문항카드 7

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	2023학년도 수시모집 논술우수전형	
계열(과목) / 문항번호	자연계 1교시 / 1번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학 II
	핵심개념 및 용어	이차방정식의 근과 계수의 관계, 직선의 방정식, 원의 방정식, 접선의 방정식, 함수의 증가와 감소, 극대와 극소
예상 소요 시간	30 분 / 전체 100 분	

2. 문항 및 제시문

[문제 1] 다음 <제시문 1> ~ <제시문 4>를 읽고 [문제 1-ⅰ] ~ [문제 1-ⅲ]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (30점)

<제시문1>

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ 사이의 거리는 다음과 같다.

$$\overline{\mathrm{AB}}= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

<제시문2>

중심의 좌표가 (a, b)이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은 다음과 같다.

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

<제시문3>

두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$에서 $mm'=-1$이면 두 직선은 서로 수직이다.

<제시문4>

원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원을 C라 한다. $-1<x<0$에서 정의된 곡선 $y=(x+1)^2$ 위의 점 P에서의 접선을 L이라 하자. 또한, 점 P를 지나고 x축에 평행한 직선이 원 C와 만나는 두 점 중, x좌표가 음수인 점을 A, x좌표가 양수인 점을 B라고 한다.

[문제 1-ⅰ] <제시문 4>에서 정의된 점 P와 직선 L에 대해서, 원점 O와 점 P를 연결하는 직선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$일 때, 직선 L이 원 C와 만나는 두 점을 E, F라 하자. $\overline{\mathrm{EF}}^2$을 구하고 그 이유를 논하시오.

[문제 1-ⅱ] <제시문 4>에서 정의된 점 P와 직선 L에 대해서, $\overline{\mathrm{OP}}$가 최소가 될 때 직선 L과 선분 OP가 수직임을 보이고 그 이유를 논하시오.

[문제 1-ⅲ] <제시문 4>에서 정의된 점 P, A, B와 직선 L에 대해서, $\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{PB}}$가 최댓값을 가질 때 직선 L과 선분 OP가 수직임을 보이고 그 이유를 논하시오.

3. 출제 의도

직선과 곡선의 조건들을 수식으로 전환하고 이러한 수식의 수학적 분석을 통해 다시 직선과 곡선에 관한 정보를 알아낼 수 있는 능력을 평가하는 문제이다. 고교 교과 과정 중 이차방정식의 근과 계수의 관계, 직선의 방정식, 원의 방정식, 접선의 방정식, 함수의 증가와 감소, 극대와 극소 등을 이해하면 해결할 수 있는 문제이다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2020-236호 [별책8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취기준
제시문 1	**[수학] - (3) 도형의 방정식 - 1 평면좌표** [10수학02-01] 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.
제시문 2	**[수학] - (3) 도형의 방정식 - 3 원의 방정식** [10수학02-06] 원의 방정식을 구할 수 있다.
제시문 3	**[수학] - (3) 도형의 방정식 - 2 직선의 방정식** [10수학02-04] 두 직선의 평행 조건과 수직 조건을 이해한다.
제시문 4	**[수학] - (3) 도형의 방정식 - 3 원의 방정식** [10수학02-07] 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다.
문제 1-i	**[수학] - (2) 방정식과 부등식 - 4 복소수와 이차방정식** [10수학01-08] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다. **[수학] - (3) 도형의 방정식 - 1 평면좌표** [10수학02-01] 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다. **[수학] - (3) 도형의 방정식 - 2 직선의 방정식** [10수학02-04] 두 직선의 평행 조건과 수직 조건을 이해한다. **[수학] - (3) 도형의 방정식 - 3 원의 방정식** [10수학02-06] 원의 방정식을 구할 수 있다.
문제 1-ii	**[수학] - (3) 도형의 방정식 - 1 평면좌표** [10수학02-01] 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다. **[수학] - (3) 도형의 방정식 - 2 직선의 방정식** [10수학02-04] 두 직선의 평행 조건과 수직 조건을 이해한다. **[수학Ⅱ] - (2) 미분 - 3 도함수의 활용** [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
문제 1-iii	**[수학] - (3) 도형의 방정식 - 1 평면좌표** [10수학02-01] 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다. **[수학] - (3) 도형의 방정식 - 2 직선의 방정식** [10수학02-04] 두 직선의 평행 조건과 수직 조건을 이해한다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수
고등학교 교과서	수학	이준열 외 9인	천재교육	2021	52-57, 109-112, 140-151
	수학 II	김원경 외 14인	비상교육	2021	71-73, 78-85
기타					

5. 문항 해설

[문제 1 - i] : 직선과 곡선의 교점에서의 접선이 원과 만나는 두 점의 거리를 근과 계수의 관계를 이용하여 구할 수 있는지 평가하는 문제이다.

[문제 1 - ii] : 주어진 점과 곡선 위의 한 점 사이의 거리가 최소가 될 때 그 직선과 곡선 사이의 기하학적 관계를 알아낼 수 있는지 평가하는 문제이다.

[문제 1 - iii] : **[문제 1 - ii]**에서 알아낸 정보를 문제의 주어진 조건과 결합하여 최댓값을 가질 때의 선분의 수직 관계를 유도할 수 있는지 평가하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
[문제 1- i]	직선과 곡선의 교점에서의 접선이 원과 만나는 두 점의 거리를 근과 계수의 관계를 이용하여 구할 수 있다.	10점
[문제 1- ii]	원점 O과 곡선 위의 한 점 사이의 거리가 최소가 될 때 직선 L과 선분 OP가 수직임을 보일 수 있다.	10점
[문제 1- iii]	$\overline{\mathrm{AP}} \times \overline{\mathrm{PB}}$가 최댓값을 가질 때 직선 L과 선분 OP가 수직임을 보일 수 있다.	10점

7. 예시 답안

[문제 1 - i]

원점 O와 점 P를 지나는 직선의 방정식 $y=-\frac{1}{2}x$ 과 곡선 $y=(x+1)^2$ 연립하면

$$-\frac{1}{2}x=(x+1)^2$$

이를 정리하면

$$2x^2+5x+2=0$$

이다. 두 개의 해 중 $-1<x<0$을 만족하는 해는

$$x=-\frac{1}{2}$$

따라서

$$\mathrm{P}\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$$

이고 P를 지나는 접선의 방정식은

$$y=2\left(-\frac{1}{2}+1\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}=x+\frac{3}{4}$$

이를 원의 방정식에 대입하면

$$32x^2+24x-7=0$$

이 방정식의 두 근을 α, β $(\alpha < \beta)$ 라 하면 근과 계수의 공식에 의해

$$\alpha + \beta = -\frac{3}{4},\ \alpha\beta = -\frac{7}{32}$$

만족하고 점 E, F 는

$$\mathrm{E} = \left(\alpha, -\sqrt{1-\alpha^2}\right), \quad \mathrm{F} = \left(\beta, \sqrt{1-\beta^2}\right)$$

가 된다. 따라서

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{EF}^2} &= (\alpha-\beta)^2 + (\sqrt{1-\alpha^2} + \sqrt{1-\beta^2})^2 \\ &= 2 - 2\alpha\beta + 2\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2+\alpha^2\beta^2} \\ &= 2 - 2\alpha\beta + 2\sqrt{1-(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta+\alpha^2\beta^2} \\ &= 2 - 2\left(-\frac{7}{32}\right) + 2\sqrt{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^2 + 2\left(-\frac{7}{32}\right) + \left(-\frac{7}{32}\right)^2} \\ &= \frac{23}{8}\end{aligned}$$

[문제 1 - ii]

$\mathrm{P}(p, (p+1)^2)$ $(-1 < p < 0)$ 이라 하면

$$\overline{\mathrm{OP}^2} = p^2 + (p+1)^4 = p^4 + 4p^3 + 7p^2 + 4p + 1$$

이다, 따라서 $-1 < p < 0$ 에서 정의된 함수 $g(p)$를

$$g(p) = p^2 + (p+1)^4 = p^4 + 4p^3 + 7p^2 + 4p + 1$$

로 정의하고 함수 $g(p)$의 최솟값을 조사하면 된다. 함수 $g(p)$를 미분하면

$$g'(p) = 4p^3 + 12p^2 + 14p + 4$$

이는

$$g'(p) = 4(p+1)^3 + 2p$$

로 적을 수 있다. 따라서

$$y = 4(p+1)^3, \quad y = -2p$$

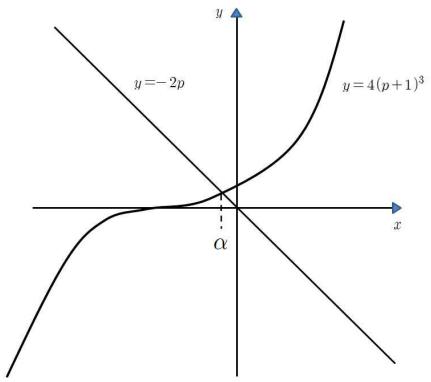
의 교점에서 $g'(p) = 0$ 가 됨을 알 수 있다.

오른쪽 그림과 같이 두 곡선과 직선의 그래프를 고려하면

$$4(\alpha+1)^3 = -2\alpha$$

인 $0 < \alpha < 1$가 유일하게 존재함을 알 수 있다.

