출제 의도

본 문제는 도형 문제를 좌표계에 구현하고 정적분과 미분을 활용하여 도형의 최대 넓이와 입체도형의 최대 부피를 구할 수 있는지를 평가하고자 한다.

I-1. 도형을 좌표 평면에 구현하고 그 넓이를 정적분으로 나타낼 수 있는지를 평가하는 문제이다.

I-2. 적분과 미분의 관계를 이용하여 미분을 구하고 함수의 그래프의 개형을 찾아 함수의 최댓값이 발생되는 점을 찾을 수 있는지를 평가하는 문제이다.

I-3. 입체도형의 단면의 넓이의 식을 구하고 이를 이용하여 그 부피를 다항식으로 나타낼 수 있는지를 평가하는 문제이다.

I-4. 다항함수의 그래프의 개형을 찾아 함수의 최댓값을 찾을 수 있는지를 평가하는 문제이다.

출제 근거

1. 교육과정 근거

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문 가 제시문 다	교육과정*	**[미적분Ⅰ] – (라) 다항함수의 적분법 – ② 정적분** ① 구분구적법을 이해하고, 이를 이용하여 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있다. ② 정적분의 뜻을 안다. ③ 부정적분과 정적분의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다.
	성취기준· 성취수준**	**[미적분Ⅰ] – (라) 다항함수의 적분법 – ② 정적분** 미적1421. 구분구적법을 이해하고, 이를 이용하여 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있다. 미적1422. 정적분의 뜻을 안다. 미적1423. 부정적분과 정적분의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다.
제시문 나	교육과정	**[미적분Ⅱ] – (라) 적분법 – ② 정적분의 활용** ② 입체도형의 부피를 구할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	**[미적분Ⅱ] – (라) 적분법 – ② 정적분의 활용** 미적2422. 입체도형의 부피를 구할 수 있다.
제시문 라	교육과정	**[미적분Ⅰ] – (다) 다항함수의 미분법 – ③ 도함수의 활용** ③ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	**[미적분Ⅰ] – (다) 다항함수의 미분법 – ③ 도함수의 활용** 미적1333. 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
제시문 마	교육과정	**[미적분Ⅱ] – (다) 미분법 – ② 도함수의 활용** ② 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
	성취기준· 성취수준	**[미적분Ⅱ] – (다) 미분법 – ② 도함수의 활용** 미적2322. 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
제시문 바	교육과정	**[수학Ⅰ] – (다) 도형의 방정식 – ③ 원의 방정식** ① 원의 방정식을 구할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	**[수학Ⅰ] – (다) 도형의 방정식 – ③ 원의 방정식** 수학1331. 원의 방정식을 구할 수 있다.
논제 1-1	교육과정	**[수학Ⅰ] – (다) 도형의 방정식 – ③ 원의 방정식** ① 원의 방정식을 구할 수 있다. **[미적분Ⅱ] – (라) 적분법 – ② 정적분의 활용** ① 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	**[수학Ⅰ] – (다) 도형의 방정식 – ③ 원의 방정식** 수학1331. 원의 방정식을 구할 수 있다. **[미적분Ⅱ] – (라) 적분법 – ② 정적분의 활용** 미적2421. 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
논제 1-2	교육과정	**[미적분Ⅰ] – (라) 다항함수의 적분법 – ② 정적분** ② 정적분의 뜻을 안다. **[미적분Ⅱ] – (다) 미분법 – ② 도함수의 활용**

문항 및 제시문		관련 성취기준
		② 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
	성취기준·성취수준	**[미적분I] – (라) 다항함수의 적분법 – 2 정적분** 미적1422. 정적분의 뜻을 안다. **[미적분II] – (다) 미분법 – 2 도함수의 활용** 미적2322. 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
논제 I-3	교육과정	**[미적분II] – (라) 적분법 – 2 정적분의 활용** ② 입체도형의 부피를 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	**[미적분II] – (라) 적분법 – 2 정적분의 활용** 미적2422. 입체도형의 부피를 구할 수 있다.
논제 I-4	교육과정	**[미적분I] – (다) 다항함수의 미분법 – 3 도함수의 활용** ③ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. ④ 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
	성취기준·성취수준	**[미적분I] – (다) 다항함수의 미분법 – 3 도함수의 활용** 미적1333. 함수의 증가, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. 미적1334. 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

*: 교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책 8] "수학과 교육과정"

**: 교육과학기술부 발간 「2009 개정 교육과정에 따른 성취기준·성취수준: 고등학교 수학」(교육과학기술부 발간등록번호 11-1341000-002322-01)

2. 자료 출처

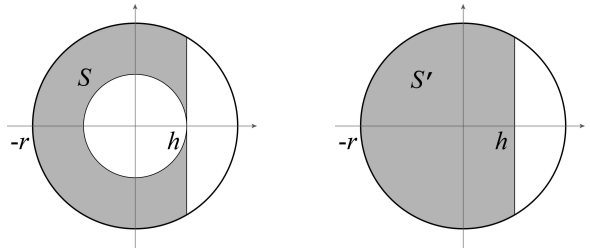
참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분I	류희찬 외	천재교육	2016	130 173
	미적분I	신항균 외	지학사	2015	174
	미적분II	이강섭 외	미래앤	2016	184
	미적분II	황선욱 외	좋은책 신사고	2016	119
	수학I	우정호 외	두산동아	2013	187
기타					

