# 5 자연계열 논술고사 (서울) (수학)

[홍익대학교 문항정보]

## 1. 일반 정보

| | | |
|---|---|---|
| 유형 | ☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사 ☐ 선다형고사 | |
| 전형명 | 논술전형 | |
| 해당 대학의 계열(과목) / 문항번호 | 자연계열 / 문제 1 | |
| 출제 범위 | 수학과 교육과정 과목명 | 수학, 수학 I |
| | 핵심개념 및 용어 | 거듭제곱, 지수, 지수법칙, 합성함수 |
| 예상 소요 시간 | 40분 / 전체 120분 | |

## 2. 문항 및 제시문

**문제 1** (30점)

"1000000000 … 000"

홍익이는 어릴 때 큰 수를 좋아해서 공책 한 페이지를 하나의 수를 적는 데 사용하기도 했다. 이후 홍익이는 지수를 사용하면 아주 큰 수도 간단히 나타낼 수 있다는 것을 알게 되었다. 예를 들어, 관측 가능한 우주에는 대략 $10^{82}$개의 원자가 있다고 추측된다. $10^{100}$은 "구골(googol)"이라고 불리며, IT 기업 구글(google)의 회사명은 이 수의 이름에서 유래했다고 알려져 있다.

이보다 더 큰 수를 표현하고 싶었던 홍익이는 다음의 두 가지 방법을 생각하였다.

첫째, 지수를 여러 번 반복한다. 이때 가장 위의 지수 연산부터 순서대로 한다.

예를 들어, $a^{b^{c^d}} = a^{\left(b^{(c^d)}\right)}$이며, 따라서 $2^{2^{2^2}} = 2^{2^4} = 2^{16} = 65536$이다.

둘째, 함수의 합성을 이용한다. 홍익이는 자연수의 집합을 정의역 및 공역으로 갖는 세 함수 $f, g, h$를 다음과 같이 정의하였다.

$f(n) = 2^n$

$g(n) = (\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n\text{개}})(n)$

$h(n) = (\underbrace{g \circ g \circ \cdots \circ g}_{n\text{개}})(n)$

즉, $g(1) = f(1)$, $g(2) = f(f(2))$, $g(3) = f(f(f(3)))$, …,
$h(1) = g(1)$, $h(2) = g(g(2))$, $h(3) = g(g(g(3)))$, … 이다.

(1) $g(2)$의 값을 구하시오.

(2) $g(3) = 2^m$을 만족시키는 자연수 $m$의 값을 구하시오.

(3) $g(3)$과 "구골"($10^{100}$) 중 더 큰 수는 무엇인지 고르고 그 이유를 설명하시오.

(4) $h(2)$를 오직 숫자 2만 사용하여 $h(2) = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}$ 로 표현할 때, 우변에 나타나는 숫자 2의 개수를 구하시오. (예를 들어, $2^{2^2}$에는 숫자 2의 개수가 3이다.)

(5) 홍익이는 숫자 2를 "구골"($10^{100}$)번 사용하여 나타낸 수 $2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}$ (숫자 2의 개수가 $10^{100}$)을 "홍익수"라고 하였다. "홍익수"와 $h(3)$ 중 더 큰 수는 무엇인지 고르고 그 이유를 설명하시오.

## 3. 출제 의도

함수 및 합성함수의 개념은 고등학교 수학 교육과정에서 중요한 개념이며, 합성함수는 큰 자연수를 나타내는 편리한 방법을 제시한다. 이 문제에서는 거듭제곱 연산을 합성하여 만들어진 수의 크기를 비교하는 과정에서 함수의 합성과 지수법칙을 이해하고 사용할 수 있는지 평가한다.