이로부터 함수의 증감을 조사하면



p		α	
$g'(p)$	$-$	0	$+$
$g(p)$	↘	$g(\alpha)$	↗

따라서 $g(p)$ 는 α에서 최소가 되고 α는

$$\alpha = -2(\alpha+1)^3 \qquad \text{-------- (1)}$$

을 만족한다.

직선 L의 기울기는 $2(\alpha+1)$이고 직선 OP의 기울기는

$$\frac{0-(\alpha+1)^2}{0-\alpha}=\frac{(\alpha+1)^2}{\alpha}$$

이므로 (1)을 사용하면 L의 기울기와 직선 OP의 기울기의 곱은

$$2(\alpha+1)\times\frac{(\alpha+1)^2}{\alpha}=\frac{2(\alpha+1)^3}{\alpha}=-1$$

이다. 따라서 직선 L과 선분 OP는 수직이다.

[문제 1-iii]

점 $\mathrm{P}\left(p,(p+1)^2\right)$ 라 두면 A,B 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathrm{A}\left(-\sqrt{1-(p+1)^4},(p+1)^2\right),\quad \mathrm{B}\left(\sqrt{1-(p+1)^4},(p+1)^2\right)$$

따라서

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{PB}}&=\left(p+\sqrt{1-(1+p)^4}\right)\left(\sqrt{1-(1+p)^4}-p\right)\\&=1-p^2-(1+p)^4\\&=1-\overline{\mathrm{OP}}^2\end{aligned}$$

이로부터 $\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{PB}}$ 가 최대가 될 때는 $\overline{\mathrm{OP}}$ 가 최소가 될 때 임을 알 수 있다. 따라서 **[문제 1-ii]** 에 의해 $\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{PB}}$ 가 최댓값을 가질 때 직선 L과 선분 OP가 수직이다.

문항카드 8

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	2023학년도 수시모집 논술우수전형	
계열(과목) / 문항번호	자연계 1교시 / 2번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학I
	핵심개념 및 용어	연립이차방정식, 사인법칙, 코사인법칙
예상 소요 시간	40분 / 전체 100분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2] 다음 <제시문 1>과 <제시문 2>를 읽고 [문제 2-ⅰ] ~ [문제 2-ⅳ]를 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (40점)

<제시문 1>

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이 R에 대해 다음이 성립한다.

$$\frac{\overline{BC}}{\sin A}=\frac{\overline{CA}}{\sin B}=\frac{\overline{AB}}{\sin C}=2R$$

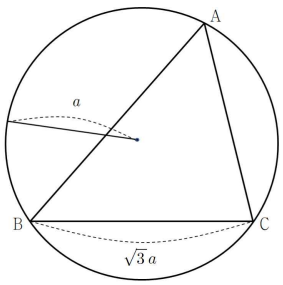
<제시문 2>

그림과 같이 양의 실수 a에 대해 반지름이 a인 원에 내접하는 삼각형 ABC가 다음 세 가지 조건을 만족한다.

(1) $\overline{BC}=\sqrt{3}a$

(2) $\angle A<90^\circ$

(3) $0<\overline{AC}\le\overline{AB}$



[문제 2-ⅰ] <제시문 2>의 삼각형 ABC에 대해 $\angle A$를 구하고 그 이유를 논하시오.

[문제 2-ⅱ] <제시문 2>의 삼각형 ABC에 대해 $a=10$일 때, $\overline{AB}$와 $\overline{AC}$가 모두 정수가 되는 $\overline{AB}$와 $\overline{AC}$의 값을 모두 찾고 그 이유를 논하시오.

[문제 2-ⅲ] <제시문 2>의 삼각형 ABC에 대해 $a=\sqrt{10}$이라 하자. 2023 이하인 자연수 M에 대해, $\overline{AB}+\overline{AC}=M$을 만족하는 순서쌍 $(\overline{AB},\overline{AC})$가 존재하는 모든 M의 합을 구하고 그 이유를 논하시오.

[문제 2-ⅳ] <제시문 2>의 삼각형 ABC에 대해 $a=\sqrt{2}$라 하자. 2023 이하인 자연수 N에 대해, $\overline{AB}^2$과 $\overline{AC}^2$은 정수가 아니고 $\overline{AB}\times\overline{AC}=N$을 만족하는 순서쌍 $(\overline{AB}^2,\overline{AC}^2)$이 존재하는 모든 N의 합을 구하고 그 이유를 논하시오.

3. 출제 의도

주어진 삼각형과 외접원의 조건에 사인법칙, 코사인법칙, 연립 이차 방정식 등 적절한 수학 이론을 적용하여 삼각형에 대해 원하는 정보를 얻어낼 수 있는지를 평가하는 문제이다. 고교 교과 과정 중 연립 이차방정식, 사인법칙, 코사인법칙 등을 이해하면 해결할 수 있는 문제이다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2020-236호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취기준
제시문 1	**[수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수** [12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
제시문 2	**[수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수** [12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문제 2-ⅰ	**[수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수** [12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문제 2-ⅱ	**[수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수** [12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문제 2-ⅲ	**[수학] - (2) 방정식과 부등식 - ⑥ 여러 가지 방정식과 부등식** [10수학01-13] 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀 수 있다. **[수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수** [12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문제 2-ⅳ	**[수학] - (2) 방정식과 부등식 - ⑥ 여러 가지 방정식과 부등식** [10수학01-13] 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀 수 있다. **[수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수** [12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수
고등학교 교과서	수학	이준열 외 9인	천재교육	2021	80-82
	수학 Ⅰ	박교식 외 19인	동아출판	2020	61-93
기타					

5. 문항 해설

[문제 2-ⅰ] : 사인법칙을 적용하여 삼각형의 각을 구할 수 있는지 평가하는 문제이다.

[문제 2-ⅱ] : 코사인법칙과 삼각형의 기본적인 성질을 결합하여 원하는 변의 길이를 구할 수 있는지 평가하는 문제이다.

[문제 2-ⅲ] : 코사인법칙과 삼각형의 성질로부터 연립 이차 방정식을 유도하여 원하는 변의 길이를 구할 수 있는지 평가하는 문제이다.

[문제 2-ⅳ] : 코사인법칙과 삼각형의 성질을 정수 조건과 결합하여 원하는 변의 길이를 구할 수 있는지 평가하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
[문제 2-ⅰ]	사인법칙을 적용하여 삼각형의 각을 구할 수 있다.	5점
[문제 2-ii]	코사인법칙과 삼각형의 성질을 결합하여 원하는 변의 길이를 구할 수 있다.	10점
[문제 2-iii]	코사인법칙과 삼각형의 기본 성질을 정수 조건과 결합하고 연립 이차 방정식을 유도하여 원하는 변의 길이를 구할 수 있다.	12점
[문제 2-iv]	코사인법칙과 삼각형의 기본적 성질 및 정수 조건을 결합하여 원하는 변의 길이를 구할 수 있다.	13짐

7. 예시 답안

[문제 2 - ⅰ] 사인법칙에 의해서

$$\frac{\sqrt{3}a}{\sin A}=2a$$

이므로

$$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

따라서 $\angle A=\frac{\pi}{3}$ 이다.

[문제 2 - ii]

편의상 $x=\overline{\mathrm{AB}}$, $y=\overline{\mathrm{AC}}$라 두자.

정삼각형일 때 $x=y=10\sqrt{3}$이고, <제시문 2>의 (3)에 의해 $y\le x$ 이므로

$$x\ge 10\sqrt{3}$$

임을 알 수 있다. 한편 x는 지름보다 클 수 없으므로

$$x\le 20$$

따라서

$$10\sqrt{3}\le x\le 20$$

양변을 제곱하면,

$$300\le x^2\le 400$$

이를 만족하는 양의 정수는

$$x=18,19,20 \qquad (1)$$

한편 A는 예각이므로 **[문제 1 - ⅰ]**에 의해

$$\cos A=\frac{1}{2}$$

따라서 코사인법칙 이용하면

$$x^2+y^2-xy=300 \qquad (2)$$

이다. (1), (2) 로부터 다음의 세 가지 경우를 생각할 수 있다.

$x=18$ 일 때 $y^2-18y+24=0$ 이고 18보다 작은 양수 해는 $y=9\pm\sqrt{57}$

$x=19$ 일 때 $y^2-19y+61=0$ 이고 19보다 작은 양수 해는 $y=\dfrac{19\pm3\sqrt{13}}{2}$

$x=20$ 일 때 $y^2-20y+100=0$ 이므로 $y=10$

따라서 구하는 순서쌍은 $(20,10)$ 이다.

[문제 2-iii]

편의상 $x=\overline{\mathrm{AB}}$, $y=\overline{\mathrm{AC}}$라 두자.

두 변의 합은 나머지 한 변 보다 커야 하므로

$$x+y>\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{30}$$

x,y가 지름보다 클 수는 없으므로

$$x+y\le 2\sqrt{10}+2\sqrt{10}=4\sqrt{10}$$

따라서

$$M=6,7,8,9,10,11,12$$

만 고려하면 된다.