문항 해설

적분법은 넓이·부피와 같은 물리량을 측정하는 핵심적인 수학적 도구이고, 미분법은 수학식으로 표현되는 물리량이 언제 극대와 극소를 가지는지를 판정하는 도구로 널리 활용된다. 본 문제의 핵심적인 내용은 「수학I」의 '도형의 방정식'과 「미적분I」의 '다항함수의 미분법'과 '다항함수의 적분법', 「미적분II」의 '미분법'과 '적분법' 단원에서 다루어진다. 본 문항을 통해 학생들이 제시문을 읽고 도형 문제를 좌표평면에 구현하고 정적분과 미분을 활용하여 도형의 최대 넓이를 구하고, 입체도형의 단면의 넓이를 찾고 정적분과 미분을 활용하여 최대 부피를 구할 수 있는지와 그 풀이 과정을 체계적이고 논리적으로 논술할 수 있는지를 평가한다.

예시 답안

I-1. 원의 중심 O를 좌표평면의 원점으로 하고 아래 그림에서처럼 물의 수면이 y축과 평행하다고 하자.



도형 S는 반지름의 길이가 r인 원과 두 직선 $x=-r$, $x=h$로 둘러싸인 도형 S'에서 반지름의 길이가 h인 원을 제외하여 얻어진다. <제시문 [바]>를 활용하면 반지름의 길이가 r인 원의 위 곡선과 아래 곡선의 식은 각각 $y=\sqrt{r^2-x^2}$과 $y=-\sqrt{r^2-x^2}$이므로, <제시문 [가]>를 활용하면 도형 S'의 넓이는 $\int_{-r}^{h} 2\sqrt{r^2-x^2}\,dx$가 된다. 도형 S의 넓이 A는 S'의 넓이에서 반지름의 길이가 h인 원의 넓이 πh^2을 뺀 것이므로,

$$A=\int_{-r}^{h} 2\sqrt{r^2-x^2}\,dx-\pi h^2=-\pi h^2+2\int_{-r}^{h}\sqrt{r^2-x^2}\,dx.$$

I-2. 도형 S의 넓이 A를 h에 대하여 미분하면

$$\frac{dA}{dh}=\frac{d}{dh}\left(-\pi h^2+2\int_{-r}^{h}\sqrt{r^2-x^2}\,dx\right)$$

$$=-2\pi h+2\frac{d}{dh}\int_{-r}^{h}\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

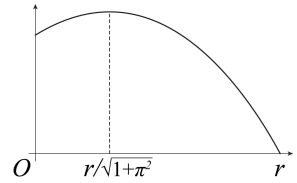
이고, <제시문 [다]>를 활용하면

$$\frac{dA}{dh}=-2\pi h+2\sqrt{r^2-h^2}$$

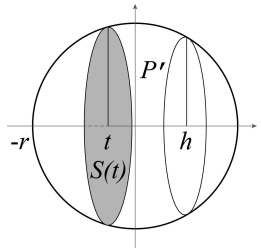
이다. 극값을 구하기 위한 식 $\frac{dA}{dh}=0$의 해는 $h=\pm\frac{r}{\sqrt{1+\pi^2}}$이고, $h\geq 0$이므로 $h=\frac{r}{\sqrt{1+\pi^2}}$이다.

만약 $0\leq h<\frac{r}{\sqrt{1+\pi^2}}$이면 $\frac{dA}{dh}=-2\pi h+2\sqrt{r^2-h^2}>0$이고, $\frac{r}{\sqrt{1+\pi^2}}<h\leq r$이면

$\frac{dA}{dh} < 0$이 되므로, <제시문 [라]>를 활용하면 A는 $h = \frac{r}{\sqrt{1+\pi^2}}$에서 극댓값을 가진다. h에 대한 A는 닫힌 구간 $[0, r]$에서 극값을 유일하게 극댓값 하나만 가지므로 <제시문 [마]>를 활용하면 A의 그래프는 아래 그림과 같고 A는 $h = \frac{r}{\sqrt{1+\pi^2}}$에서 최댓값을 가진다.



I-3. 입체도형 P는 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 구가 평면 $x = h$에 의하여 잘려진 두 부분 중 큰 부분인 입체도형 P'에서 반지름의 길이가 h인 구를 제외하여 얻어진다.



