의 합

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

를 이 급수의 제n항까지의 부분합이라고 한다. 이 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$이 일정한 값 S에 수렴할 때, 즉 $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = S$일 때, 이 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$는 S에 수렴한다고 한다. 이때 S를 급수의 합이라 하고, 기호로

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = S \quad \text{또는} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

와 같이 나타낸다. 한편 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$이 발산할 때, 이 급수는 발산한다고 한다.

[다] 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구해 보자. 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

이고, 양변에 r을 곱하면

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

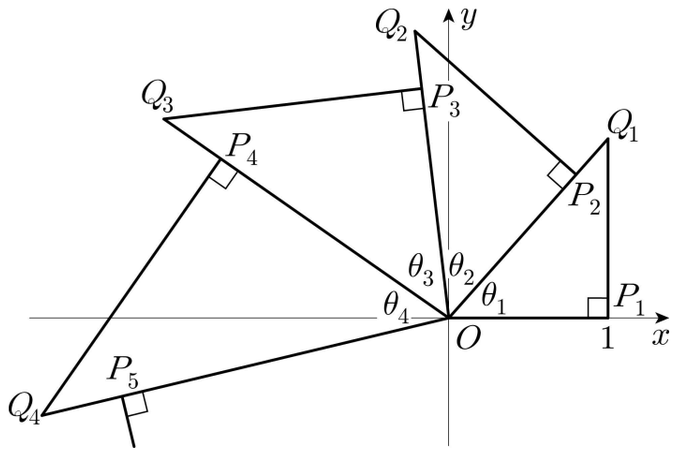
이다. (1)에서 (2)를 변끼리 빼면

$$(1-r)S_n = a - ar^n = a(1-r^n)$$

이므로 S_n은 다음과 같다.

$r \neq 1$일 때, $\quad S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

$r = 1$일 때, (1)에서 $\quad S_n = \underbrace{a + a + a + \cdots + a}_{n} = na$



[그림 1]

[그림 1]과 같이 선분 OP_1의 길이 $\overline{OP_1}$는 1이고, 모든 자연수 n에 대하여 $\angle OP_nQ_n$은 직각이고, 점 P_{n+1}은 선분 OQ_n에 놓여 있는 좌표평면의 점 P_n과 점 Q_n을 생각하자. (단, $n \geq 1$) 여기서, 기호의 편의를 위하여, $\angle P_nOQ_n = \theta_n$, $\overline{OP_{n+1}}/\overline{OQ_n} = \alpha_n$, $\overline{OP_n} = p_n$, $\overline{OQ_n} = q_n$, $\overline{P_nQ_n} = t_n$이라고 표시하자.

[논제 I-1] **θ_n이 모두 상수 θ로 일정하고 α_n도 모두 상수 α로 일정할 때, p_n을 θ, α, n에 대한 식으로 나타내고, 그 근거를 논술하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $0 < \alpha$) (5점)**

[논제 I-2] **모든 자연수 n에 대하여 $\alpha_n = \frac{n}{n+1}$이고 $t_n = \frac{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}{n}$일 때, $\sin^2\theta_n$을 n에 대한 식으로 나타내시오. 또한 $\lim_{n\ \infty} \sin^2\theta_n$의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 값을 구하고, 그 근거를 논술하시오. (20점)**

[논제 I-3] **모든 자연수 n에 대하여 α_n이 상수 $\sqrt{a}$로 일정하고, 어떤 상수 r에 대하여 t_n이 $\sqrt{r^n}$일 때, p_n^2을 n에 대한 식으로 나타내고, 그 근거를 논술하시오. (단, $r > 0$, $a > 0$) (20점)**

[논제 I-4] **[논제 I-3]에서 구한 식을 이용하여 $\lim_{n\to\infty} \sin^2\theta_n$이 수렴하는 a와 r의 범위를 구하고, 그 근거를 논술하시오. (15점)**

의도

본 문제는 도형이 어떤 규칙적인 방법으로 순차적으로 만들어질 때 생성되는 수열에 대하여 그 규칙성을 수학식으로 적절하게 표현하여 수열의 연속 항들의 관계를 밝히고 이를 이용하여 일반항의 식을 구할 수 있고 그 극한의 수렴, 발산 여부를 판단할 수 있는지를 평가하고자 한다.

I-1. 순차적으로 만들어지는 도형의 선분들의 길이로 구성된 수열을 삼각비 성질의 기본적인 적용으로 등비수열로 나타낼 수 있는지를 평가하는 문제이다.

I-2. 다른 규칙이 주어졌을 때 적절한 계산을 통하여 수열의 일반항을 유추하고 그 극한을 찾을 수 있는지를 평가하는 문제이다.

I-3. 또 다른 규칙이 주어졌을 때 등비수열의 합 공식을 적용하여 수열의 일반항을 모든 경우에 다 찾을 수 있는지를 평가하는 문제이다.

I-4. 등비수열이 포함된 수열의 극한의 수렴, 발산을 모든 경우에 대하여 판별할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

근거

1. 근거

및 제시문		관련 성취기준
제시문 가	교육과정*	**[I] – (가) 수열의 극한 – ① 수열의 극한** ① 수열의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이름 판별할 수 있다. ② 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준**	**[미적분I] – (가) 수열의 극한 – ① 수열의 극한** 미적1111. 수열의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이름 판별할 수 있다. 미적1112. 수열의 극한에 관한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.
제시문 나	교육과정	**[미적분I] – (가) 수열의 극한 – ② 급수** ① 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.
	성취기준·성취수준	**[미적분I] – (가) 수열의 극한 – ② 급수** 미적1121. 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.
제시문 다	교육과정	**[수학II] – (다) 수열 – ① 등차수열과 등비수열** ③ 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	**[수학II] – (다) 수열 – ① 등차수열과 등비수열** 수학2313-1. 등비수열의 뜻을 알고, 일반항을 구할 수 있다. 수학2313-2. 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
논제 1-1	교육과정	**[중학교] – (마) 기하 – ⑧ 피타고라스 정리** ② 피타고라스 정리를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다. **[중학교] – (마) 기하 – ⑨ 삼각비** ② 삼각비를 활용하여 다양한 실생활 문제를 해결할 수 있다. **[수학II] – (다) 수열 – ① 등차수열과 등비수열** ③ 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	**[중학교] – (마) 기하 – ⑧ 피타고라스 정리** 수95082. 피타고라스 정리를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다. **[중학교] – (마) 기하 – ⑨ 삼각비** 수95092. 삼각비를 활용하여 다양한 실생활 문제를 해결할 수 있다. **[수학II] – (다) 수열 – ① 등차수열과 등비수열** 수학2313-1. 등비수열의 뜻을 알고, 일반항을 구할 수 있다.
논제 1-2	교육과정	**[수학II] – (다) 수열 – ② 수열의 합** ② 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. **[미적분I] – (가) 수열의 극한 – ① 수열의 극한** ① 수열의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이름 판별할 수 있다. ② 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	**[수학II] – (다) 수열 – ② 수열의 합** 수학2322. 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. **[미적분I] – (가) 수열의 극한 – ① 수열의 극한** 미적1111. 수열의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이름 판별할 수 있다.