## 4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

| 적용 교육과정 | 교육부 고시 제2020-236호 [별책 8] "수학과 교육과정" |
|---|---|
| 문항 및 제시문 | 학습내용 성취기준 |
| 제시문 | **[수학 I] - (1) 지수함수와 로그함수 - ① 지수와 로그**<br>[12수학 I 01-01] 거듭제곱과 거듭제곱근의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.<br>[12수학 I 01-03] 지수법칙을 이해하고, 이를 이용하여 식을 간단히 나타낼 수 있다.<br>**[수학] - (4) 함수 - ① 함수** |

| | |
|---|---|
| | [10수학04-02] 함수의 합성을 이해하고, 합성함수를 구할 수 있다. |
| 문항 (1) | **[수학 I ] - (1) 지수함수와 로그함수 - 1 지수와 로그**<br>[12수학 I 01-01] 거듭제곱과 거듭제곱근의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.<br>[12수학 I 01-03] 지수법칙을 이해하고, 이를 이용하여 식을 간단히 나타낼 수 있다.<br>**[수학] - (4) 함수 - 1 함수**<br>[10수학04-02] 함수의 합성을 이해하고, 합성함수를 구할 수 있다. |
| 문항 (2) | **[수학 I ] - (1) 지수함수와 로그함수 - 1 지수와 로그**<br>[12수학 I 01-01] 거듭제곱과 거듭제곱근의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.<br>[12수학 I 01-03] 지수법칙을 이해하고, 이를 이용하여 식을 간단히 나타낼 수 있다.<br>**[수학 I ] - (1) 지수함수와 로그함수 - 2 지수함수와 로그함수**<br>[12수학 I 01-08] 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.<br>**[수학] - (4) 함수 - 1 함수**<br>[10수학04-02] 함수의 합성을 이해하고, 합성함수를 구할 수 있다. |
| 문항 (3) | **[수학 I ] - (1) 지수함수와 로그함수 - 1 지수와 로그**<br>[12수학 I 01-01] 거듭제곱과 거듭제곱근의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.<br>[12수학 I 01-03] 지수법칙을 이해하고, 이를 이용하여 식을 간단히 나타낼 수 있다.<br>**[수학 I ] - (1) 지수함수와 로그함수 - 2 지수함수와 로그함수**<br>[12수학 I 01-06] 지수함수와 로그함수의 뜻을 안다.<br>[12수학 I 01-07] 지수함수와 로그함수의 그래프를 그릴 수 있고, 그 성질을 이해한다.<br>[12수학 I 01-08] 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있다. |
| 문항 (4) | **[수학 I ] - (1) 지수함수와 로그함수 - 1 지수와 로그**<br>[12수학 I 01-01] 거듭제곱과 거듭제곱근의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.<br>[12수학 I 01-03] 지수법칙을 이해하고, 이를 이용하여 식을 간단히 나타낼 수 있다.<br>**[수학] - (4) 함수 - 1 함수**<br>[10수학04-02] 함수의 합성을 이해하고, 합성함수를 구할 수 있다. |
| 문항 (5) | **[수학 I ] - (1) 지수함수와 로그함수 - 1 지수와 로그**<br>[12수학 I 01-01] 거듭제곱과 거듭제곱근의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.<br>[12수학 I 01-03] 지수법칙을 이해하고, 이를 이용하여 식을 간단히 나타낼 수 있다.<br>**[수학] - (4) 함수 - 1 함수**<br>[10수학04-02] 함수의 합성을 이해하고, 합성함수를 구할 수 있다. |

나) 자료 출처

| 참고자료 | 도서명 | 저자 | 발행처 | 발행년도 | 쪽수 |
|---|---|---|---|---|---|
| 고등학교 교과서 | 수학 | 류희찬 외 | 천재교과서 | 2020 | 224-227 |
| | 수학 | 황선욱 외 | 미래엔 | 2020 | 224-226 |
| | 수학 | 고성은 외 | 좋은책신사고 | 2020 | 214-215 |
| | 수학 I | 김원경 외 | 비상교육 | 2020 | 11-22 |
| | 수학 I | 황선욱 외 | 미래엔 | 2021 | 11-23 |
| | 수학 I | 홍성복 외 | 지학사 | 2020 | 11-25 |

## 5. 문항 해설

(1) 합성함수의 개념을 이해하고, 합성함수로 정의된 $g(2)=f(f(2))$의 값을 구하는 연산을 할 수 있다.