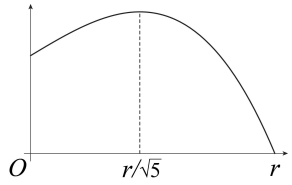
위 그림에서처럼 입체도형 P'가 평면 $x = t$에 의하여 잘려진 단면 $S(t)$는 반지름의 길이가 $\sqrt{r^2 - t^2}$인 원이므로, 그 넓이는 $\pi(r^2 - t^2)$이다. <제시문 [가]>를 활용하면 P'의 부피는

$$\int_{-r}^{h} \pi(r^2 - t^2)\,dt = \left[\pi(r^2 t - t^3/3)\right]_{t=-r}^{t=h} = \pi\left(-\frac{h^3}{3} + r^2 h + \frac{2r^3}{3}\right)$$

이다. P의 부피는 P'의 부피에서 반지름의 길이가 h인 구의 부피를 뺀 것이므로 $V = \pi\left(-\frac{5h^3}{3} + r^2 h + \frac{2r^3}{3}\right)$이다.

I-4. V를 h에 대하여 미분하면 $\frac{dV}{dh} = \pi(-5h^2 + r^2)$이고, 식 $\frac{dV}{dh} = 0$의 해는 $h = \pm\frac{r}{\sqrt{5}}$이다. $h \geq 0$이므로 $h = \frac{r}{\sqrt{5}}$이 해가 된다. 만약 $0 \leq h < \frac{r}{\sqrt{5}}$이면 $\frac{dV}{dh} > 0$이고, $\frac{r}{\sqrt{5}} < h \leq r$이면 $\frac{dV}{dh} < 0$이므로, <제시문 [라]>를 활용하면 V는 $h = \frac{r}{\sqrt{5}}$에서 극댓값을 가진다. 논제 I-2의 답안에서처럼 닫힌 구간 $[0, r]$에서 V가 극댓값만 유일하게 가지므로, <제시문 [마]>를 활용하여 아래와 같이 그래프를 살펴보면

V가 $h = \frac{r}{\sqrt{5}}$에서 최댓값 $V = \frac{10 + 2\sqrt{5}}{15}\pi r^3$를 가진다.



출제 의도

물리 논제에서는 고등학교 물리 교과서에 설명된 지식의 이해를 바탕으로 과학 분야의 통합적인 사고능력과 물리 지식의 적용 능력을 측정하고자 하였다. 논제 II는 힘과 가속도, 중력, 탄성력의 개념을 바르게 이해하고 그래프를 사용하여 이해한 바를 효과적으로 표현할 수 있는가를 평가하는 문제이다.

출제 근거

1. 교육과정 근거

적용 교육과정	(고시번호) 1. 교육과학기술부 고시 제2009-41호 "고교 과학과 교육과정 해설서"
성취기준	1. 교육과정 문서 (1) 물리 II (191쪽) ② 물체에 작용하는 힘이 주어졌을 때 운동변화를 정량적으로 이해한다. **물체에 작용하는 알짜힘의 방향이 가속도의 방향과 같음**을 알게 하고, 속도의 변화로부터 가속도를 구하여 물체에 작용하는 알짜힘의 방향을 찾을 수 있게 함으로써 뉴턴의 운동법칙을 이해하게 한다. 등가속도 운동의 경우 일,운동에너지 정리를 정량적으로 이해하게한다. (2) 물리 II (192쪽) ⑥ 단진동의 의미와 진자의 주기에 영향을 주는 변인을 이해한다. **물체에 작용하는 힘의 크기가 변위의 크기에 비례하고 힘의 방향이 변위의 반대**일 때 일어나는 운동이 단진동임을 알게하고, 단진자의 속도에 대한 벡터 분석을 통하여 가속도 방향과 진자에 작용하는 알짜힘에 대해 알게 한다. 역학적 에너지 보존 법칙으로부터 위치에너지가 최대일 때 진자의 진폭은 최대이며, 평형점에서 운동에너지가 최대임을 알게 한다. 용수철 진자와 단진자의 주기에 영향을 주는 변인에 대해 이해하게 한다.

2. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	물리 II	곽성일 외	천재교육	2011	25
	물리 I	김영민 외	교학사	2011	42
	물리 I	김영민 외	교학사	2011	44-45
	물리 II	곽성일 외	천재교육	2011	26-27
	물리 I	김영민 외	교학사	2011	54
	물리 II	곽성일 외	천재교육	2011	51
기타					

문항 해설

제시문의 내용은 힘과 가속도에 관한 알짜힘, 뉴턴의 운동법칙, 용수철의 탄성력을 기술한 것으로 고등학교 물리 I, II 교과서에서 발췌 및 편집하였다. 제시문에 제시된 알짜힘, 뉴턴의 운동법칙, 용수철의 탄성력 등을 이용하여 문제를 구성하여 힘과 운동의 원리에 대한 이해와 논리적인 사고를 통해 문항에 제시된 자료를 해석하는 능력을 요구하는 문항이다.