문항 및 제시문		관련 성취기준
		미적1112. 수열의 극한에 관한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.
논제 I-3	교육과정	**[수학II] – (다) 수열 – ① 등차수열과 등비수열** ③ 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	**[수학II] – (다) 수열 – ① 등차수열과 등비수열** 수학2313-1. 등비수열의 뜻을 알고, 일반항을 구할 수 있다. 수학2313-2. 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
논제 I-4	교육과정	**[미적분I] – (가) 수열의 극한 – ② 급수** ① 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다. ② 등비급수의 뜻을 알고, 그 합을 구할 수 있다. ③ 등비급수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.
	성취기준·성취수준	**[미적분I] – (가) 수열의 극한 – ② 급수** 미적1121. 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다. 미적1122. 등비급수의 뜻을 알고, 그 합을 구할 수 있다. 미적1123. 등비급수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

*: 고시 제 2011-361호 [별책 8] "수학과 교육과정"

**: 교육과학기술부 발간 「2009 개정 교육과정에 따른 성취기준·성취수준: 고등학교 수학」(교육과학기술부 발간등록번호 11-1341000-002322-01)

2. 자료 출처

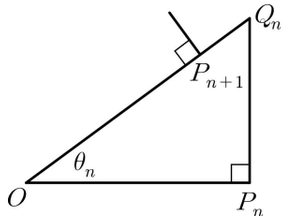
참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분I	황선욱 외	좋은책 신사고	2016	13 14
	미적분I	신항균 외	지학사	2015	30
	수학II	황선욱 외	좋은책 신사고	2016	112
기타					

문항 해설

수열과 급수는 극한과 구분적분법 등의 개념 정립을 위한 핵심적인 수학적 도구이고, 수렴, 발산 여부의 판별은 그 중에서 가장 중요한 부분이다. 본 문제의 주요 내용은 「중학수학」의 '기하', 「수학II」의 '수열', 「미적분I」의 '수열의 극한' 단원에서 다루어진다. 본 문항을 통하여 학생들이 제시문을 정확하게 읽고 적절히 활용하여 도형이 어떤 규칙적인 방법으로 순차적으로 만들어질 때 생성되는 수열의 일반항을 구할 수 있는지를 평가한다. 또한, 수열의 극한의 수렴, 발산 여부를 판단할 수 있는지와 그 풀이 과정을 체계적이고 논리적으로 논술할 수 있는지를 평가한다.

답안

I-1. 그림과 같은 직각삼각형 $\triangle P_nOQ_n$에서 다음의 식을 알 수 있다.



$\overline{OQ_n}^2 = \overline{OP_n}^2 + \overline{P_nQ_n}^2$, , $q_n^2 = p_n^2 + t_n^2$

$\overline{OP_{n+1}} = \alpha_n \overline{OQ_n}$, 즉, $p_{n+1} = \alpha_n q_n$

$\overline{OP_{n+1}}^2 = \alpha_n^2 \overline{OP_n}^2 + \alpha_n^2 \overline{P_nQ_n}^2$, 즉, $p_{n+1}^2 = (\alpha_n p_n)^2 + (\alpha_n t_n)^2$

$\angle P_nOQ_n = \theta$이므로 $q_n = \dfrac{p_n}{\cos\theta}$이다. 한편, $\alpha_n = \alpha$이므로, $p_{n+1} = \alpha q_n = \left(\dfrac{\alpha}{\cos\theta}\right)p_n$이 되어 p_n이 공비 $\dfrac{\alpha}{\cos\theta}$이고 첫째항이 $p_1 = \overline{OP_1} = 1$인 등비수열임을 알 수 있다. 이 등비수열의 일반항은 $p_n = \left(\dfrac{\alpha}{\cos\theta}\right)^{n-1}$이다.

I-2. 모든 자연수 n에 대하여 $\alpha_n = \dfrac{n}{n+1}$이고 $t_n = \dfrac{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}{n}$이므로, 식 $p_{n+1}^2 = (\alpha_n p_n)^2 + (\alpha_n t_n)^2$으로부터 $p_{n+1}^2 = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2 p_n^2 + \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2 - \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^2$을 얻는다. 이 항등식으로부터 p_{n+1}^2을 구하는 것은 다음과 같은 두 가지 방법이 있다.

[방법 1] 이 식의 양변에 $(n+1)^2$을 곱하고 n^2을 오른쪽으로 이항하면,

$$(n+1)^2 p_{n+1}^2 - n^2 = n^2 p_n^2 - (n-1)^2$$

을 얻는다. 이 항등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립하므로, 수열 $(n+1)^2 p_{n+1}^2 - n^2$은 n에 상관없이 값이 일정함을 알 수 있다. 특히 $n=1$일 때의 값과 같아지게 되므로

$$(n+1)^2 p_{n+1}^2 - n^2 = 1^2 p_1^2 - (1-1)^2 = 1.$$

이를 정리하여 $p_{n+1}^2 = \dfrac{n^2+1}{(n+1)^2}$을 구할 수 있다.

[방법 2] 위 항등식에 n의 값을 1부터 순차적으로 대입하면,

$p_1^2 = 1$

$p_2^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 (1)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{0}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

$p_3^2 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^2$

$p_4^2 = \left(\dfrac{3}{4}\right)^2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{4}\right)^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 - \left(\dfrac{2}{4}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{4}\right)^2$

$p_5^2 = \left(\dfrac{4}{5}\right)^2\left(\dfrac{1}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{4}{5}\right)^2\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{4}{5}\right)^2$

$\vdots$

$p_{n+1}^2 = \left(\dfrac{1}{n+1}\right)^2 + \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2 = \dfrac{n^2+1}{(n+1)^2}$을 유추할 수 있다.

이렇게 구한 p_{n+1}^2을 이용하여 $q_n^2 = \dfrac{1}{\alpha_n^2} p_{n+1}^2 = \dfrac{n^2+1}{n^2}$이고, $\sin^2\theta_n = \dfrac{t_n^2}{q_n^2} = \dfrac{2n-1}{n^2+1}$을 구할 수 있다. $n \to \infty$일 때, 그 극한은 $\lim_{n\to\infty} \sin^2\theta_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+1} = \dfrac{0}{1} = 0$으로 수렴한다.

I-3. 모든 자연수 n에 대하여 $\alpha_n = \sqrt{a}$이고 $t_n = \sqrt{r^n}$이므로, 식 $p_{n+1}^2 = (\alpha_n p_n)^2 + (\alpha_n t_n)^2$으로부터 식 $p_{n+1}^2 = a p_n^2 + a r^n$을 얻는다. 이를 이용하여 p_n^2을 구하는 것은 다음과 같은 두 가지 방법이 있다.

[방법 1] 위 항등식에 n의 값을 1부터 순차적으로 대입하면,

$p_1^2 = 1$

$p_2^2 = a + ar$

$p_3^2 = a^2 + a^2 r + ar^2$

$p_4^2 = a^3 + a^3 r + a^2 r^2 + ar^3$

$p_5^2 = a^4 + a^4 r + a^3 r^2 + a^2 r^3 + ar^4$

$\vdots$

$p_n^2 = a^{n-1} + a^{n-1} r + a^{n-2} r^2 + a^{n-3} r^3 + \cdots + ar^{n-1}$을 유추할 수 있다.