(1) $M=6$ 일 때

코사인법칙에 의해

$$x^2+y^2-xy=30$$

가 성립한다.

$x+y=6$ 를 대입하면

$$x^2-6x+2=0$$

혹은

$$y^2-6y+2=0$$

따라서 x,y 는

$$X^2-6X+2=0$$

의 두 근이다. 이를 풀면 $x=3+\sqrt{7}$, $y=3-\sqrt{7}$

마찬가지로 계산하면

(2) $M=7$ 일 때 $3X^2-21X+19=0$ 이고 해는 $x=\dfrac{21+\sqrt{213}}{6}$, $y=\dfrac{21-\sqrt{213}}{6}$,

(3) $M=8$ 일 때 $3X^2-24X+34=0$ 이고 해는 $x=\dfrac{12+\sqrt{42}}{3}$, $y=\dfrac{12-\sqrt{42}}{3}$

(4) $M=9$ 일 때 $X^2-9X+17=0$ 이고 해는 $x=\dfrac{9+\sqrt{13}}{2}$, $y=\dfrac{9-\sqrt{13}}{2}$

(5) $M=10$ 일 때 $3X^2-30X+70=0$ 이고 해는 $x=\dfrac{15+\sqrt{15}}{3}$, $y=\dfrac{15-\sqrt{15}}{3}$

(6) $M=11$ 일 때 $3X^2-33X+91=0$ 이고 실근을 가지지 않는다.

(7) $M=12$ 일 때 $X^2-12X+38=0$ 이고 해는 실근을 가지지 않는다.

따라서 가능한 값은 $M=6,7,8,9,10$ 이고 구하는 값은 $6+7+8+9+10=40$

[문제 2-ⅳ]

편의상 $x=\overline{\mathrm{AB}}$, $y=\overline{\mathrm{AC}}$라 두자.

x,y 가 모두 지름보다 클 수는 없으므로 $xy\le 2\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}=8$

따라서 $N=1,2,\cdots,8$ 만 고려하면 된다.

(1) $N=1$ 일 때: $xy=1$ 를 코사인법칙

$$x^2+y^2-xy=6$$

에 대입하여 y를 소거하면

$$x^4-7x^2+1=0$$

을 얻는다. 마찬가지 방법으로 x를 소거하면

$$y^4-7y^2+1=0$$

따라서 x^2,y^2는 다음 방정식을 만족한다.

$$X^2-7X+1=0$$

이를 풀면 $x^2=\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}$, $y^2=\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}$ 이다.

마찬가지로 계산하면

(2) $N=2$ 일 때 $X^2-8X+4=0$ 이고 그 해는 $x^2=4+2\sqrt{3}$, $y^2=4-2\sqrt{3}$

(3) $N=3$ 일 때 $X^2-9X+9=0$ 이고 그 해는 $x^2=\dfrac{9+3\sqrt{5}}{2}$, $y^2=\dfrac{9-3\sqrt{5}}{2}$

(4) $N=4$ 일 때 $X^2-10X+16=0$ 이고 그 해는 $x^2=8$, $y^2=2$

(5) $N=5$ 일 때 $X^2-11X+25=0$ 이고 그 해는 $x^2=\dfrac{11+\sqrt{21}}{2}$, $y^2=\dfrac{11-\sqrt{21}}{2}$

(6) $N=6$ 일 때 $X^2-12X+36=0$ 이고 그 해는 $x^2=6$, $y^2=6$

(7) $N=7$ 일 때 $X^2-13X+49=0$ 이고 이 방정식은 실근을 가지지 않는다.

(8) $N=8$ 일 때 $X^2-14X+64=0$ 이고 이 방정식은 실근을 가지지 않는다.

따라서 문제의 조건을 만족하는 N 은 $N=1,2,3,5$ 이고 구하는 값은 $N=1+2+3+5=11$이다.

문항카드 9

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	2023학년도 수시모집 논술우수전형	
계열(과목) / 문항번호	자연계 1교시 / 3번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 I
	핵심개념 및 용어	삼각함수, 등비수열, 수학적 귀납법
예상 소요 시간	30 분 / 전체 100 분	

2. 문항 및 제시문

[문제 3] 다음 <제시문 1> ~ <제시문 3>을 읽고 [문제 3-ⅰ] ~ [문제 3-ⅲ]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (30점)

<제시문 1>

자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(a) $n=1$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다.

(b) $n=k$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때에도 명제 $p(n)$이 성립한다.

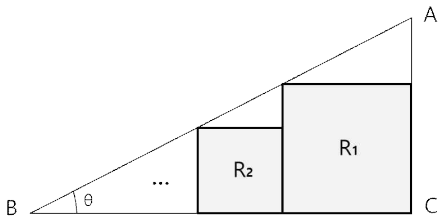
<제시문 2>

삼각함수 사이에는 다음의 관계가 성립한다.

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \qquad \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

<제시문 3>

삼각형 ABC는 $\angle ACB=90^\circ$이고 $\angle ABC=\theta$인 직각삼각형이다. 오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC의 내부에 정사각형 $R_1, R_2, R_3, \cdots$을 계속해서 만들어 나간다. 이때, 정사각형 R_n의 넓이를 s_n이라고 하자. 2 이상인 자연수 n에 대하여 이와 같이 정의된 정사각형 $R_1, R_2, \cdots, R_n$ 중에서, 모든 홀수 번째 정사각형의 넓이의 합을 P_n이라 하고 모든 짝수 번째 정사각형의 넓이의 합을 Q_n이라 하자. (단, 정사각형 R_1의 한 변의 길이는 1이다.)



[문제 3-ⅰ] <제시문 3>에서 정의된 수열 $\{s_n\}$과 $t=\tan\theta$에 대해, 일반항 s_n을 n과 t에 대한 식으로 표현하고 그 이유를 논하시오.

[문제 3-ⅱ] <제시문 3>에서 $\theta=\frac{\pi}{3}$일 때, $\frac{P_{2023}}{Q_{2023}}+\frac{Q_{2021}}{P_{2021}}$의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

[문제 3-ⅲ] <제시문 3>에서 정의된 2023개의 정사각형 $R_1, R_2, \cdots, R_{2023}$ 중에서, 1012개의 홀수 번째 정사각형의 넓이의 평균값 $\frac{P_{2023}}{1012}$과 1011개의 짝수 번째 정사각형의 넓이의 평균값 $\frac{Q_{2023}}{1011}$의 대소관계를 <제시문 1>의 수학적 귀납법과 [문제 3-ⅱ]를 이용하여 판단하고, 그 이유를 논하시오.

3. 출제 의도

주기적으로 나타나는 자연현상과 사회현상으로부터 다양한 규칙성을 찾아 일반화된 식으로 표현하는 데 있어 삼각함수와 등차수열, 등비수열은 강력한 수학적 도구를 제공한다. 또한, 이러한 식을 수학적으로 정당화하기 위해 수학적 귀납법이 사용되며 이를 통해 다양한 추론 능력을 키울 수 있다. 본 문항에서는 이러한 전반적인 귀납적 사고능력을 평가하고자 하였으며, 교과과정에서 흔히 등장하는 삼각형에 내접하는 정사각형으로부터 유도되는 특정 등비수열을 사용하였다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2020-236호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	관련 성취기준
제시문 1	**[수학 I] - (3) 수열 - 3 수학적 귀납법** [12수학 I 03-06] 수열의 귀납적 정의를 이해한다.
제시문 2	**[수학 I] - (2) 삼각함수 - 1 삼각함수** [12수학 I 02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
제시문 3	**[수학 I] - (2) 삼각함수 - 1 삼각함수** [12수학 I 02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
문제 3-ⅰ	**[수학 I] - (2) 삼각함수 - 1 삼각함수** [12수학 I 02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. **[수학 I] - (3) 수열 - 1 등차수열과 등비수열** [12수학 I 03-03] 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
문제 3-ⅱ	**[수학 I] - (2) 삼각함수 - 1 삼각함수** [12수학 I 02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. **[수학 I] - (3) 수열 - 1 등차수열과 등비수열** [12수학 I 03-03] 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
문제 3-ⅲ	**[수학 I] - (3) 수열 - 3 수학적 귀납법** [12수학 I 03-08] 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수
고등학교 교과서	수학 I	황선욱 외 8인	미래엔	2020	69-95, 130-136, 155-169
	수학 I	권오남 외 14인	(주)교학사	2020	74-96, 126-132, 152-163
기타					

5. 문항 해설

[문제 3-ⅰ] : 삼각함수의 성질과 등비수열의 정의를 사용하여, 특정한 정사각형의 넓이를 등비수열의 일반항으로 표현할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

[문제 3-ⅱ] : 삼각함수의 뜻과 특정 비로 주어지는 값을 간단하게 표현하고 계산할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

[문제 3-ⅲ] : 자연수에 대한 특정 명제가 성립함을, 수학적 귀납법을 사용하여 보일 수 있는지를 평가하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
[문제 3-ⅰ]	삼각함수를 이용하여 R_n과 R_{n+1}의 한 변 사이의 관계식을 파악하고, 수열 $\{s_n\}$의 일반항을 보인다.	8 점
[문제 3-ⅱ]	삼각함수의 값을 구하고, 이를 통해 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	10 점
[문제 3-ⅲ]	문제해결을 위한 명제를 수립하고, 이를 수학적 귀납법을 이용하여 보일 수 있다.	12 점

7. 예시 답안

[문제 3 - ⅰ]

정사각형 R_n의 한 변의 길이를 r_n이라고 할 때, 다음의 식을 얻을 수 있다.