예시 답안

[논제 II-1]

물체 A에 작용하는 힘은 중력과 탄성력이고 가속도의 크기는 α로 주어져 있으므로, 용수철이 압축된 길이를 y라고 하면 뉴턴의 운동법칙으로부터 $m\alpha = ky - mg$를 만족하고, $y = \frac{m}{k}(\alpha + g)$로 주어진다. 그런데, y는 ℓ_o보다 클 수 없으므로 $y = \frac{m}{k}(\alpha + g) \le \ell_o$ 부등식으로부터 $\alpha = \left(\frac{k}{m}\ell_o - g\right)$가 될 때 까지만 $y = \frac{m}{k}(\alpha + g)$의 관계가 성립함을 알 수 있다. 따라서

(i) $0 \le \alpha \le \left(\frac{k}{m}\ell_o - g\right)$

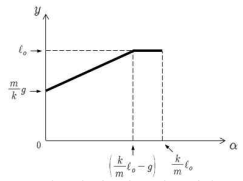
$y = \frac{m}{k}(\alpha + g)$

(ii) $\left(\frac{k}{m}\ell_o - g\right) \le \alpha \le \frac{k}{m}\ell_o$

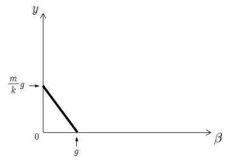
$y = \ell_o$로 일정하다.

α와 y의 관계를 그래프로 나타내면 다음과 같다.

[논제 II-2]

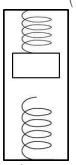


(1) 물체 A에 작용하는 힘은 역시 중력과 탄성력이고 가속도의 크기는 β로 주어져 있지만, 앞의 논제와는 달리 가속도의 방향이 반대이다. 용수철이 압축된 길이를 y라고 하면 뉴턴의 운동법칙으로부터 $m\beta = mg - ky$를 만족하고, $y = \frac{m}{k}(g-\beta)$로 주어진다. β와 y의 관계를 그래프로 나타내면 다음과 같다.

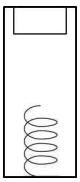


(2) β의 크기가 g보다 커지면 물체 A가 상자의 윗면에 위치한 용수철을 압축하게 되므로 $m\beta = ky + mg$로부터 $y = \frac{m}{k}(\beta - g)$를 얻을 수 있다. 그런데, y는 ℓ_o보다 클 수 없으므로 $y = \frac{m}{k}(\beta - g) \le \ell_o$ 부등식으로부터 $\beta = \left(\frac{k}{m}\ell_o + g\right)$가 될 때 까지만 윗면에 있는 용수철을 부분적으로 압축하고, $\left(\frac{k}{m}\ell_o + g\right) \le \beta \le \frac{2k}{m}\ell_o$ 구간에서는 용수철이 이미 완전히 압축된 상태이므로 윗면과 접촉하게 된다. 따라서 물체 A의 위치와 스프링의 상태를 그림으로 나타내면

(i) $g < \beta < \left(\frac{k}{m}\ell_o + g\right)$에서는 스프링이 부분적으로 압축되고



(ii) $\left(\frac{k}{m}\ell_o + g\right) \le \beta \le \frac{2k}{m}\ell_o$에서는 스프링이 완전히 압축되어 물체 A는 윗면과 접촉한 상태를 유지한다.



(3) 상자의 내면이 물체 A를 미는 힘이 0이 아니기 위해서는 내면과 물체 A가 접촉한 상태여야 하므로, $\left(\frac{k}{m}\ell_o + g\right) < \beta$ 에서 미는 힘이 0이 아닌 값을 갖게 된다.

출제 의도

DNA의 구조적 특징, 복제의 과정을 제대로 이해하고 있으며, 이를 응용할 수 있는지를 평가한다. 아울러 기초 생명공학 기술인 제한 효소와 중합 효소 연쇄 반응을 제대로 이해하고 응용하여 논리적 사고를 할 수 있는지를 평가하고자 한다.

출제 근거

1. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	생명과학 I	심규철 외	비상교육	2012	29
	생명과학 I	이준규 외	천재교육	2014	27
	생명과학 II	심규철 외	비상교육	2012	139－144, 177－183
	생명과학 II	이준규 외	천재교육	2014	102－109, 141－145
기타					

문항 해설

제시문의 내용은 DNA의 구조적 특징과 복제의 과정을 설명하고 있으며, 이어서 DNA 복제의 특징을 활용한 생명공학 기술인 중합 효소 연쇄 반응(PCR)과 제한 효소의 특징을 기술한 것으로 고등학교 생명과학I, II의 내용에서 다루어지고 있는 내용으로 교육과정 범위에 포함되어 있다. 제시문에 제시된 DNA의 구조적 특징과 복제의 과정을 제대로 이해하고 있으며, 생명 공학 기술의 원리에 대한 이해와 논리적인 사고를 평가하도록 문제를 구성하였다.