여기서, $a^{n-1} r + a^{n-2} r^2 + a^{n-3} r^3 + \cdots + ar^{n-1}$는 첫째항이 $a^{n-1} r$, 공비 r/a인 등비수열의 $n-1$번째 합이므로

$$p_n^2 = \begin{cases} a^{n-1} + \dfrac{a^{n-1} r\left((r/a)^{n-1} - 1\right)}{r/a - 1}, & r/a \neq 1 \\ a^{n-1} + \underbrace{a^n + a^n + \cdots + a^n}_{n-1}, & r/a = 1 \end{cases} = \begin{cases} a^{n-1} + \dfrac{ar^n - a^n r}{r-a}, & r \neq a \\ a^{n-1} + (n-1)a^n, & r = a \end{cases}$$

[방법 2] 먼저 $r = a$일 때, $p_{n+1}^2 = a p_n^2 + a^{n+1}$이 되고 a^{n+1}을 양변에 나누면 $\dfrac{p_{n+1}^2}{a^{n+1}} = \dfrac{p_n^2}{a^n} + 1$을 얻는다. 이로부터 수열 $\dfrac{p_n^2}{a^n}$이 첫째항이 $\dfrac{1}{a}$, 공차가 1인 등차수열임을 알 수 있으므로, $\dfrac{p_n^2}{a^n} = \dfrac{1}{a} + (n-1)$과 $p_n^2 = a^{n-1} + (n-1)a^n$임을 밝힐 수 있다.

한편, $r \neq a$일 때, $p_{n+1}^2 = a p_n^2 + ar^n$이 $p_{n+1}^2 - \dfrac{ar^{n+1}}{r-a} = a\left(p_n^2 - \dfrac{ar^n}{r-a}\right)$로 바뀌고, 수열

$p_n^2 - \dfrac{ar^n}{r-a}$ 첫째항이 $1-\dfrac{ar}{r-a}$, 공비가 a인 등비수열임을 알 수 있다. 이로부터 $p_n^2 - \dfrac{ar^n}{r-a} = \left(1-\dfrac{ar}{r-a}\right)a^{n-1}$을 얻고 $p_n^2 = a^{n-1} + \dfrac{ar^n - a^n r}{r-a}$임을 밝힐 수 있다. 이는 [방법 1]의 결과와 같다.

I-4. [논제 I-3]의 답으로부터, $q_n^2 = \dfrac{1}{a}p_{n+1}^2 = \begin{cases} a^{n-1} + \dfrac{r^{n+1} - a^n r}{r-a}, & r \neq a \\ a^{n-1}(1+an), & r = a \end{cases}$

$$\sin^2\theta_n = \frac{t_n^2}{q_n^2} = \begin{cases} \dfrac{r^n}{a^{n-1} + \dfrac{r^{n+1} - a^n r}{r-a}}, & r \neq a \\ \dfrac{r^n}{a^{n-1}(1+an)}, & r = a \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{(r-a)r^n}{a^{n-1}(r-a-ar) + r^{n+1}}, & r \neq a \\ \dfrac{a}{1+an}, & r = a \end{cases}$$

먼저, $r = a$일 때, 극한 $\lim_{n\ \infty} \sin^2\theta_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{a}{1+an} = 0$으로 수렴한다.

$r > a$일 때, $0 < \dfrac{a}{r} < 1$이고 $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{a}{r}\right)^n = 0$이다. 이때,

$$\lim_{n\to\infty} \sin^2\theta_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(r-a)r}{\left(\dfrac{a}{r}\right)^{n-1}(r-a-ar) + r^2} = \frac{(r-a)r}{r^2} = 1 - \frac{a}{r}$$ 으로 수렴한다.

$r < a$일 때, $0 < \dfrac{r}{a} < 1$이고 $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{r}{a}\right)^n = 0$이므로

$$\lim_{n\to\infty} \sin^2\theta_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(r-a)r\left(\dfrac{r}{a}\right)^{n-1}}{(r-a-ar) + r^2\left(\dfrac{r}{a}\right)^{n-1}} = \frac{0}{r-a-ar} = 0$$으로 수렴한다. 여기서, 분모 $r-a-ar$는 영이 될 수 없다. 왜냐하면, $r < a < (1+r)a$이므로, $r-(1+r)a < 0$이기 때문이다.

이를 종합하면 $\lim_{n\to\infty} \sin^2\theta_n$는 모든 $a > 0$, $r > 0$에 대하여 수렴함을 알 수 있다.

[문항정보]

	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	온라인 모의논술	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	의학계열(물리) / 논제 II	
입학 모집요강에 제시한 자격 기준 과목명	물리I/물리II	
출제 범위	과학과 교육과정 과목명	물리I/물리II
	핵심개념 및 용어	중력, 단진동, 관성법칙, 힘의 평형, 전기력
예상 소요 시간	60분	

문항 및 제시문

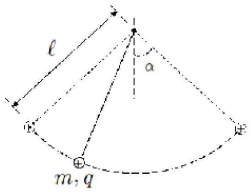
II. 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오. < 물리 >

[가] 물체에 작용하는 알짜힘이 0일 때 정지해 있던 물체는 계속 정지해 있고, 운동하던 물체는 일직선으로 등속 운동한다. 이를 뉴턴 운동 제1법칙 또는 관성 법칙이라고 한다.

[나] 진자가 왕복 운동할 때 진자의 위치에 따라 속도와 가속도의 크기, 방향이 계속 변한다. 진자의 가속도 방향은 알짜힘의 방향과 같으며, 진자에 작용하는 알짜힘은 중력과 장력의 합이다. 중력의 경우 진자가 어느 위치에 있던 크기가 항상 일정하며 방향도 아랫방향이지만, 장력은 진자의 위치에 따라 크기와 방향이 변한다.

[다] 길이가 ℓ인 실에 연결된 진자가 왕복 운동할 때 진자의 주기는 $2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$로 주어지며, 진자의 길이나 중력 가속도가 달라지면 주기도 변하게 된다. 중력가속도가 지구의 $\frac{1}{6}$인 달에서는 같은 길이의 진자라도 주기가 $\sqrt{6}$배가 된다. 달에서는 추시계가 약 2.4배 느리게 가는 것이다.

[라] 전기장은 크기와 방향을 갖는다. 그 크기는 전기장 내에 있는 $+q$의 전하가 받는 전기력을 q로 나눈 값이며, 전기장의 방향은 이 전하가 받는 힘의 방향과 같다. 즉, 전기장 속에 전하 $+q$를 놓았을 때 이 전하가 받는 전기력의 크기 F는 전기장의 세기 E와 $F=qE$의 관계를 만족한다.



[그림 1]

질량 m인 진자에 양의 전하 q가 대전되어 있다. 이 진자가 길이 ℓ인 실에 매달려 있고, 실의 끝은 지표면에 수직한 벽면의 한 점에 고정되어 있다. 벽면과 진자의 마찰은 없으며, 진자에 대전된 전하량 q는 변하지 않는다고 가정한다. 진자를 연직선에 비해 각도 α만큼 들어올려서 $t=0$인 순간부터 중력에 의해 진자가 최대 각도 α을 갖는 단진동을 시작하였다. 중력가속도는 g로 표시하고, 실이 끊어지지 않고 버틸 수 있는 힘의 최댓값은 $T_o=\frac{3}{2}mg\cos\alpha$이다.