(2) 합성함수의 개념과 지수법칙을 사용하여 $g(3)=f(f(f(3)))$의 값을 2의 거듭제곱으로 표현할 수 있다.

(3) 문항(2)에서 구한 $g(3)=2^{256}$과 $10^{100}$의 크기를 지수법칙을 사용하여 비교할 수 있다.

(4) $g(n)$의 일반적인 형태를 이해하고 이를 사용하여 $h(2)$를 숫자 2만 사용한 지수형태로 나타낼 수 있다.

(5) $h(3)$가 문항에서 제시한 큰 수(흥익수)보다 더 큰 수를 나타낼 수 있음을 보일 수 있다

## 6. 채점 기준

| 하위 문항 | 채점 기준 | 배점 |
|---|---|---|
| (1) | 풀이 과정을 적절히 서술함 (4점)<br>정답 제시 (2점) | 6 |
| (2) | 풀이 과정을 적절히 서술함 (4점)<br>정답 제시 (2점) | 6 |
| (3) | $2^{256}$과 $10^{100}$의 크기를 비교하는 문제임을 서술함 (1점)<br>지수법칙을 바르게 사용하여 $10^{100}>2^{256}$의 결론을 얻음 (5점)<br>(양변에 로그를 취하고 log 2의 근사값을 이용하는 경우도 답안으로 인정하며, 풀이과정이 없는 경우 답안으로 인정하지 않음) | 6 |
| (4) | $h(2)=g(16)$임을 서술함 (1점)<br>$g(16)$ 또는 $g(n)$을 표현하는 식을 정확히 구함 (2점)<br>$h(2)$의 지수표현의 숫자 2의 개수를 풀이과정과 함께 정확히 구함 (3점) | 6 |
| (5) | $h(3)=g(g(2^{256}))$임을 서술함 (1점)<br>$g(2^{256})>10^{100}$임을 보임 (3점)<br>$h(3)>$"흥익수"임을 보임 (2점)<br>(풀이과정이 없는 경우 답안으로 인정하지 않음) | 6 |

## 7. 예시 답안 혹은 정답

(1) $g(2)=f(f(2))=f(2^2)=f(4)=2^4=16$

(2) $g(3)=f(f(f(3)))=f(f(2^3))=f(f(8))=f(2^8)=f(256)=2^{256}$ 이므로, $m=256$

(3) $g(3)=2^{256}$ 이며, $10^{100}=2^{100}5^{100}>2^{100}(2^2)^{100}=2^{300}>2^{256}$ 이므로, $10^{100}>g(3)$

(4) $h(2)=g(g(2))=g(16)$이다. $g(n)$은 함수 $f(n)=2^n$을 $n$번 합성하여 $n$을 넣은 값이므로 $g(n)=2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^n}}}}}$ 이며, 이때 가장 위의 지수 $n$ 아래의 숫자 2의 개수도 $n$이다. 따라서 $g(16)=2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{16}}}}}}$ 이며, 이때 2의 개수는 16이다. $16=2^{2^2}$ 이므로, $h(2)=2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}$ 의 2의 개수는 $16+3=19$이다.

(5) $h(3)=g(g(g(3)))=g(g(2^{256}))$이다. $a=g(2^{256})$이라 하자. $a=2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{256}}}}}}$ 이며 이때 가장 위 $2^{256}$의 아래 숫자 2의 개수가 $2^{256}$이다. $10^{100}<(2^4)^{100}=2^{400}$이므로, $10^{100}$보다 $a$가 더 크다.

$h(3)=g(a)$이므로, $h(3)=2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}$ 이며 이때 $a$의 아래 숫자 2가 $a$개이므로, 2를 $10^{100}$개 사용한 "홍익수"보다 $h(3)$이 더 크다.