예시 답안

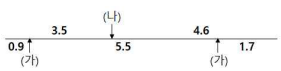
[논제 II-1] 110개의 염기쌍으로 이루어진 DNA 이중 나선은 110개씩의 뉴클레오타이드가 중합된 두 개의 폴리뉴클레오타이드가 상보적으로 결합하고 있는 것이다. 이때 한쪽 가닥에서 아데닌(A)이 22개, 티민(T)이 30개, 사이토신(C)이 25개라면, 이 가닥에서 남은 33개의 뉴클레오타이드는 구아닌을 염기로 가지고 있다. 구아닌은 항상 사이토신과 염기쌍을 이루므로 이 가닥과 상보적인 반

대편 가닥에서 발견되는 구아닌의 개수는 이 가닥의 사이토신의 개수와 동일한 25개이다. 디옥시리보스의 개수는 뉴클레오타이드의 개수와 같아서 가닥마다 110개씩, 양 가닥에 220개가 있다.

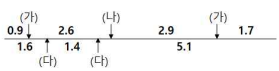
[논제 II-2] (1) A와 T 사이, G와 C 사이의 수소 결합을 통해 상보적으로 결합하는 폴리뉴클레오타이드의 두 가닥은 서로 반대 방향으로 결합하여, 한쪽 가닥의 끝이 5′ 말단이면 다른 쪽 가닥의 끝은 3′ 말단인 구조이다. 다시 말해, 상보적으로 결합한 DNA의 두 가닥은 역평행하다. 이 점에 유의해서 상자로 표시한 부위에 결합할 프라이머의 염기 서열을 적어보면 3′-CTCCAGAATTGAACCTCGTC-5′이며, 이를 5′-말단에서 3′-말단의 방향으로 기술하면 5′-CTGCTCCAAGTTAAGACCTC-3′이 된다.

[논제 II-2] (2) DNA 중합 효소는 뉴클레오타이드의 3′ 말단에 다음 뉴클레오타이드를 결합하기 때문에 새로운 DNA 가닥은 항상 5′ → 3′ 방향으로만 신장된다. 따라서 프라이머의 3′ 말단인 사이토신에 이어서 다음 뉴클레오타이드가 추가된다. 이 방향의 반대편 가닥에 T가 있으므로 DNA 중합효소는 아데닌을 포함한 뉴클레오타이드를 제일 처음 추가하게 될 것이다.

[논제 II-3] 결과를 보면 제한 효소 (가)는 두 군데, (나)는 한 군데를 자른다는 것을 알 수 있으며, (가), (나) 단독 및 (가)+(나) 혼합 처리의 결과와 부합하도록 제한 효소 (가)와 (나)의 인식 부위를 화살표로 표시해보면 <그림1>과 같다. <그림1>을 토대로 (가)+(다), (나)+(다) 혼합 처리의 결과와 부합하도록 (다)의 인식 부위를 화살표로 표시하면 <그림2>와 같다. 따라서 제한 효소 (다)로 단독 처리하면 3개의 절편을 얻을 수 있으며, 각 절편의 길이는 작은 것부터 1.4, 1.6 및 5.1 kb이다.



<그림1>

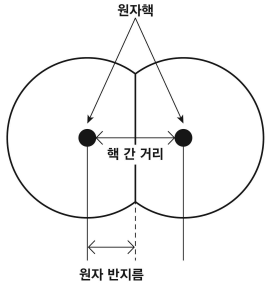


<그림2>

문항 및 제시문

[가]

보어의 원자 모형에서 바닥상태의 전자 배치는 같은 주기에서 원자 번호가 증가할수록 가장 바깥 전자껍질에 들어 있는 전자가 1개씩 증가하며, 같은 족에서 원자 번호가 증가할수록 전자껍질이 1개씩 증가하는 주기성이 있다. 이러한 보어의 원자 모형에 따른 전자 배치의 주기성을 통해 원자가 전자 수의 변화와 원자 반지름의 변화 및 다양한 변화를 예측하고 비교할 수 있다. 현대 원자 모형에서는 전자의 발견 확률 밀도를 구름과 같이 나타내는데, 전자의 발견 확률 밀도는 원자핵으로부터 멀어질수록 감소하지만 아주 먼 거리에서도 0이 되지는 않는다. 전자가 있는 곳까지를 원자의 경계라고 생각한다면 원자 반지름을 정하기가 쉽지 않다. 따라서 원자 반지름은 오른쪽의 그림과 같이 2개의 같은 원자가 결합했을 때 두 핵간 거리의 $\frac{1}{2}$로 정의한다.