[논제 II-1] **(1) $t=t_1$인 순간 공간상에 균일한 전기장 $\vec{E}$를 만들어서 $t\geq t_1$에서 공간상에 균일한 전기장 $\vec{E}$가 유지되도록 만들었다. 그 결과, 단진동을 하던 추는 $t\geq t_1$에서 움직임이 없는 정지 상태를 유지하였다. 정지해 있을 수 있는 추의 위치를 그림으로 표시하고, 그 근거를 논술하시오. (10점)**

(2) (1)번 논제에서 추를 정지하도록 만드는 균일한 전기장의 크기 $|\vec{E}|$는 여러 가지 값을 가질 수 있다. $|\vec{E}|$의 최솟값, $|\vec{E}|_{\min}$을 구하고 그 때 $\vec{E}$의 방향을 그림으로 표시하고, 그 근거를 논술하시오. (10점)

(3) (1)번 논제에서 추를 정지하도록 만드는 균일한 전기장의 크기 $|\vec{E}|$의 최댓값, $|\vec{E}|_{\max}$을 구하고 그 때 $\vec{E}$의 방향을 그림으로 표시하고, 그 근거를 논술하시오. (10점)

(4) (3)번 논제에서 주어진 $|\vec{E}|_{\max}$의 크기를 갖는 균일한 전기장에 의해 추는 정지한 상태에 있다. $t \geq t_2$ (단, $t_2 > t_1$)에서 전기장의 방향은 유지한 상태로 전기장의 세기를 절반으로 줄이면, 그 때부터 추가 새로운 단진동을 시작하도록 만들 수 있다. 이 단진동의 주기를 구하고, 그 근거를 논술하시오. (10점)

의도

물리 논제에서는 고등학교 물리 교과서에 설명된 지식의 이해를 바탕으로 과학 분야의 통합적인 사고능력과 물리 지식의 적용 능력을 측정하고자 하였다. 논제 II는 중력, 단진동, 관성 법칙, 힘의 평형, 전기력의 개념을 바르게 이해하고 그림을 사용하여 이해한 바를 효과적으로 표현할 수 있는가를 평가하는 문제이다.

출제 근거

1. 근거

교육과정	(고시번호) 1. 교육과학기술부 고시 제2009-41호 "고교 과학과 교육과정 해설서"
성취기준	1. 교육과정 문서 (1) 물리 II (191쪽) ② 물체에 작용하는 힘이 주어졌을 때 운동변화를 정량적으로 이해한다. **작용하는 알짜힘의 방향이 가속도의 방향과 같음**을 알게 하고, 속도의 변화로부터 가속도를 구하여 물체에 작용하는 알짜힘의 방향을 찾을 수 있게 함으로써 뉴턴의 운동법칙을 이해하게 한다. 등가속도 운동의 경우 일,운동에너지 정리를 정량적으로 이해하게한다. (2) 물리 II (192쪽) ⑥ 단진동의 의미와 진자의 주기에 영향을 주는 변인을 이해한다. **물체에 작용하는 힘의 크기가 변위의 크기에 비례하고 힘의 방향이 변위의 반대**일 때 일어나는 운동이 단진동임을 알게하고, 단진자의 속도에 대한 벡터 분석을 통하여 가속도 방향과 진자에 작용하는 알짜힘에 대해 알게 한다. 역학적 에너지 보존 법칙으로부터 위치에너지가 최대일 때 진자의 진폭은 최대이며, 평형점에서 운동에너지가 최대임을 알게 한다. 용수철 진자와 단진자의 주기에 영향을 주는 변인에 대해 이해하게 한다.

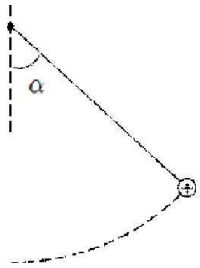
2. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	물리 I	곽성일 외	천재교육	2011	34
	물리 I	김영민 외	교학사	2011	43
	물리 II	김영민 외	교학사	2011	37,53
	물리 II	곽성일 외	천재교육	2011	54
	물리 I	김영민 외	교학사	2011	106
	물리 II	곽성일 외	천재교육	2011	125
기타					

문항 해설

제시문의 내용은 힘의 평형, 진자의 단진동, 단진동의 주기, 전기력을 기술한 것으로 고등학교 물리 교과서에서 발췌 및 편집하였다. 힘의 평형, 단진동, 주기, 전기력 등과 관련한 제시문을 이용하여 물리적 개념에 대한 이해와 논리적인 사고를 정리하고, 문항에서 요구하는 질문을 해결하는 능력을 필요로 한다.

예시 답안

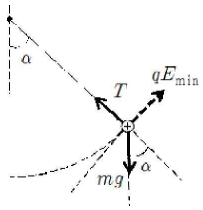


[그림 1]

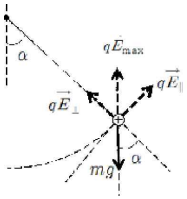
[논제 II-1](1) $t \geq t_1$에서 진자가 정지해 있기 위해서는, 전기장을 발생시키는 순간 진자가 이미 정지해 있어야하며, 정지 상태에서 힘의 평형을 이루도록 전기장을 생성하면 된다. 진자는 양쪽 최대 진폭으로 벌어진 위치에서 순간적으로 정지해 있으므로, 전기장을 발생시키는 시점은 진자가 최대 진폭에 위치해 있을 때이다. [그림 1]에 표시된 진자의 위치와 연직선에 대해 대칭되는 위치, 즉 최대 진폭일 때인 양 끝 두 위치에서 진자가 균일한 전기장에 의해 정지해 있을 수 있다.

(2) [그림 2]와 같이 진자가 오른쪽 최대 진폭에 위치해 있는 경우를 고려해 본다. 전기장이 생성되는 순간, 진자에 작용하는 중력과 장력을 단진동하는 진자가 지나는 궤적인 호에 접하는 성분($F_{\parallel}$)과 호에 수직한 성분($F_{\perp}$)으로 나누어 표시해 보면 [그림 2]와 같이 실선 화살표로 표시할 수 있고, $F_{\parallel} = mg\sin\alpha$, $F_{\perp} = mg\cos\alpha - T = 0$로 나타낼 수 있다. 이 힘의 성분들을 상쇄시키도록 $q|\vec{E}_{\parallel}| = mg\sin\alpha$인 균일한 전기장을 형성시키면 진자가 정지 상태를 유지한다. 하지만 $\vec{E}$가 장력의 반대 방향으로 실이 끊어지지 않게 하는 범위에서 0이 아닌 성분을 갖는 경우에도, 이에 맞춰서 장력이

증가하고 여전히 힘의 평형 상태를 유지할 수 있게 된다. 따라서 $|\vec{E}|$가 최솟값을 갖는 경우는 $\vec{E}$의 방향이 [그림2]와 같이 점선 화살표로 표시된 접선 성분만 가질 때이다. 그 크기는 $q|\vec{E}|_{\min} = mg\sin\alpha$이고, $|\vec{E}|_{\min} = \frac{mg\sin\alpha}{q}$ 이 된다. 진자가 연직선에 대해 대칭인 곳에 위치해 있을 때에도 같은 방식으로 생각할 수 있고, 그 때에 $|\vec{E}|_{\min} = \frac{mg\sin\alpha}{q}$, 전기장의 방향은 [그림2]에 표시된 방향에 대해 연직선에 대칭으로 표시된다.