$r_2\tan\theta + r_2 = r_1$이므로 $r_2 = \left(\frac{1}{1+t}\right)r_1$

$r_3\tan\theta + r_3 = r_2$이므로 $r_3 = \left(\frac{1}{1+t}\right)r_2$ 이런 과정을 반복하면

$r_4 = \left(\frac{1}{1+t}\right)r_3$

$\vdots$

$r_{n+1} = \left(\frac{1}{1+t}\right)r_n$

따라서 수열 $\{r_n\}$의 공비는 $\frac{1}{1+t}$, $r_1 = 1$이다.

그러므로 $r_n = \left(\frac{1}{1+t}\right)^{n-1}$이다.

즉, $s_n = (r_n)^2 = \left(\frac{1}{1+t}\right)^{2n-2}$이다.

[문제 3 - ⅱ]

상수 $\alpha = \left(\frac{1}{1+t}\right)^2$라고 하면,

$$\begin{aligned}\frac{P_{2023}}{Q_{2023}} + \frac{Q_{2021}}{P_{2021}} &= \frac{1+\alpha^2+\cdots+\alpha^{2022}}{\alpha+\cdots+\alpha^{2021}} + \frac{\alpha+\cdots+\alpha^{2019}}{1+\alpha^2+\cdots+\alpha^{2020}} \\ &= \frac{1+\alpha^2+\cdots+\alpha^{2020}}{\alpha+\cdots+\alpha^{2021}} + \frac{\alpha^{2021}+(\alpha+\cdots+\alpha^{2019})}{1+\alpha^2+\cdots+\alpha^{2020}} \\ &= \frac{1}{\alpha}+\alpha\end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 삼각형 AOB에서 $\theta=\frac{\pi}{3}$이므로, $t=\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$이고 $\frac{1}{1+t}=\frac{1}{1+\sqrt{3}}$이다.

따라서, $\alpha=\left(\frac{1}{1+t}\right)^2=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$이고 $\frac{1}{\alpha}+\alpha=5+\frac{3}{2}\sqrt{3}$이다.

[문제 3-iii]

[문제 3-ii]에서와 같이, 임의의 자연수 n에 대하여

$$\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}+\frac{Q_{2n-1}}{P_{2n-1}}=\alpha+\frac{1}{\alpha}$$

이 성립함을 알 수 있고, $\alpha\neq 1$이므로 $\alpha+\frac{1}{\alpha}>2$ 임을 알 수 있다.

이제 수학적 귀납법을 사용하여 다음의 명제를 모든 자연수 n에 대해 보이자.

$$p(n):\ \frac{P_{2n+1}}{n+1}>\frac{Q_{2n+1}}{n}\ \text{이 성립한다.}$$

$n=1$ 일 때, $\frac{P_3}{2}=\frac{1+\alpha^2}{2}$이고 $\frac{Q_3}{1}=\alpha$이므로, 주어진 명제는 $\frac{1+\alpha^2}{2}>\alpha$와 동일하고, 이는 $(\alpha-1)^2>0$으로부터 얻어진다. 즉, $p(1)$이 성립한다.

이제 $p(k)$가 성립한다고 가정하자. 그러면, $\frac{P_{2k+1}}{k+1}>\frac{Q_{2k+1}}{k}$이 성립한다. 이때,

$$\begin{aligned}\frac{P_{2k+3}}{k+2}-\frac{Q_{2k+3}}{k+1}&>\frac{Q_{2k+3}}{k+2}\left(2-\frac{Q_{2k+1}}{P_{2k+1}}\right)-\frac{Q_{2k+3}}{k+1} \qquad \left(\because \frac{P_{2k+3}}{Q_{2k+3}}=\alpha+\frac{1}{\alpha}-\frac{Q_{2k+1}}{P_{2k+1}}>2-\frac{Q_{2k+1}}{P_{2k+1}}\right)\\ &=\frac{kQ_{2k+3}}{(k+2)P_{2k+1}}\left(\frac{P_{2k+1}}{k+1}-\frac{Q_{2k+1}}{k}\right)\\ &>0\end{aligned}$$

이 성립하므로, $p(k+1)$이 성립함을 알 수 있다. 따라서, 수학적 귀납법에 의해 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대해 성립한다는 사실을 도출할 수 있고, 특히 $n=1011$일 때 $\frac{P_{2023}}{1012}>\frac{Q_{2023}}{1011}$이 성립한다고 결론지을 수 있다.

문항카드 10

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	2023학년도 수시모집 논술우수전형	
계열(과목) / 문항번호	자연계 2교시 / 1번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학 I
	핵심개념 및 용어	인수분해, 등차수열, 등비수열
예상 소요 시간	30 분 / 전체 100 분	

2. 문항 및 제시문

[문제1] 다음 <제시문 1> ~ <제시문 3>을 읽고 [문제 1-ⅰ] ~ [문제 1-ⅲ]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (30점)

<제시문1>

첫째항부터 차례대로 일정한 수를 더하여 만든 수열을 등차수열이라 하며, 그 일정한 수를 공차라고 한다. 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$에서 제n항에 공차 d를 더하면 제$(n+1)$항이 되므로 다음이 성립한다.

$$a_{n+1}=a_n+d \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

<제시문2>

첫째항부터 차례대로 일정한 수를 곱하여 만든 수열을 등비수열이라 하며, 그 일정한 수를 공비라고 한다. 공비가 r $(r\neq 0)$인 등비수열 $\{a_n\}$에서 제n항에 공비 r를 곱하면 제$(n+1)$항이 되므로 다음이 성립한다.

$$a_{n+1}=ra_n \quad (r\neq 0,\ n=1,2,3,\cdots)$$

<제시문3>

세 개의 정수로 이루어진 순서쌍의 집합 M을 다음과 같이 정의하자.

$$M=\{(a,b,c)\,|\,a,b,c\text{는 정수이고 } 1\leq |a|,|b|,|c|\leq 100\}$$

이때, 집합 M의 원소의 개수는 200^3이다.

[문제 1-ⅰ] 삼각형의 세 변의 길이가 각각 100이하의 자연수이면서 등차수열을 이루는 삼각형의 개수를 구하고 그 이유를 논하시오. (단, 합동인 두 삼각형은 한 개의 삼각형으로 간주한다.)

[문제 1-ⅱ] 삼각형의 세 변의 길이가 각각 100이하의 자연수이면서 등비수열을 이루는 삼각형의 개수를 구하고 그 이유를 논하시오. (단, 합동인 두 삼각형은 한 개의 삼각형으로 간주하며, $\sqrt{5}=2.236\cdots$이다.)

[문제 1-ⅲ] <제시문 3>에서 정의된 집합 M의 원소 (a,b,c) 중에서 다음의 조건을 모두 만족하는 모든 원소의 개수를 구하고 그 이유를 논하시오.

(가) a,b,c는 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

(나) a,b,c를 일렬로 나열하여 적어도 한 개의 등비수열을 만들 수 있다. 예를 들어, $(a,b,c)=(1,2,3)$인 경우 a,b,c를 일렬로 나열하는 방법은 다음의 여섯 가지가 있다.

① $1,2,3$ ② $1,3,2$ ③ $2,1,3$ ④ $2,3,1$ ⑤ $3,1,2$ ⑥ $3,2,1$

3. 출제 의도

삼각형은 학생뿐 아니라 일반인에게도 매우 익숙한 수학적 대상인 동시에, 여러 자연현상을 수학적으로 모델링 하는데 있어 매우 유용하다. 또한, 자연현상과 사회현상에 내재되어 있는 규칙성을 발견하기 위해 수집된 여러 데이터를 수열로 표현하는 것은 다양한 수학적 도구를 활용가능하게 하여, 매우 중요한 프로세스라고 할 수 있다. 본 문항에서는 수열 중 대표적으로 중요한 등차수열과 등비수열이라는 개념을 삼각형의 세 변이라는 데이터에 적용하여, 문제해결 능력을 평가하고자 하였다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2020-236호 [별책8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	관련 성취기준
제시문 1	**[수학 I] - (3) 수열 - ① 등차수열과 등비수열** [12수학 I 03-02] 등차수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
제시문 2	**[수학 I] - (3) 수열 - ① 등차수열과 등비수열** [12수학 I 03-03] 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
제시문 3	**[수학] - (4) 집합과 명제 - ① 집합** [10수학03-01] 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다.
문제 1-i	**[수학 I] - (3) 수열 - ① 등차수열과 등비수열** [12수학 I 03-02] 등차수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
문제 1-ii	**[수학 I] - (3) 수열 - ① 등차수열과 등비수열** [12수학 I 03-03] 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
문제 1-iii	**[수학] - (1) 다항식 - ③ 인수분해** [10수학01-04] 다항식의 인수분해를 할 수 있다. **[수학] - (4) 집합과 명제 - ① 집합** [10수학03-01] 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다. **[수학] - (5) 경우의 수 - ① 경우의 수** [10수학05-01] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다. **[수학] - (5) 경우의 수 - ② 순열과 조합** [10수학05-02] 순열의 의미를 이해하고, 순열의 수를 구할 수 있다. **[수학 I] - (3) 수열 - ① 등차수열과 등비수열** [12수학 I 03-02] 등차수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. [12수학 I 03-03] 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수
고등학교 교과서	수학	류희찬 외 10인	천재교과서	2021	30-39, 166-173
	수학	황선욱 외 8인	미래엔	2020	34-45, 175-191
	수학 I	권오남 외 14인	(주)교학사	2020	114-163
	수학 I	황선욱 외 8인	미래엔	2020	120-169
기타					

5. 문항 해설

[문제 1-ⅰ] 등차수열의 정의를 이용하여, 삼각형의 세 변의 길이가 자연수이면서 등차수열을 이룰 수 있는 경우를 구할 수 있는지 평가하는 문제이다.