[나]

주기율표에서 여러 가지 원소의 원자 반지름을 비교하면 비교적 규칙적으로 변화됨을 알 수 있다. 원자 반지름은 전자껍질 수와 유효핵 전하의 영향을 받는다. 전자껍질 수가 많아지면 원자가 전자가 원자핵에서 멀어지므로 원자 반지름이 커지게 된다. 또, 원자가 전자에 실제로 작용하는 핵전하인 유효 핵전하가 증가하면 원자핵과 원자가 전자 사이의 정전기적 인력이 증가하여 원자 반지름이 작아지게 된다. 금속 원소가 가장 바깥 전자껍질의 전자를 모두 잃어서 양이온이 될 때는 전자껍질 1개가 줄어들어 원자 반지름보다 양이온의 반지름이 작아진다. 그러나 비금속 원소가 가장 바깥 전자껍질에 전자를 받아들여서 음이온이 될 때는 전자 사이의 반발력이 커지므로 원자 반지름보다 음이온의 반지름이 커진다.

[논제 II-1] 제시문 [가]와 [나]를 참조하여 다음 질문에 답하시오.

(1) 다음 원소들을 원자 반지름이 큰 것부터 작은 것의 순서로 나열하고 그 이유에 대해 논술하시오 : Al, Cl, Na, P, Mg. (8점)

(2) 다음 이온들을 이온 반지름이 큰 것부터 작은 것의 순서로 나열하고 그 이유에 대해 논술하시오 : N^{3-}, F^{-}, Na^{+}, Mg^{2+}, O^{2-}. (8점)

출제 의도

- 원자 모형에 대한 이해를 바탕으로 전자 배치의 주기성에 따른 원자와 이온의 반지름의 변화를 예측하고 비교할 수 있는 능력을 평가한다.

출제 근거

1. 교육과정 근거

적용 교육과정	(고시번호) 1. 교육과학기술부 고시 제2009-41호[별책9] "과학과 교육과정"
성취기준	1. 교육과정 문서 (2) 개성 있는 원소(96쪽) 원소의 기원이 우주의 탄생 및 진화와 밀접하게 연관되어 있음을 설명하고, 원소마다 성질이 다른 이유를 미시적인 수준에서의 원자 구조 및 전자 배치와 관련지어 이해하게 한다. 원자의 구조와 관련하여 원자의 구성입자, 보어 모형, 오비탈, 스핀, 에너지 준위 등을 다루고, 원소의 주기적 성질과 관련하여 주기율표, 전자 배치, 원자 반지름, 이온화 에너지, 전기음성도 등을 다룬다. ③ 보어 모형을 이용하여 수소의 선스펙트럼과 에너지 준위를 설명하고, 대표적인 원자의 유효 핵전하 차이를 안다. ⑤ 주기율표에서 원자가전자의 수, 원자 반지름, 이온화 에너지, 전기음성도 등 원자의 성질이 주기적으로 변화됨을 설명할 수 있다.

2. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	화학 I	노태희 외	천재교육	2011	106-109
	화학 I	류해일 외	비상교육	2011	106-109
기타					

문항 해설

- 이 문항은 원자 모형과 전자 배치를 통해 원소의 주기성에 대한 설명을 하고 있는 제시문을 읽고 그 내용을 바탕으로 원소와 이온들의 상대적인 반지름의 크기를 비교하고 그 이유에 대해 논술하는 문항임.
- 제시문 (가)는 원자 모형을 바탕으로 같은 주기와 족에서의 전자 배치에 따른 전자수와 원자 반지름의 변화에 주기성이 있어 상대적인 비교가 가능함을 설명하고 있고 원자 반지름의 정의를 그림을 활용하여 제시하고 있음.
- 제시문 (나)는 원자 반지름의 주기성과 변화의 이유에 대한 설명을 제시하고 있고 같은 원리로 이온 반지름의 변화에 대한 설명을 제시하고 있음.
- 제시문 (가)와 (나)는 고등학교 화학I 교과서에서 발췌하여 편집하였고 고교 교육과정 범위에 포함되어 있는 내용임.

예시 답안

[논제 II-1]

(1) 주어진 원소들의 원자 반지름은 다음의 순서로 크기가 작아진다 : Na > Mg > Al > P > Cl

주기율표상에서 같은 주기에 있는 원소들은 왼쪽에서 오른쪽으로 원자번호가 증가함에 따라 원자 반지름이 작아진다. 그 이유는, 원자번호가 증가함에 따라 양성자와 전자의 수가 증가하지만 같은 주기에 있기 때문에 전자껍질은 동일하고 유효핵전하가 증가하게 되어 전자가 핵 쪽으로 더욱 끌어당겨지기 때문이다.