[그림 2]



[그림 3]

(3) $|\vec{E}|_{\max}$를 갖는 전기장은 (2)에서 얻어진 접선 성분 이외에 추가적으로 수직한 성분이 추가되어야 하고, 수직한 성분이 장력과 같은 방향인 경우와 반대 방향인 경우로 나누어 생각해 볼 수 있는데 실이 끊어지지 않고 버틸 수 있는 힘의 최댓값이 $T_o = \frac{3}{2}mg\cos\alpha$라는 조건으로 부터 전기장의 수직 성분이 장력과 같은 방향인 경우에 전기장의 세기가 최댓값을 가질 수 있다.([그림3] 참조) 이 경우에 전기장의 수직 성분이 장력의 역할을 하므로 $T=0$이 되고, $q|\vec{E}\ | = mg\cos\alpha$가 된다. 따라서 $|\vec{E}|_{\max} = \frac{\sqrt{(mg\cos\alpha)^2+(mg\sin\alpha)^2}}{q} = \frac{mg}{q}$가 된다. 전기장의 방향은 [그림 3]에 점선으로 표시된 $qE_{\max}$와 같고 중력의 반대 방향이다. 진자가 연직선에 대해 대칭인 곳에 위치해 있을 때에도 같은 방식으로 생각할 수 있고, 그 때에 $|\vec{E}|_{\max} = \frac{mg}{q}$, 전기장의 방향은 [그림3]에 표시된 방향에 대해 연직선에 대칭으로 표시된다.

(4) 논제 (3)에서 전기장의 방향은 유지하면서 크기가 절반이 되면 $E_1 = \frac{mg}{2q}$ 이므로, 진자에 작용하는 연직방향의 알짜 힘은 $mg/2$가 된다. 즉, 중력 가속도가 $g/2$로 줄어든 것과 같은 효과를 나타내므로, 이 단진동의 주기는 $T = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell}{g}}$ 이 된다.

[문항정보]

	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	온라인 모의논술	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	의학계열(생명과학)/II-1~II-4	
입학 모집요강에 제시한 자격 기준 과목명	생명과학	
출제 범위	과학과 교육과정 과목명	생명과학I, 생명과학II
	핵심개념 및 용어	물질대사, 질소 순환, 계통수, 진화
예상 소요 시간	60분	

문항 및 제시문

Ⅱ. 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오. < 생명과학 >

[가] 생물체는 물질대사를 통하여 생명 활동에 필요한 에너지를 얻을 뿐만 아니라 생물체의 구성 성분을 합성하기도 한다. 생물체 내에서 일어나는 물질대사 중 이화 작용은 생물체가 섭취한 영양소를 분해하여 에너지를 만들어 내는 반응이고, 동화 작용은 이화 작용으로 생성된 에너지를 이용하여 간단한 화합물로부터 복잡한 구조의 화합물을 만들어 내는 반응이다.

[나] 우리 몸을 이루는 거대 분자들로 탄수화물, 단백질, 지질을 들 수 있다. 탄수화물 중 다당류는 단당류인 포도당, 과당, 갈락토오스 등이 중합된 것이다. 중성 지방은 지방산과 글리세롤로 구성되는데, 생물체 내에서 에너지 저장 물질로 이용된다. 단백질은 아미노산이 펩타이드 결합에 의해 연결된 것으로 여러 개의 아미노산이 연결된 것을 폴리펩타이드라고 한다.

[다] 세포에서 포도당이 산소에 의한 산화 반응으로 완전히 분해되면 이산화탄소와 물이 생기면서 ATP가 합성된다. 일부 미생물은 산소가 없는 상태에서 유기물을 분해하여 생활에 필요한 에너지를 얻는데, 이를 무산소 호흡이라고 한다. 무산소 호흡의 경우, 호흡 기질의 분해 결과 생긴 물질이 인간에게 유용하면 발효, 인간에게 해를 끼치면 부패라고 한다. 발효의 과정에는 ① 포도당이 피루브산으로 되는 해당 작용이 포함되며, 그 이후의 과정은 세포 호흡과 크게 다르다.

[라] 식사를 하면 소장에서 포도당이 흡수되어 혈당량이 올라간다. 인슐린은 ② 간에서 포도당을 글리코겐으로 전환하여 저장하게 하거나, 세포에서 ③ 포도당의 소비를 촉진하여 혈당량을 낮춘다. 혈당량이 정상으로 낮아지면 음성 피드백에 의해 β 세포에서 인슐린의 분비가 억제된다. 식사 후 시간이 한참 지나거나 운동을 하여 혈당량이 낮아지면, 이자의 α 세포에서 글루카곤을 분비한다. 글루카곤과 부신 속질에서 분비되는 아드레날린은 간에 저장되어 있던 글리코겐을 포도당으로 분해하여 혈액으로 방출하게 한다.

[마] 대기 중의 질소는 번개와 같은 공중 방전에 의해 토양 속의 질산 이온(NO_3^-)로 전환되기도 하지만, 대부분의 경우 뿌리혹박테리아와 같은 질소 고정 세균에 의해 암모늄 이온(NH_4^+)으로 전환된다. 식물은 ④ 뿌리를 통해 흡수된 질소 성분을 이용하여 단백질 핵산과 같은 유기물을 만든다.

[바] 미토콘드리아 DNA는 모계를 통해서만 유전된다. 따라서 미토콘드리아 DNA를 통해 어머니의 계보를 쫓다보면 '미토콘드리아 이브'를 찾을 수 있을 것이다. Y염색체는 부계 유전을 하므로, Y 염색체를 통해 아버지의 계보를 쫓다보면 '아담'을 찾을 수 있을 것이다.

[사] 생물이 진화해온 역사를 계통이라고 한다. 이를 나뭇가지 모양으로 나타낸 것을 계통수라고 한다. 최근에는 분자생물학적 자료를 이용하여 계통수와 진화의 역사를 추적하기도 한다.

[논제 II-1] 제시문 [다]~[마]에서 밑줄 친 ①~④의 과정은 각각 동화 작용인지, 이화 작용인지, 아니면 분류할 수 없는지를 제시문 [가]와 [나]를 참조하여 논술하시오. (12점)

[논제 II-2] 아세트산 발효의 과정은 다음과 같다.

$$C_2H_5OH + O_2 \rightarrow CH_3COOH + H_2O$$

이 과정이 (1) 알코올 발효나 젖산 발효와 달리 산소를 이용함에도 발효라 불리는 이유는 무엇인지, 또 (2) 알코올 발효나 젖산 발효보다 많은 양의 에너지(ATP)를 생성하는 이유는 무엇인지 제시문 [다]를 참조하여 논술하시오. (8점)

[논제 II-3] 제시문 [라]의 인슐린과 글루카곤의 관계, 제시문 [마]의 뿌리혹박테리아와 식물의 관계를 적절한 생물학적 용어로 정의하여 논술하시오. (10점)

[논제 II-4] 분자계통학과 분자진화학에 기반한 연구는 미토콘드리아 DNA와 Y염색체를 대상으로 진행되었다. 그 이유는 무엇인지 제시문 [바]와 [사]를 참조하여 논술하시오. (10점)

의도

핵심 개념인 물질대사, 질소 순환, 계통수, 진화에 대한 이해의 정도를 평가하고자 하며, 단편적인 지식보다는 융합적인 사고의 능력을 보고자 한다. 또한 논리적인 서술과 설명의 능력을 평가하고자 한다.

근거

1. 근거

교육과정	
성취기준	

2. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	생명과학 I	심규철 외	비상교육	2012	168
	생명과학 I	이준규 외	천재교육	2014	24-26, 101, 208
	생명과학 II	심규철 외	비상교육	2012	239
	생명과학 II	이준규 외	천재교육	2014	66, 200-201
기타					

문항 해설

내용은 물질대사, 질소 순환, 계통수, 진화에 대한 교과서적인 설명으로 이루어져 있으며, 이를 통해 생명과학의 기본 개념들을 이해하고 있는지, 논리적으로 사고하여 설명할 수 있는지를 논제를 통해 평가하고자 한다.