[문제 1-ⅱ] 등비수열의 정의를 이용하여, 삼각형의 세 변의 길이가 자연수이면서 등비수열을 이룰 수 있는 경우를 구할 수 있는지 평가하는 문제이다.

[문제 1-ⅲ] 세 개의 자연수가 적당한 재배열을 통해, 등차수열을 이루면서 동시에 등비수열을 이룰 수 있는 경우를 구할 수 있는지 평가하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
[문제 1-ⅰ]	등차수열의 정의와 일반항을 활용하여, 삼각형의 세 변의 길이를 유도하고, 등차수열의 합을 계산할 수 있다.	8 점
[문제 1-ⅱ]	등비수열의 정의와 일반항을 활용하여, 삼각형의 세 변의 길이를 유도할 수 있다.	10 점
[문제 1-ⅲ]	등차수열과 등비수열이 동시에 대한 경우를 유도할 수 있다.	12 점

7. 예시 답안

[문제 1-ⅰ]

삼각형의 세 변의 길이 a, b, c가 $a \le b \le c$라고 가정하고 공차가 d인 등차수열의 연속하는 세 항이라고 하면, $b = a+d$와 $c = a+2d$이다. 이때, 문제의 조건 $c = a+2d \le 100$로부터 $a \le 100-2d$를 얻는다. 또한, 삼각형의 세 변이 만족해야하는 부등식 $a+b > c$로부터 $a+(a+d) > a+2d$를 얻을 수 있고, $2a+d \ge a+2d+1$이 성립한다. 따라서, 다음의 부등식을 얻는다.

$$d+1 \le a \le 100-2d \qquad (*)$$

이로부터 $d+1 \le 100-2d$가 성립하고, $0 \le d \le 33$을 얻는다. 이를 만족하는 각각의 d에 대해, (*)를 만족하는 a값의 개수는 $(100-2d)-d = 100-3d$이다.

따라서, 문제의 삼각형의 개수는

$$\sum_{d=0}^{33}(100-3d) = 100\times 34 - \frac{3\times 34\times 33}{2}$$
$$= 1717$$

이다.

[문제 1-ⅱ]

삼각형의 세 변의 길이 a, b, c가 $a \le b \le c$라고 가정하고 공비가 r인 등비수열의 연속하는 세 항이라고 하면, 실수 $r \ge 1$에 대해 $b = ar$와 $c = ar^2$이다. 삼각형 세 변의 조건으로부터 부등식 $a+b > c$를 얻는다. 이 부등식은 $a+ar > ar^2$이므로, $r^2-r-1 < 0$을 얻는다. 따라서, r의 범위

$$1 \le r < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

를 얻을 수 있다. 여기서 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1.618\cdots$이다.

(가) 먼저 $r=1$일 때, $a=b=c$는 등비수열을 이루므로, $1\le a=b=c\le 100$의 총 100가지 경우가 존재한다.

(나) 이제 $r\neq 1$, 즉 $1<r<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$이라고 가정하자. 자연수 a에 대하여 ar도 자연수이므로, $r=\frac{q}{p}$라고 둘 수 있다 (여기서, p와 q는 $2\le p<q$를 만족하는 서로소인 자연수). 또, $ar^2=\frac{aq^2}{p^2}$도 자연수이므로, 어떤 자연수 A에 대해 $a=p^2A$임을 알 수 있다. 이때, 문제의 조건으로부터 $p^2\le p^2A=a\le 100$를 얻게 되고 $p\le 10$을 얻을 수 있다. $p=10$인 경우, $a=100$이 되고 $b=ar>100$이 되어 가능하지 않다. 따라서, 가능한 p의 값은 다음과 같다.

$$2,3,4,5,6,7,8,9$$

각각의 p에 대해 $r=\frac{q}{p}<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$를 만족하고 $ar^2=Aq^2\le 100$이 되는 q의 값을 구한 뒤, 각각의 순서쌍 (p,q)에 대해 자연수 A는 $1\le A\le\frac{100}{q^2}$를 만족하므로, 가능한 A의 개수를 구하면 다음과 같다.

(p,q)	$(2,3)$	$(3,4)$	$(4,5)$	$(5,6)$	$(5,7)$	$(5,8)$
가능한 A의 개수	11	6	4	2	2	1
(p,q)	$(6,7)$	$(7,8)$	$(7,9)$	$(7,10)$	$(8,9)$	$(9,10)$
가능한 A의 개수	2	1	1	1	1	1

이들의 합은 33이므로, 문제에서 구하고자 하는 삼각형의 개수는 $100+33=133$가지이다.

[문제 1-iii]

자연수 a,b,c가 이 순서대로 등차수열의 연속하는 세 항이라고 하면, $2b=a+c$가 성립한다.

이 세 수를 일렬로 나열하는 방법은 다음과 같이 6가지가 존재한다.

$$abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab,\ cba$$

이 순서대로 등비수열의 연속하는 세 항이 되는 조건을 고려하자.

만약, abc가 등비수열을 이룬다면 cba도 등비수열을 이룬다. 마찬가지로 acb가 등비수열을 이룬다면 bca도 등비수열을 이루고, cab가 등비수열을 이룬다면 bac도 등비수열을 이룬다. 따라서, abc, acb, cab가 등비수열을 이루는 경우만 고려하면 된다.

(가) abc 순서대로 등비수열을 이룬다면, $b^2=ac$이다. 이로부터 $4ac=4b^2=(a+c)^2$을 얻게 되고, $(a-c)^2=0$을 얻게 된다. 따라서, $a=b=c$이고, 이 경우의 가짓수는 200가지이다.

(나) acb 순서대로 등비수열을 이룬다면, $c^2=ab$이다. 이로부터 $a(a+c)=2ab=2c^2$을 얻게 되고, $(a-c)(a+2c)=a^2+ac-2c^2=0$이 되어, $a=c$ 또는 $a=-2c$이다. $a=c$인 경우, $a=b=c$를 얻게 되어 이미 고려되었다. $a=-2c$인 경우, $c=-2b$가 되어 $a:b:c=4:1:-2$가 된다. 이 경우의 가

짓수는 $2\times\frac{100}{4}=50$가지이다.

(다) cab 순서대로 등비수열을 이룬다고 가정하자. abc가 등차수열을 이루므로, cba도 등차수열을 이룬다. 이 경우, (나)에 의해 $c:b:a=4:1:-2$가 된다. 즉, $a:b:c=-2:1:4$가 되어, 이 경우의 가짓수는 마찬가지로 50가지이다.

(가), (나), (다)의 세 경우를 모두 합하면, 300개의 순서쌍이 존재함을 알 수 있다.

문항카드 11

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	2023학년도 수시모집 논술우수전형	
계열(과목) / 문항번호	자연계 2교시 / 2번	
출제 범위	**수학과 교육과정 과목명**	수학I, 수학II
	핵심개념 및 용어	삼각함수, 삼각함수의 그래프, 도함수
예상 소요 시간	30분 / 전체 100분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2] 다음 <제시문 1>과 <제시문 2>를 읽고 [문제 2-ⅰ] ~ [문제 2-ⅲ]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (30점)

<제시문 1>

모든 실수 x에 대하여 다음이 성립한다.

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$$

$$\cos(x+\pi)=-\cos x$$

$$\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)=\sin x$$

$$\cos(x+2\pi)=\cos x$$

<제시문 2>

모든 실수 x에 대하여 다음이 성립한다.

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1$$

[문제 2-ⅰ] 방정식 $4\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)=1$ 이 $0<x<\frac{\pi}{4}$에서 해를 갖도록 하는 2023 이하의 자연수 n의 개수를 구하고 그 이유를 논하시오.

[문제 2-ⅱ] 방정식 $6\cos^2\left(x+\frac{m\pi}{2}\right)+\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)=5$ 가 $0<x<\frac{\pi}{4}$에서 해를 갖도록 하는 순서쌍 (m,n)의 개수를 구하고 그 이유를 논하시오. (단, m, n은 23 이하인 자연수이다.)

[문제 2-ⅲ] 방정식 $8\cos^4\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)-7\cos^2\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)+3\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)=1$ 이 $0<x<\frac{\pi}{4}$에서 해를 갖도록 하는 2023 이하의 자연수 n의 개수를 구하고 그 이유를 논하시오.