(2) 주어진 이온들의 이온 반지름은 다음의 순서로 크기가 작아진다 : $N^{3-} > O^{2-} > F^- > Na^+ > Mg^{2+}$

비금속 원소인 N, O, F는 같은 주기에 있는 원소들이지만, 각각 음이온이 되면 전자 사이의 반발력이 커지기 때문에 원자 반지름보다 음이온의 반지름이 커진다. 특히 N^{3-}는 가장 바깥 전자껍질에 N 원소에 비해 3개의 전자가 더 있으므로 전자 사이의 반발력이 가장 커 가장 큰 이온 반지름을 가지게 되고, 여분의 전자가 2개와 1개인 O^{2-}와 F^-의 순서로 이온 반지름이 작아지게 된다. 금속 이온인 Na와 Mg은 가장 바깥 전자껍질의 전자를 모두 잃어 양이온이 될 때 전자껍질이 줄어들면서 원자 반지름보다 이온 반지름이 작아지게 되고, 전자의 개수에 비해 양성자의 개수가 더 많은 상태가 되어 유효핵전하가 더 커지게 되므로 음이온인 N^{3-}, O^{2-}, F^- 보다 이온 반지름이 더 작게 된다. 2가 양이온인 Mg^{2+}는 Na^+에 비해 유효핵전하가 더 크므로 가장 작은 이온 반지름을 갖는다.

문항 및 제시문

[다]

원소 기호를 이용하여 복잡한 화합물을 화학식으로 간단하게 나타내듯이, 화학식을 이용하여 화학적 변화를 나타낸 것을 화학 반응식이라고 한다. 화학 반응이 일어나도 반응 전후 원자는 새로 생겨나거나 없어지지 않으며, 반응 물질의 원자 수 총합과 생성 물질의 원자 수 총합이 같은 것을 이용하여 화학 반응식을 나타낼 수 있다. 화학 변화를 화학식으로 나타낸 화학 반응식을 보면, 화학 반응에 관여하는 물질들의 종류뿐만 아니라 반응물들과 생성물들 사이의 양적 관계인 화학양론(stoichiometry)도 알 수 있다.

[라]

화학 반응에서 출입하는 열에너지 변화, 즉 반응 엔탈피 (ΔH)를 함께 나타낸 화학 반응식을 열화학 반응식이라고 한다. 열화학 반응식은 다음 몇 가지 규칙을 따라야 한다. 첫째, 열화학 반응식에 나타낸 계수의 비는 반응 물질과 생성 물질의 몰수비이다. 둘째, 반응 물질과 생성 물질이 가지는 엔탈피는 상태에 따라 달라지므로 반드시 물질의 상태, 즉 고체(s), 액체(l), 기체(g) 및 수용액(aq) 등을 화학식과 함께 표시한다. 셋째, 엔탈피의 값은 온도와 압력에 따라 달라지므로 열화학 반응식을 쓸 때에는 온도와 압력 등 반응 조건을 표시해야 한다. 넷째, 엔탈피는 몰수에 비례하므로 열화학 반응식의 계수가 변하면 엔탈피의 크기도 변한다.

[마]

화학 반응의 종류에 따라 나타나는 반응열의 종류는 다양하다. 반응열의 종류에는 연소열, 중화열, 생성열, 분해열, 용해열 등이 있으며, 일반적으로 반응열은 25 ℃, 1기압의 조건에서 나타낸다. 어떤 물질 1몰이 완전히 연소하여 가장 안정한 상태의 생성물로 될 때 방출되는 열량을 연소열이라고 한다.

[논제 II-2] 제시문 [다]~[마]를 참조하여 다음 질문에 답하시오.

25 ℃, 1 기압의 조건에서 벤젠($C_6H_6(l)$)은 공기 중에서 연소되어 이산화 탄소($CO_2(g)$)와 액체 상태의 물($H_2O(l)$)을 생성하며 3268 kJ/몰의 연소열을 발생한다.

(1) 벤젠 연소 반응의 열화학 반응식에 대해 논술하시오. (8점)

(2) 산소가 든 밀폐된 용기에 벤젠 39.0 g을 주입하고 25 ℃, 1 기압에서 연소시켜 물 10.8 g을 얻었다. 연소 전 밀폐된 용기에 존재한 산소의 질량에 대해 논술하시오 (단, 밀폐된 용기 내에서의 연소는 반응물 중 어느 하나라도 모두 소모될 때까지 비가역적으로 진행되고 C, H, O의 원자량은 각각 12.0, 1.0, 16.0 g/몰이라 가정한다). (8점)

(3) [논제 II-2] (2)의 반응 후 반응 용기에 남은 반응물의 종류와 질량 및 발생한 연소열에 대해 논술하시오. (8점)

출제 의도

- 화학 반응식과 반응열에 대한 이해를 바탕으로 주어진 반응에 대한 화학양론과 반응열에 대한 추론 능력을 평가한다.