답안

[논제 II-1] ① 포도당이 더 간단한 화합물인 피루브산으로 되므로 **이화 작용**이다. ② 포도당이 더 큰 분자인 글리코겐을 합성되는 과정은 **동화 작용**이다. ③ 포도당이 소비되는 과정은 에너지원으로 쓰이는 이화 작용일 수도 있고, 고분자 합성에 사용되는 동화 작용일 수도 있으므로 **분류할 수 없다**. ④ 질소 성분으로 단백질과 핵산과 같은 고분자를 합성하는 과정은 **동화 작용**이다.

[논제 II-2] (1) 아세트산 발효는 산소를 이용함에도 불구하고, 에탄올이 이산화탄소와 물로 완전 분해 되지는 않기 때문에 발효라고 할 수 있다. (2) 알코올 발효나 젖산 발효는 산소가 없는 상태에서 일어나는 무산소 호흡의 과정으로 2 분자의 ATP가 생성된다. 그에 비해 아세트산 발효는 2개의 NADH가 생성되므로 더 많은 에너지(ATP)를 얻을 수 있다.

[논제 II-3] 인슐린은 혈당을 낮추고, 글루카곤은 혈당을 높이는 작용을 하며, 서로 반대되는 작용을 하므로 길항 관계에 있다. 뿌리혹박테리아와 식물은 서로에게서 도움을 받는 관계이므로 공생 관계에 있다.

[논제 II-4] 분자계통학은 분자 수준의 연구를 통해 계통 관계를 파악하는 학문이고, 분자진화학은 분자 수준의 연구로 진화의 경로를 파악하는 학문이다. 계통 관계와 진화 경로는 부나 모의 계통에 대한 연구이며, 이는 각각 Y 염색체와 미토콘드리아의 DNA를 추적하여 파악할 수 있다.

[문항정보]

	☑ 논술고사	
전형명	2018 온라인 모의논술고사	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	의학계열(화학) / 논제 II-1	
입학 모집요강에 제시한 자격 기준 과목명	화학I, 화학II	
출제 범위	과학과 교육과정 과목명	화학I
	핵심개념 및 용어	원소의 주기성, 전자 배치, 이온화 에너지
예상 소요 시간	60분	

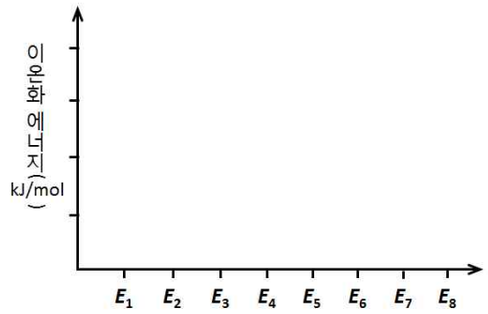
문항 및 제시문

[가]

원자 내에서 원자핵과 전자 사이에는 인력이 작용하므로 전자를 떼어 내려면 에너지가 필요하다. 이처럼 기체 상태의 원자로부터 전자 1개를 떼어 내는 데 필요한 에너지를 이온화 에너지라고 한다. 수소 원자를 제외한 원자에서 전자를 1개 이상 떼어 낼 경우 첫 번째 전자를 떼어 내는 데 필요한 에너지를 제일 이온화 에너지(E_1), 두 번째 전자를 떼어 내는 데 필요한 에너지를 제이 이온화 에너지(E_2), 세 번째 전자를 떼어 내는 데 필요한 에너지를 제삼 이온화 에너지(E_3)라고 한다. 이와 같은 E_1, E_2, E_3, …을 순차적 이온화 에너지라고 한다.

[논제 II-1] 제시문 [가]를 참조하여 다음 질문에 답하시오.

탄소(C)의 순차적 이온화 에너지의 예상되는 경향을 아래의 도표와 같은 형식으로 표현하고, 순차적 이온화 에너지를 이용하여 특정 원자의 원자가 전자의 개수를 알아낼 수 있는 이유에 대해 논술하시오. (10점)



출제 의도

- 원자 모형에 대한 이해를 바탕으로 전자 배치의 주기성에 따른 이온화 에너지의 변화를 예측하고 이를 통해 원자가 전자 개수를 구할 수 있음에 대한 이해 능력을 평가한다.

근거

1. 근거

교육과정	(고시번호) 1. 교육과학기술부 고시 제2009-41호[별책9] “과학과 교육과정”
성취기준	1. 교육과정 문서 (2) 개성 있는 원소(96쪽) 원소의 기원이 우주의 탄생 및 진화와 밀접하게 연관되어 있음을 설명하고, 원소마다 성질이 다른 이유를 미시적인 수준에서의 원자 구조 및 전자 배치와 관련지어 이해하게 한다. 원자의 구조와 관련하여 원자의 구성입자, 보어 모형, 오비탈, 스핀, 에너지 준위 등을 다루고, 원소의 주기적 성질과 관련하여 주기율표, 전자 배치, 원자 반지름, 이온화 에너지, 전기음성도 등을 다룬다. ④ 오비탈과 스핀 개념을 이해하고, 배타 원리, 훈트 규칙, 쌓음 원리를 적용하여 다전자원자의 전자 배치를 설명할 수 있다. ⑤ 주기율표에서 원자가전자의 수, 원자 반지름, 이온화 에너지, 전기음성도 등 원자의 성질이 주기적으로 변화됨을 설명할 수 있다.

2. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	화학 I	노태희 외	천재교육	2011	111-113
	화학 I	류해일 외	비상교육	2011	110-112
기타					

문항 해설

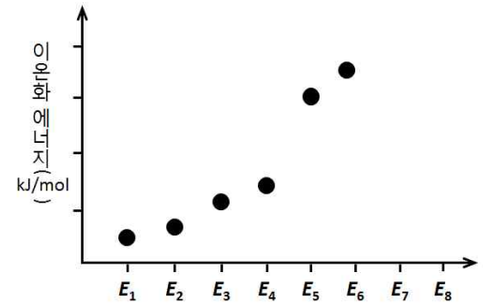
- 이 문항은 원자 모형과 전자 배치를 통해 원소의 주기성에 대한 이해를 전제로 이온화 에너지에 대해 설명하고 있는 제시문을 읽고 그 내용을 바탕으로 원소의 순차적 이온화 에너지와 원자가 전자 개수의 상관관계에 대해 논술하는 문항임.
- 제시문 (가)는 원자 내에서 원자핵과 전자 사이에 존재하는 인력에 의한 이온화 에너지와 다전자 원자의 경우 순차적으로 전자를 떼어 내는 데 필요한 에너지인 순차적 이온화 에너지에 대한 설명을 제시하고 있음.
- 제시문 (가)는 고등학교 화학I 교과서에서 발췌하여 편집하였고 고교 교육과정 범위에 포함되어 있는 내용임.

예시 답안

[II-1]

탄소는 원자 번호가 6번이고 총 6개의 전자를 가지고 있어 전자 배치는 $1s^2 2s^2 2p^2$가 된다.