3. 출제 의도

본 문제는 삼각함수의 성질을 이용하고 도함수의 성질을 이용하여 방정식의 해의 존재성을 판별할 수 있는지를 평가하고자 한다.

[문제 2-ⅰ] 주어진 정의역에서 삼각함수의 크기의 범위를 구할 수 있는지 평가하는 문제이다.
[문제 2-ⅱ] 삼각함수의 성질을 이용하여 방정식의 해를 구할 수 있는지 평가하는 문제이다.
[문제 2-ⅲ] 도함수의 성질을 이용하여 방정식의 해의 존재성을 판별할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2020-236호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	관련 성취기준
제시문 1	**[수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수** [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
제시문 2	**[수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수** [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
문제 2-ⅰ	**[수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수** [12수학Ⅰ02-01] 일반각과 호도법의 뜻을 안다. **[수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수** [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
문제 2-ⅱ	**[수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수** [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
문제 2-ⅲ	**[수학] - (2) 방정식과 부등식 - ⑥ 여러 가지 방정식과 부등식** [10수학Ⅰ01-12] 간단한 삼차방정식과 사차방정식을 풀 수 있다. **[수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수** [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. **[수학Ⅱ] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용** [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [12수학Ⅱ02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수
고등학교 교과서	수학 Ⅰ	고성은 외 6인	좋은책 신사고	2021	70-87
	수학 Ⅱ	김원경 외 14인	비상교육	2021	86-92
기타					

5. 문항 해설

삼각함수는 다항식이 아닌 함수 중 매우 유용한 함수로 여러 가지 중요한 성질들을 갖고 있다. 본 문제에서는 삼각함수의 성질을 잘 활용하여 삼각함수로 주어진 식을 다항식으로 변형하고 이를 통해 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다. 또한 정의역이 범위가 주어졌을 때 삼각함수가 취할 수 있는 값의 범위를 알아낼 수 있는지를 평가하고 다항식으로 주어진 함수의 그래프를 그려 방정식의 해가 주어진 구간 안에 존재하는지를 평가한다.

6. 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
[문제 2-ⅰ]	정의역이 주어진 경우 삼각함수의 범위를 계산할 수 있다.	4 점
[문제 2-ii]	삼각함수의 성질을 이용하여 식을 변형할 수 있고 정의역이 주어진 경우 삼각함수의 범위를 계산할 수 있다.	14 점
[문제 2-iii]	도함수를 이용하여 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. 정의역이 주어진 경우 삼각함수의 범위를 계산할 수 있다.	12 점

7. 예시 답안

[문제 2-ⅰ]

<제시문 1>로부터 다음을 알 수 있다. (단, k는 정수)

$$\cos(x+\frac{n\pi}{2})=\begin{cases}\cos x & n=4k \text{ 일때}\\ \cos(x+\frac{\pi}{2})=-\sin x & n=4k+1 \text{ 일때}\\ \cos(x+\pi)=-\cos x & n=4k+2 \text{ 일때}\\ \cos(x+\frac{3\pi}{2})=\sin x & n=4k+3 \text{ 일때}\end{cases}$$

또한

$0<x<\frac{\pi}{4}$일 때 $\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos x<1,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}<-\sin x<0,\ -1<-\cos x<-\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0<\sin x<\frac{\sqrt{2}}{2}$ (*)

이고 $\frac{\sqrt{2}}{2}=0.707\cdots$ 이므로 주어진 식 $\cos(x+\frac{n\pi}{2})=\frac{1}{4}$이 $0<x<\frac{\pi}{4}$에서 해를 가지려면 $n=4k+3$ (k는 정수)를 만족해야 한다. 따라서 조건을 만족하는 양의 정수 n의 개수는 $1\le 4k+3\le 2023$을 만족하는 정수의 개수와 같으므로 정답은 506이다.

[문제 2-ii]

위의 식에 의해 $\cos\left(x+\frac{m\pi}{2}\right)$와 $\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$는 각각 $\pm\cos x$, $\pm\sin x$ 중의 하나와 같다. 따라서

$t=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$라 하면 $\cos^2\left(x+\frac{m\pi}{2}\right)$은 $\cos^2 x$ 또는 $\sin^2 x$이므로 t^2 또는 $1-t^2$이 된다.

(1) $\cos^2\left(x+\frac{m\pi}{2}\right)=t^2$인 경우

이 경우 주어진 식 $6\cos^2(x+\frac{m\pi}{2})+\cos(x+\frac{n\pi}{2})-5=0$은 $6t^2+t-5=(6t-5)(t+1)=0$가 되고 이 식의 해는 $t=-1$과 $t=\frac{5}{6}$이다. 그런데 $0<x<\frac{\pi}{4}$일 때 (*)에 의해 $t=-1$이 될 수 없으므로 해를 가지려면 $t=\frac{5}{6}$이 되어야 한다. 그러면 $\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{5}{6}<1$이므로 (*)에 의해 $t=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)=\cos x$가 되어야 한다. 따라서 $n=4k$ (k는 정수)이다. 또한 $\cos^2\left(x+\frac{m\pi}{2}\right)=t^2=\cos^2 x$이므로

$\cos\left(x+\frac{m\pi}{2}\right)=\pm\cos x$가 되어 $m=4s$ 또는 $m=4s+2$ (s는 정수)을 얻는다. 이 경우 순서쌍 (m,n)의 개수는 $11\cdot 5=55$이다.

(2) $\cos^2\left(x+\frac{m\pi}{2}\right)=1-t^2$인 경우

이 경우 주어진 식 $6\cos^2(x+\frac{m\pi}{2})+\cos(x+\frac{n\pi}{2})-5=0$은 $6(1-t^2)+t-5=-(2t-1)(3t+1)=0$이 되고 이 식의 해는 $t=\frac{1}{2}$과 $t=-\frac{1}{3}$이다. 주어진 조건 $0<x<\frac{\pi}{4}$일 때 이러한 해를 가지려면 (*)에 의해 $t=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$는 $\sin x$ 또는 $-\sin x$가 되어야 한다. 따라서 $n=4k+1$ 또는 $n=4k+3$ (k는 정수)이다. 또한 $\cos^2\left(x+\frac{m\pi}{2}\right)=1-t^2=1-\sin^2 x=\cos^2 x$이므로 $\cos\left(x+\frac{m\pi}{2}\right)=\pm\cos x$가 되어 $m=4s$ 또는 $m=4s+2$ (s는 정수)을 얻는다. 이 경우 순서쌍 (m,n)의 개수는 $11\cdot 12=132$이다.

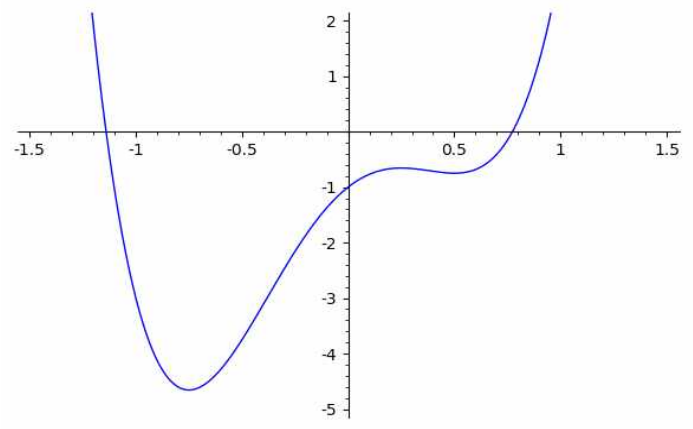
위의 두 가지 경우에 의해 가능한 모든 순서쌍 (m,n)의 개수는 $55+132=187$이다.

[문제 2-iii]

편의상 $t=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$, $f(t)=8t^4-7t^2+3t-1$라 하자. 그러면 t는 $-1\le t\le 1$을 만족하고 주어진 식은 $f(t)=0$로 표현된다. 이 식의 해가 존재하는지 판별하기 위해 함수 $y=f(t)$ $(-1\le t\le 1)$의 그래프의 개형을 알아보자. 이를 위해 우리는 $f'(t)$의 근을 구해야 한다. 만약 $f'(t)=32t^3-14t+3$이 인수분해가 된다면 최고차항의 약수 a와 상수항의 약수 b에 대하여 $f'(t)$가 $at-b$로 나누어 질 것이다. 여기서 $a=2$, $b=1$로 두면 $f'(b/a)=f'(1/2)=4-7+3=0$이므로 실제로 $f'(t)$는 $2t-1$로 나누어진다. 다항식의 나눗셈을 이용하여 우리는 $f'(t)=32t^3-14t+3=(2t-1)(4t^2+4t-3)=(2t-1)(4t+3)(4t-1)$을 얻을 수 있다. 따라서 $f'(t)$의 근은 $-\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$이고 $f(t)$는 최고차항의 계수가 양수인 사차함수이므로 $f(t)$는 구간 $(-\infty,-\frac{3}{4}]$에서 감소, 구간 $[-\frac{3}{4},\frac{1}{4}]$에서 증가, 구간 $[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$에서 감소, 구간 $[\frac{1}{2},\infty)$에서 증가한다. 또한

$f(-1)=8-7-3-1=-3<0$, $f(-\frac{3}{4})=\frac{8\cdot 3^4}{4^4}-\frac{7\cdot 9}{16}-\frac{9}{4}-1<0$, $f(\frac{1}{4})=\frac{8}{4^4}-\frac{7}{16}+\frac{3}{4}-1<0$,

$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}-\frac{7}{4}+\frac{3}{2}-1<0$, $f(1)=8-7+3-1=3>0$이므로 함수 $y=f(t)$의 그래프는 아래와 같이 그려진다.