출제 근거

1. 교육과정 근거

적용 교육과정	(고시번호) 1. 교육과학기술부 고시 제2009-41호[별책9] "과학과 교육과정"
성취기준	1. 교육과정 문서 (1) 화학의 언어(94쪽) 인류 문명의 발전과 관련된 대표적인 화학 반응을 소개함으로써, 화학이 우리의 삶과 아주 긴밀하게 연관되어 있음을 설명한다. 이러한 화학 반응들을 통해 화학의 세계에서 소통의 도구가 되는 원소, 원자, 분자, 화합물, 몰 등과 같은 기초 개념을 다룬다. 여러 가지 화학 반응을 화학 반응식으로 나타내고 화학 반응에서의 양적 관계를 이해하게 한다. ④ 아보가드로수와 몰의 의미를 이해한다. ⑤ 여러 가지 화학 반응을 화학 반응식으로 나타낼 수 있고, 원자량과 분자량 등을 이용해서 화학 반응에서의 양적 관계를 알 수 있다. (2) 물질 변화와 에너지(221쪽) 화학 반응에서 에너지 출입을 엔탈피의 변화로 나타내고, 열화학 반응에서의 엔탈피 변화를 결합 에너지와 관련지어 이해하게 한다. 헤스의 법칙을 이해하고 화학 반응에서 에너지가 보존됨을 알게 한다. 또한, 고립계에서의 자발적 변화의 방향을 설명하기 위하여 엔트로피를 도입한다. 엔탈피와 엔트로피를 이용하여 자유에너지의 의미를 정성적으로 이해시키고, 이를 이용하여 자발적 변화의 방향을 설명한다. 온도에 따른 자발적 변화의 방향을 이용하여 물질의 상변화를 설명하도록 한다. ① 화학 반응을 통해 열이 발생하거나 흡수됨을 설명할 수 있다. ③ 화학 반응에서 에너지가 보존됨을 설명할 수 있다.

2. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	화학 I	노태희 외	천재교육	2011	41-46
	화학 I	류해일 외	비상교육	2011	42-45
	화학 II	노태희 외	천재교육	2011	85-87
	화학 II	류해일 외	비상교육	2012	86-89
	화학 II	박종석 외	교학사	2011	88-91
	화학 II	김희준 외	상상아카데미	2011	87-91
기타					

문항 해설

- 이 문항은 주어진 화학 반응에 대한 열화학 반응식을 작성하고, 주어진 물질과 생성된 물질의 양에 따른 화학양론적 정보를 바탕으로 상대적인 물질의 양을 구하고 반응열의 일종인 연소열을 추론해 내는 능력을 측정하는 문항임.
- 제시문 (다)는 화학 반응식과 화학양론에 대한 설명을 제시하고 있음.
- 제시문 (라)는 열화학 반응식의 정의와 열화학 반응식을 작성하고 활용하는 데에 필요한 기본 규칙을 제시하고 있음.
- 제시문 (마)는 반응열의 일종인 연소열에 대한 정의를 제시하고 있음.
- 제시문 (다) ~ (마)는 고등학교 화학I과 화학II 교과서에서 발췌하여 편집하였고 고교 교육과정 범위에 포함되어 있는 내용임.

예시 답안

[논제 II-2]

(1) 주어진 반응은 벤젠의 연소 반응이다. 벤젠은 산소가 존재하는 25 ℃, 1 기압의 조건에서 연소되어 이산화탄소와 액체 상태의 물을 생성한다. 이때의 연소열은 3268 kJ/몰이고 연소 반응은 발열반응이므로 열화학 반응식은 아래와 같다.

$$2C_6H_6(l) + 15O_2(g) \rightarrow 12CO_2(g) + 6H_2O(l) \quad \Delta H = -3268 \text{ kJ/몰}$$

(2) 물 10.8 g이 반응 후 생성되었다는 것은 물의 분자량이 18이므로 물이 0.6 몰이 생성되었음을 의미한다. 열화학 반응식을 참고하면, 벤젠과 물의 몰비는 2 : 6이고 벤젠의 분자량은 78이므로 반응한 벤젠의 질량은 15.6 g으로 처음 존재하던 양 보다 작은 양이 반응에 참여한 것을 알 수 있다. 따라서 연소를 통해 모두 소진된 것은 산소임을 알 수 있다. 산소와 물의 몰비는 15 : 6이므로 산소는 총 1.5 몰이 반응한 것이고, 반응 용기 내 존재한 산소의 질량은 48 g이 된다. 따라서 연소 전 밀폐된 용기에 존재한 산소의 질량은 48 g이다.

(3) [논제 II-2] (1)과 (2)에서 살펴본 봐와 같이, 연소를 통해 0.6 몰의 물이 발생하였고 벤젠과 물의 몰비는 2 : 6이다. 벤젠의 분자량은 78이고 반응에 참여한 벤젠의 몰수는 0.2몰이므로 소모된 벤젠의 질량은 15.6 g이다. 밀폐된 용기에 처음 주입된 벤젠의 양은 39.0 g이었으므로 반응 용기에 남은 반응물은 벤젠이고, 39.0 g의 벤젠 중 15.6 g이 소모되고 23.4 g이 남게 된다.

벤젠 0.2 mol이 연소되었으므로 3268 kJ/몰 X 0.2 몰 = 653.6 kJ의 연소열이 발생한다.