탄소에서 전자를 하나씩 떼어내게 되면 가장 바깥 전자껍질의 전자부터 떨어지게 된다. 전자를 하나 떼어내고 나면 전자 수에 비해 양성자 수가 더 많게 되어 원자핵과 전자 사이의 인력이 더 커지게 되어 두 번째 전자를 떼어 내는 데에는 더 큰 에너지가 필요하게 되어 순차적 이온화 에너지는 점점 증가하는 경향을 보이게 된다. 탄소의 경우 2주기(L 전자껍질) 전자가 총 4개이고 처음 떼어내는 전자는 p 오비탈의 전자이다. 두 번째 전자도 p 오비탈에서 떼어내게 된다. 세 번째 전자는 p 오비탈보다 에너지가 낮은 s 오비탈에서 전자를 떼어내야 하므로 첫 번째 이온화 에너지와 두 번째 이온화 에너지의 차이보다 큰 에너지 차이가 필요하게 된다. 4개의 전자를 모두 떼어낸 후에는 비활성 기체의 전자 배치를 가지게 되어 추가로 전자를 떼어내는 데에는 그때까지의 이온화 에너지의 증가 경향에 따른 순차적 이온화 에너지 간의 에너지 차이보다 훨씬 더 큰 에너지 차이를 보이게 된다. 따라서 이러한 경향을 그림으로 표현하면 아래와 같다. 그리고 이렇게 큰 에너지 차를 보이기 전까지 떼어낸 전자들은 모두 같은 전자껍질에 속한 전자들이므로 그 개수가 그 원자의 원자가 전자 개수가 된다.



문항 및 제시문

[나]

분자의 구조에 따라 물질의 성질이 다르므로 분자의 모양을 아는 것은 분자의 성질을 이해하는 데 매우 중요하다. 1940년 시지윅은 공유 결합으로 형성된 분자에서 중심 원자를 둘러싸고 있는 전자쌍들은 그들 사이의 반발 때문에 가능한 한 서로 멀리 떨어져 있으려고 한다는 전자쌍 반발 원리를 제안하였다. 전자쌍 반발 이론은 중심 원자를 둘러싸고 있는 전자쌍들은 음전하를 띠고 있어서 정전기적 반발력이 최소가 되도록 가능한 한 멀리 떨어지려는 방향으로 배치된다는 것이다.

[다]

원소 기호를 이용하여 복잡한 화합물을 화학식으로 간단하게 나타내듯이, 화학식을 이용하여 화학적 변화를 나타낸 것을 화학 반응식이라고 한다. 화학 반응이 일어나도 반응 전후 원자는 새로 생겨나거나 없어지지 않으며, 반응 물질의 원자 수 총합과 생성 물질의 원자 수 총합이 같은 것을 이용하여 화학 반응식을 나타낼 수 있다. 화학 변화를 화학식으로 나타낸 화학 반응식을

보면, 화학 반응에 관여하는 물질들의 종류뿐만 아니라 반응물들과 생성물들 사이의 양적 관계인 화학양론(stoichiometry)도 알 수 있다.

[라]

물질에는 원자의 핵이 이루어질 때 축적되는 에너지, 전자의 운동 에너지, 결합 에너지, 분자의 운동 에너지 등이 포함되어 있으며, 물질마다 서로 다른 크기의 에너지를 갖게 된다. 이와 같이, 어떤 물질이 가지고 있는 에너지의 양을 엔탈피라 하고 기호 H로 나타낸다. 즉, 화학 반응에 수반되는 에너지는 반응물과 생성물의 엔탈피 차이라고 할 수 있다. 각 물질의 엔탈피는 정확히 측정하기 어렵지만, 물질 사이의 엔탈피 변화는 열에너지의 형태로 나타나므로 화학 반응에서 출입하는 반응열을 측정하면 엔탈피의 변화를 쉽게 알 수 있다. 일정한 압력에서 화학 반응이 일어날 때 엔탈피 변화를 반응 엔탈피(ΔH)라고 하며, 생성물의 엔탈피의 합에서 반응물의 엔탈피의 합을 뺀 것이다.

[마]

화학 반응에서 출입하는 열에너지 변화, 즉 반응 엔탈피 (ΔH)를 함께 나타낸 화학 반응식을 열화학 반응식이라고 한다. 열화학 반응식은 다음 몇 가지 규칙을 따라야 한다. 첫째, 열화학 반응식에 나타낸 계수의 비는 반응 물질과 생성 물질의 몰수비이다. 둘째, 반응 물질과 생성 물질이 가지는 엔탈피는 상태에 따라 달라지므로 반드시 물질의 상태, 즉 고체(s), 액체(l), 기체(g) 및 수용액(aq) 등을 화학식과 함께 표시한다. 셋째, 엔탈피의 값은 온도와 압력에 따라 달라지므로 열화학 반응식을 쓸 때에는 온도와 압력 등 반응 조건을 표시해야 한다. 넷째, 엔탈피는 몰수에 비례하므로 열화학 반응식의 계수가 변하면 엔탈피의 크기도 변한다.

[바]

화학 반응의 종류에 따라 나타나는 반응열의 종류는 다양하다. 반응열의 종류에는 연소열, 중화열, 생성열, 분해열, 용해열 등이 있으며, 일반적으로 반응열은 25 ℃, 1기압의 조건에서 나타낸다. 가장 안정한 성분 원소로부터 어떤 물질 1몰이 생성될 때 방출되거나 흡수되는 열량을 생성열이라고 한다. 특히 25 ℃, 1기압에서 성분 원소로부터 물질 1몰이 생성될 때의 엔탈피 변화를 표준 생성 엔탈피(ΔH_f^o)라고 한다. 25 ℃, 1기압에서 어떤 원소의 가장 안정한 형태의 표준 생성 엔탈피는 '0'이다. 예를 들어 수소, 산소, 탄소는 25 ℃, 1기압에서 각각 $H_2(g)$, $O_2(g)$, $C(s)$로 존재하며 이들의 ΔH_f^o는 0이다. 어떤 물질 1몰이 완전히 연소하여 가장 안정한 상태의 생성물로 될 때 방출되는 열량을 연소열이라고 한다.

[논제 II-2] 제시문 [나]~[바]를 참조하여 다음 질문에 답하시오.

(1) 환원제 및 로켓의 액체 연료로도 사용되는 히드라진(N_2H_4) 분자의 입체 구조를 전자쌍 반발 원리를 이용해 그림으로 표현하시오. (8점)

(2) 25 ℃, 1 기압의 조건에서 히드라진과 암모니아(NH_3)가 각각 산소의 존재하에서 연소될 때의 열화학 반응식에 대해 아래의 자료를 참고하여 논술하시오. (14점)

표준 생성 엔탈피 (ΔH_f^o, kJ/mol)	
$N_2H_4(l)$	50.42
$NH_3(g)$	-46.3
$H_2O(l)$	-285.8
$O_2(g)$	0.0
$N_2(g)$	0.0

(3) 히드라진과 암모니아를 각각 1 kg씩 연소한다고 가정할 때, 어느 것이 더 좋은 연료인지에 대해 논술하시오 (단, N과 H의 원자량은 각각 14와 1로 가정한다).(8점)

의도

- 분자의 입체 구조, 화학 반응식과 반응열에 대한 이해를 바탕으로 주어진 반응에 대한 화학양론과 반응열에 대한 추론 능력을 평가한다.

출제 근거

1. 근거

교육과정	(고시번호) 1. 교육과학기술부 고시 제2009-41호[별책9] "과학과 교육과정"
성취기준	1. 교육과정 문서

(1) 언어(94쪽)
인류 문명의 발전과 관련된 대표적인 화학 반응을 소개함으로써, 화학이 우리의 삶과 아주 긴밀하게 연관되어 있음을 설명한다. 이러한 화학 반응들을 통해 화학의 세계에서 소통의 도구가 되는 원소, 원자, 분자, 화합물, 몰 등과 같은 기초 개념을 다룬다. 여러 가지 화학 반응을 화학 반응식으로 나타내고 화학 반응에서의 양적 관계를 이해하게 한다.
④ 아보가드로수와 몰의 의미를 이해한다.
⑤ 여러 가지 화학 반응을 화학 반응식으로 나타낼 수 있고, 원자량과 분자량 등을 이용해서 화학 반응에서의 양적 관계를 알 수 있다.