따라서 $-1 \le t \le 1$일 때 $f(t)=0$의 해는 구간 $[\frac{1}{2},1]$에서 유일하게 존재한다. 또한 $f(t)$는 이 구간에서 증가하고 $f(\frac{\sqrt{2}}{2})=2-\frac{7}{2}+3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-1=-\frac{5}{2}+2.12\cdots<0$이므로 해는 구간 $(\frac{\sqrt{2}}{2},1]$에 존재한다. 그런데 $t=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$이고 $0<x<\frac{\pi}{4}$일 때 $\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos x<1,\ 0<\sin x<\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-1<-\cos x<-\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}<-\sin x<0$이므로 주어진 식이 해를 가지려면 $n=4k$ (k는 정수)를 만족해야 한다. 따라서 조건을 만족하는 양의 정수 n의 개수는 505 이다.

문항카드 12

1. 일반 정보

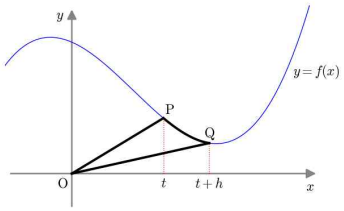
유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	2023학년도 수시모집 논술우수전형	
계열(과목) / 문항번호	자연계 2교시 / 3번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학II
	핵심개념 및 용어	정적분, 정적분의 활용, 미분계수, 도함수의 활용
예상 소요 시간	40분 / 전체 100 분	

2. 문항 및 제시문

[문제 3] 다음 <제시문 1>과 <제시문 2>를 읽고 [문제 3-ⅰ] ~ [문제 3-ⅳ]를 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (40점)

<제시문1>

상수 a, b, c, d에 대하여 삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$가 있다 (단, a, d는 양수). 실수 t와 양수 h에 대해 원점 O와 두 점 $\mathrm{P}(t, f(t)), \mathrm{Q}(t+h, f(t+h))$를 각각 잇는 선분 OP, OQ가 있다. 다음 그림과 같은 방식으로 $y=f(x)$의 그래프의 점 P에서 점 Q까지의 부분과 선분 OP, OQ로 둘러싸인 도형의 넓이를 $p(h)$라 하고 $A(t)=\lim_{h\to 0+}\frac{p(h)}{h}$라 하자.



<제시문2>

<제시문1>에서 정의된 함수 $A(t)$가 다음의 조건을 모두 만족한다.

(가) 방정식 $A(t)=0$이 두 개의 실근 α와 β만을 갖는다 (단, $\alpha<\beta$).

(나) 함수 $A(t)$는 $t=\beta$에서 미분가능하지 않다.

(다) 함수 $A(t)$는 극댓값 16을 갖는다.

(라) $\int_0^{2\beta} A(t)dt=38$이다.

[문제 3-ⅰ] <제시문 1>에서 주어진 함수 $f(x)$에 대하여 $\int_0^1 f(x)dx$의 값을 a, b, c, d를 사용하여 표현하고 그 이유를 논하시오.

[문제 3-ⅱ] <제시문 1>에서 주어진 함수 $A(t)$를 a, b, c, d와 t를 사용하여 표현하고 그 이유를 논하시오.

[문제 3-ⅲ] <제시문 1>에서 주어진 함수 $A(t)$가 <제시문 2>의 조건을 만족할 때, α, β와 a의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

[문제 3-ⅳ] <제시문 1>에서 주어진 함수 $f(x)$가 $\int_0^1 f(x)dx=23$을 만족하고 <제시문 1>에서 주어진 함수 $A(t)$가 <제시문 2>의 모든 조건을 만족할 때, a, b, c, d의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

3. 출제 의도

본 문제는 정적분과 넓이와의 관계를 이해하고 도함수의 정의 및 함수의 극대 극소를 이용하여 주어진 문제를 해결할 수 있는지를 평가하고자 한다.

[문제 3-ⅰ] 다항식의 정적분을 계산할 수 있는지를 평가하는 문제이다.
[문제 3-ⅱ] 정적분과 넓이와의 관계를 이해하는지를 평가하는 문제이다.
[문제 3-ⅲ] 함수의 극대 극소 및 미분 가능성을 이용하여 주어진 문제를 해결할 수 있는지를 평가하는 문제이다.
[문제 3-ⅳ] 다항식의 정적분을 계산할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2020-236호 [별책8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	관련 성취기준
제시문 1	**[수학Ⅱ] - (3) 적분 - 3 정적분의 활용** [12수학Ⅱ03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
제시문 2	**[수학Ⅱ] - (2) 미분 - 1 미분계수** [12수학Ⅱ02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.
문제 3-ⅰ	**[수학Ⅱ] - (3) 적분 - 2 정적분** [12수학Ⅱ03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다.
문제 3-ⅱ	**[수학Ⅱ] - (3) 적분 - 3 정적분의 활용** [12수학Ⅱ03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다. **[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - 2 함수의 연속** [12수학Ⅱ01-03] 함수의 연속의 뜻을 안다.
문제 3-ⅲ	**[수학Ⅱ] - (2) 미분 - 1 미분계수** [12수학Ⅱ02-03] 미분가능성과 연속성의 관계를 이해한다. **[수학Ⅱ] - (2) 미분 - 3 도함수의 활용** [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. **[수학Ⅱ] - (3) 적분 - 2 정적분** [12수학Ⅱ03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다.
문제 3-ⅳ	**[수학Ⅱ] - (3) 적분 - 2 정적분** [12수학Ⅱ03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수
고등학교 교과서	수학 Ⅱ	고성은 외 6인	좋은책 신사고	2021	83-91
	수학 Ⅱ	황선욱 외 8인	미래엔	2021	122-141
기타					

5. 문항 해설

정적분은 함수를 이해하는데 중요한 역할을 하는 개념이다. 정적분의 가장 중요한 성질 중의 하나는 함수의 그래프로부터 얻어지는 도형의 넓이를 표현한다는 것이다. 본 문제에서는 정적분을 이용하여 함수의 그래프를 한 부분으로 하는 도형의 넓이를 구할 수 있는지를 평가한다. 넓이는 항상 음이 아닌 실수가 된다는 성질이 있으므로 본 문제에서 주어진 도형의 넓이는 절대값을 이용한 함수로 표현된다. 따라서 이 넓이를 표현하는 함수는 미분가능하지 않은 점이 존재하여 미분가능성을 판단할 수 있는지를 함께 평가한다. 또한 발생할 수 있는 여러 가지 경우를 모두 고려하여 주어진 상황을 논리적으로 설명할 수 있는지를 평가한다.

6. 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
[문제 3-ⅰ]	다항식의 정적분을 계산할 수 있다.	2 점
[문제 3-ⅱ]	정적분과 넓이의 관계를 이해하고 도함수 및 정적분을 계산할 수 있다.	20 점
[문제 3-ⅲ]	미분불가능한 점을 판별하고 극대 극소를 통해 다항함수의 식을 찾을 수 있다.	14 점
[문제 3-ⅳ]	다항식의 정적분을 계산할 수 있다.	4 점

7. 예시 답안

[문제 3 - ⅰ]

다항식의 정적분이므로 다음과 같이 계산된다.

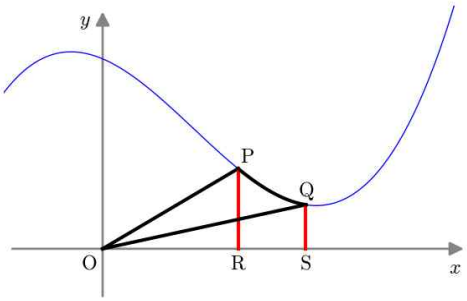
$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (ax^3+bx^2+cx+d)dx = \left[\frac{ax^4}{4}+\frac{bx^3}{3}+\frac{cx^2}{2}+dx\right]_0^1 = \frac{a}{4}+\frac{b}{3}+\frac{c}{2}+d$$

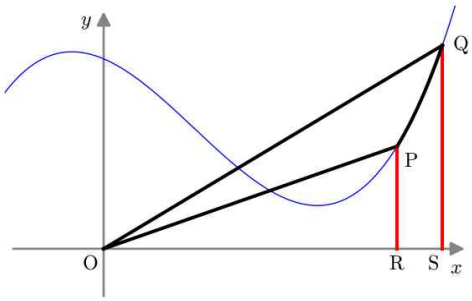
[문제 3 - ⅱ]

이 문제에서는 $f(t) \geq 0$을 가정하자. ($f(t) < 0$인 경우도 비슷하게 할 수 있다.) 편의상 $y=f(x)$의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=t$, $x=t+h$로 둘러싸인 도형의 넓이를 r이라 하자. 그러면 $r=\int_t^{t+h} f(x)dx$이다. 먼저 <제시문 2>에서 주어진 도형의 넓이 $p(h)$에 대한 식을 찾기 위해 $t \geq 0$인 경우와 $t < 0$인 경우를 나누어 생각하자.