(3) 아름다운 분자 세계 (98쪽)
지금까지 다룬 원자의 기본 구조와 다양한 원소의 성질을 토대로, 대칭적인 아름다움을 갖는 다양한 분자들이 화학 결합으로 이루어진다는 것을 이해시킨다. 화학 결합에 전자가 관여하기 때문에 분자의 구조와 성질이 전기적 힘에 의하여 결정되는 것을 설명하고, 쌍극자 모멘트와 결합의 극성 등을 도입하여 분자의 극성과 끓는점 등과 같은 물리적, 화학적 성질을 이해하게 한다.
⑤ 전자쌍 반발 원리를 이용하여 메탄, 암모니아, 물, 이산화탄소 등 간단한 공유 결합 분자의 구조를 설명하고, 분자 구조의 대칭성과 결합의 극성을 통해 분자가 극성을 띠는 지의 여부를 알게 한다.

(2) 물질 변화와 에너지(221쪽)
화학 반응에서 에너지 출입을 엔탈피의 변화로 나타내고, 열화학 반응에서의 엔탈피 변화를 결합 에너지와 관련지어 이해하게 한다. 헤스의 법칙을 이해하고 화학 반응에서 에너지가 보존됨을 알게 한다. 또한, 고립계에서의 자발적 변화의 방향을 설명하기 위하여 엔트로피를 도입한다. 엔탈피와 엔트로피를 이용하여 자유에너지의 의미를 정성적으로 이해시키고, 이를 이용하여 자발적 변화의 방향을 설명한다. 온도에 따른 자발적 변화의 방향을 이용하여 물질의 상변화를 설명하도록 한다.
① 화학 반응을 통해 열이 발생하거나 흡수됨을 설명할 수 있다.
③ 화학 반응에서 에너지가 보존됨을 설명할 수 있다.

2. 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	화학 I	노태희 외	천재교육	2011	151
	화학 I	류해일 외	비상교육	2011	157-158
	화학 II	노태희 외	천재교육	2011	85-87
	화학 II	류해일 외	비상교육	2012	86-89
기타					

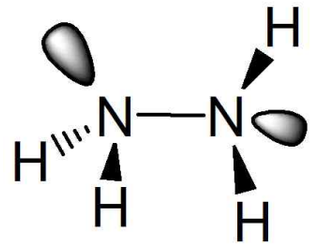
해설

- 이 문항은 주어진 분자의 입체 구조를 전자쌍 반발 원리를 이용하여 명확히 표현할 수 있는 능력을 측정하는 문항임. 그리고 화학 반응에 대한 화학 반응식을 작성하고, 주어진 표준 생성 엔탈피 정보를 바탕으로 열화학 방정식을 완성할 수 있는지와 화학양론을 이용하여 발생하는 반응열의 일종인 연소열을 구하고 비교하는 능력을 측정하는 문항임.
- 제시문 (나)는 전자쌍 반발 원리를 이용하여 분자의 모양을 예측할 수 있음에 대한 설명을 제시하고 있음.
- 제시문 (다)는 화학 반응식과 화학양론에 대한 설명을 제시하고 있음.
- 제시문 (라)는 엔탈피와 반응 엔탈피에 대한 설명을 제시하고 있음.
- 제시문 (마)는 열화학 반응식의 정의와 열화학 반응식을 작성하고 활용하는 데에 필요한 기본 규칙을 제시하고 있음.
- 제시문 (바)는 반응열의 일종인 표준 생성 엔탈피와 연소열에 대한 정의를 제시하고 있음.
- 제시문 (나) ~ (바)는 고등학교 화학I과 화학II 교과서에서 발췌하여 편집하였고 고교 교육과정 범위에 포함되어 있는 내용임.

예시 답안

[II-2]

(1) 수소는 하나의 결합만이 가능한 원소이므로 히드라진 분자의 구조는 두 개의 질소가 각각 하나의 질소와 두 개의 수소와 결합을 하고 있는 구조가 된다. 질소는 원자가 전자가 5개이므로 3개의 전자는 하나의 질소와 두 개의 수소와 공유 결합을 형성하는데 사용되고, 나머지 두 개는 비공유 전자쌍으로 남게된다. 전자쌍 반발 원리는 전자쌍 간의 반발력이 최소화되도록 전자쌍을 배치하는 것이고, 결합 전자쌍에 비해 비공유 전자쌍의 반발력이 더 크므로 비공유 전자쌍이 최대한 멀리 존재하도록 배치하게 되면 아래의 그림과 같은 분자 모양을 가지게 된다 (비공유 전자쌍은 생략 가능하나 평면 구조가 아닌 입체 구조를 가짐을 명확하게 표현해야 함).



(2) 히드라진과 암모니아의 연소 반응에 대한 화학 반응식은 아래와 같다.

$$N_2H_4(l) + O_2(g) \rightarrow N_2(g) + 2H_2O(l)$$
$$4NH_3(g) + 3O_2(g) \rightarrow 2N_2(g) + 6H_2O(l)$$

히드라진의 반응 엔탈피(ΔH)는

$\Delta H = \{\Delta H_f^o(N_2(g)) + 2\Delta H_f^o(H_2O(l))\} - \{\Delta H_f^o(N_2H_4(l)) + \Delta H_f^o(O_2(g))\}$
$= \{0.0 + 2\times(-285.8\ kJ/mol)\} - \{50.42\ kJ/mol + 0.0\} = -622.0\ kJ/mol$이고

암모니아의 반응 엔탈피(ΔH)는

$\Delta H = \{2\Delta H_f^o(N_2(g)) + 6\Delta H_f^o(H_2O(l))\} - \{4\Delta H_f^o(NH_3(g)) + 3\Delta H_f^o(O_2(g))\}$

$= \{2\times0.0 + 6\times(-285.8\ kJ/mol)\} - \{4\times(-46.3\ kJ/mol) + 3\times0.0\} = -1529.6\ kJ/mol$이다.

따라서 히드라진과 암모니아 각각의 열화학 반응식은 아래와 같다.

$$N_2H_4(l) + O_2(g) \rightarrow N_2(g) + 2H_2O(l) \qquad \Delta H = -622.0\ kJ/mol$$

$$4NH_3(g) + 3O_2(g) \rightarrow 2N_2(g) + 6H_2O(l) \quad \Delta H = -1529.6\ kJ/mol$$

(3) 히드라진의 분자량은 32이므로 히드라진 1 kg의 몰수는 31.25몰이다.
따라서 히드라진 1 kg을 연소하면 총 19437 kJ의 연소열이 발생한다.
암모니아의 분자량은 17이므로 암모니아 1 kg의 몰수는 약 58.8몰이다.
암모니아 4몰당 1529.6 kJ의 연소열이 발생하므로 암모니아 1몰당 382.4 kJ의 열이 발생하므로 암모니아 1 kg을 연소하면 총 22485 kJ의 연소열이 발생한다.
히드라진 1 kg이 연소될 때에 비해 암모니아 1 kg이 연소될 때 더 많은 열이 발생하므로 암모니아가 히드라진보다 더 좋은 연료이다.