(1) $t \geq 0$인 경우

아래 그림과 같이 P,Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 R,S라 하자. (선분 OQ와 선분 OP의 기울기에 따라 두 가지 경우가 있다.)





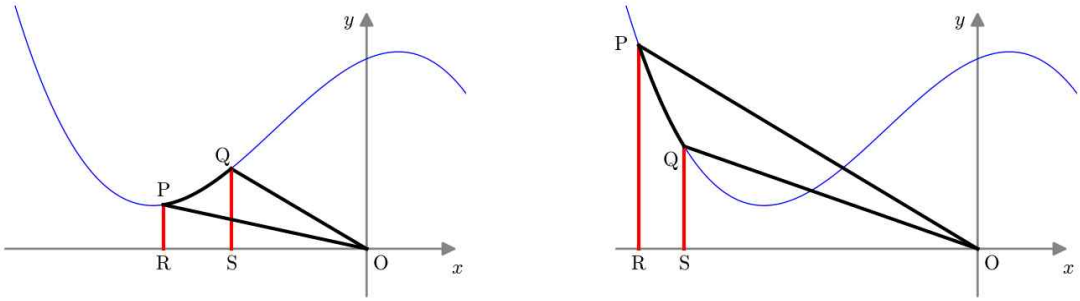
위의 그림에서 볼 수 있듯이 넓이 $p(h)$는 $\Delta OPR+r$과 ΔOQS의 차이와 같으므로

$p(h)=|\Delta OQS-\Delta OPR-r|$이다. 또한 $t\geq 0$이므로 $\Delta OPR=\frac{1}{2}tf(t)$와 $\Delta OQS=\frac{1}{2}(t+h)f(t+h)$이

되어 $p(h)=\left|\frac{1}{2}(t+h)f(t+h)-\frac{1}{2}tf(t)-r\right|$을 얻는다.

(2) $t<0$인 경우

경우 (1)과 마찬가지로 아래와 같은 그림을 생각하자.



위의 그림에서 볼 수 있듯이 $p(h)$는 $\Delta OQS+r$과 ΔOPR의 차이와 같으므로

$p(h)=|\Delta OPR-\Delta OQS-r|$이다. 또한 $t<0$이므로 $\Delta OPR=-\frac{1}{2}tf(t)$와 $\Delta OQS=-\frac{1}{2}(t+h)f(t+h)$이

되어 경우 (1)과 똑같은 식인 $p(h)=\left|\frac{1}{2}(t+h)f(t+h)-\frac{1}{2}tf(t)-r\right|$을 얻는다.

위의 두 가지 경우로부터 항상

$$p(h)=\left|\frac{1}{2}(t+h)f(t+h)-\frac{1}{2}tf(t)-r\right|=\left|\frac{t}{2}(f(t+h)-f(t))+\frac{h}{2}f(t+h)-\int_t^{t+h}f(x)dx\right|$$

이 되고 따라서

$$A(t)=\lim_{h\to 0+}\frac{p(h)}{h}=\lim_{h\to 0+}\left|\frac{t}{2}\cdot\frac{f(t+h)-f(t)}{h}+\frac{f(t+h)}{2}-\frac{1}{h}\int_t^{t+h}f(x)dx\right|$$

을 얻는다. 도함수의 정의에 의해 $\lim_{h\to 0+}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}=f'(t)$이고 $f(x)$는 연속이므로

$\lim_{h\to 0+}\frac{f(t+h)}{2}=\frac{f(t)}{2}$이다. 또한 $F(x)$를 $f(x)$의 한 부정적분이라 하면

$\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}f(x)dx=\lim_{h\to 0+}\frac{F(t+h)-F(t)}{h}=F'(t)=f(t)$가 된다. 따라서

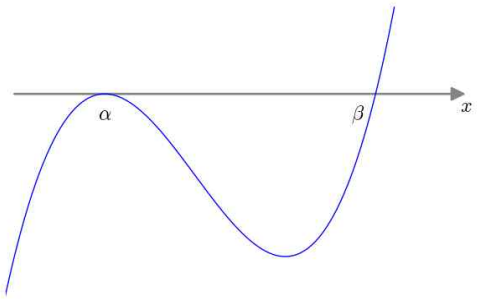
$A(t)=\left|\frac{t}{2}f'(t)+\frac{1}{2}f(t)-f(t)\right|=\frac{1}{2}|tf'(t)-f(t)|$을 얻는다.

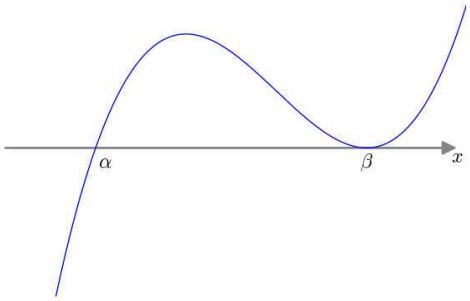
[문제 3-iii] 편의상 $g(t)=\frac{1}{2}(tf'(t)-f(t))$라 하자. 그러면 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 이므로

$g(t)=at^3+\frac{b}{2}t^2-\frac{d}{2}$이다. 또한 $A(t)=|g(t)|$이므로 $A(t)=0$와 $g(t)=0$은 같은 근을 갖고 문제의

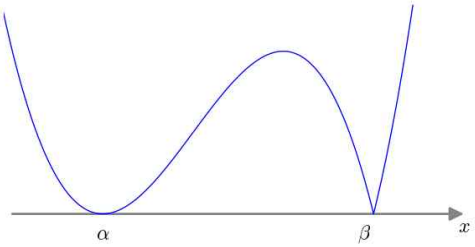
조건에 따라 $g(t)=0$도 두 개의 실근 α,β를 갖는다. $g(t)$는 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수이고

근을 두 개 가지므로 $y=g(x)$의 그래프의 개형이 아래 두 그림 중 하나가 된다.





그런데 $A(t)=|g(t)|$가 β에서 미분가능하지 않으므로 $y=g(x)$의 그래프는 첫 번째 형태가 되고 $y=A(x)$의 그래프는 아래와 같이 그려진다.



따라서 $g(t)=a(t-\alpha)^2(t-\beta)=a(t^3-(2\alpha+\beta)t^2+(\alpha^2+2\alpha\beta)t-\alpha^2\beta)$로 쓸 수 있다. 이 식의 일차항과 $g(t)=at^3+\frac{b}{2}t^2-\frac{d}{2}$의 일차항을 비교하면 $a(\alpha^2+2\alpha\beta)=0$을 얻는다. 또한 두 식의 상수항을 비교해 보면 $a\alpha^2\beta=\frac{d}{2}>0$이므로 $a\alpha\neq 0$이고 따라서 $a(\alpha^2+2\alpha\beta)=0$의 양변을 $a\alpha$로 나누어 $\alpha=-2\beta$를 얻는다.

위의 $y=A(x)$의 그래프를 보면 $A(t)$는 유일한 극댓값을 가지고 이 극댓값은 $\alpha<t<\beta$ 범위에서 얻어지므로 $g(t)$은 이 범위에서 극솟값 -16을 갖는다. 이 극솟값은 $t=\frac{\alpha+2\beta}{3}=0$에서 얻어지므로 $g(0)=-a\alpha^2\beta=-4a\beta^3=-16$, 즉 $a\beta^3=4$를 얻는다.

조건 $\int_0^{2\beta}A(t)dt=38$에서 $\int_0^{2\beta}A(t)dt=\int_0^{2\beta}|g(t)|dt=-\int_0^{\beta}g(t)dt+\int_{\beta}^{2\beta}g(t)dt$이다. 그런데 $g(t)=a(t+2\beta)^2(t-\beta)=a(t^2+4\beta t+\beta^2)(t-\beta)=a(t^3+3\beta t^2-4\beta^3)$이므로

$-\int_0^{\beta}g(t)dt+\int_{\beta}^{2\beta}g(t)dt=-a\left[\frac{t^4}{4}+\beta t^3-4\beta^3 t\right]_0^{\beta}+a\left[\frac{t^4}{4}+\beta t^3-4\beta^3 t\right]_{\beta}^{2\beta}=\frac{19a\beta^4}{2}=38$이 되어 $a\beta^4=4$을 얻는다. 이 식과 위에서 찾은 식 $a\beta^3=4$을 이용하면 $\beta=1$과 $a=4$, 그리고 $\alpha=-2\beta=-2$가 된다.

[문제 3-ⅳ]

$g(t)=at^3+\frac{b}{2}t^2-\frac{d}{2}$에서 위의 결과 $g(t)=4t^3+12t^2-16$을 이용하면 $a=4$, $b=24$, $d=32$이 된다.

주어진 조건과 **[문제 3-ⅰ]**로부터 $\int_0^1 f(x)dx=\frac{a}{4}+\frac{b}{3}+\frac{c}{2}+d=1+8+\frac{c}{2}+32=23$이므로 $c=-36$을 얻는다.