# 6 자연계열 논술고사 (서울) (수학)

## [홍익대학교 문항정보]

### 1. 일반 정보

| | | |
|---|---|---|
| 유형 | ☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사 ☐ 선다형고사 | |
| 전형명 | 논술전형 | |
| 해당 대학의 계열(과목) / 문항번호 | 자연계열 / 문제 2 | |
| 출제 범위 | 수학과 교육과정 과목명 | 확률과 통계 |
| | 핵심개념 및 용어 | 조건부 확률, 독립시행 |
| 예상 소요 시간 | 30분 / 전체 120분 | |

### 2. 문항 및 제시문

**문제 2** (30점)

주머니 2개에 각각 4개와 8개의 공이 들어있다. A 주머니에는 빨간 공 2개와 파란 공 2개가 들어있고, B 주머니에는 빨간 공 2개와 파란 공 6개가 들어 있다. 이를 이용하여, 아래와 같은 다양한 사건들의 확률을 계산해 보려고 한다.

※ 최종 답은 모두 기약분수의 형태로 나타내시오.

(1) 두 주머니 A, B 중 임의로 1개의 주머니를 택하여 임의로 1개의 공을 꺼낼 때, 빨간 공을 꺼낼 확률을 구하시오.

(2) 두 주머니 A, B 중 임의로 1개의 주머니를 택하여 임의로 꺼낸 1개의 공이 빨간색일 때, 공을 꺼낸 주머니가 A일 확률을 구하시오.

(3) 하나의 주머니를 가지고 다음의 조건을 모두 만족하도록 공을 계속 꺼내는 시행을 생각하자.

- 꺼낸 공은 주머니에 다시 넣는다.
- 꺼낸 공이 빨간색이면 공 꺼내기를 멈춘다.
- 공을 꺼낸 횟수가 10회가 되면 공 꺼내기를 멈춘다.

이 시행에서 공을 꺼낸 횟수를 확률변수 $X$라 하자. B 주머니를 가지고 위의 시행을 하였을 때, $X=3$일 확률 $P(X=3)$을 구하시오.

(4) 두 주머니 A, B 중 임의로 1개의 주머니를 택하여, 문항(3)과 같은 방식으로 선택한 주머니에서 공을 꺼내는 시행을 하였더니 공을 3회 꺼낸 후 멈추었다고 하자. 공을 꺼낸 주머니가 A일 확률을 구하시오.

## 3. 출제 의도

- 확률의 덧셈정리를 이해하고 이를 활용할 수 있는가
- 확률의 조건부 확률을 이해하고 이를 활용할 수 있는가
- 확률의 독립시행을 이해하고 이를 활용할 수 있는가

## 4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

| 적용 교육과정 | 교육부 고시 제2020-236호 [별책 8] "수학과 교육과정" |
|---|---|
| 문항 및 제시문 | 학습내용 성취기준 |
| 제시문 | **[확률과 통계] - (2) 확률 - ② 조건부확률**<br>[12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다. |
| 문항 (1) | **[확률과 통계] - (2) 확률 - ① 확률의 뜻과 활용**<br>[12확통02-03] 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.<br>**[확률과 통계] - (2) 확률 - ② 조건부확률**<br>[12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다. |
| 문항 (2) | **[확률과 통계] - (2) 확률 - ① 확률의 뜻과 활용**<br>[12확통02-03] 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.<br>**[확률과 통계] - (2) 확률 - ② 조건부확률**<br>[12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다. |
| 문항 (3) | **[확률과 통계] - (2) 확률 - ② 조건부확률**<br>[12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다.<br>[12확통02-06] 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다.<br>**[확률과 통계] - (3) 통계 - ① 확률분포**<br>[12확통03-01] 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다. |
| 문항 (4) | **[확률과 통계] - (2) 확률 - ② 조건부확률**<br>[12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다. |

나) 자료 출처

| 참고자료 | 도서명 | 저자 | 발행처 | 발행년도 | 쪽수 |
|---|---|---|---|---|---|
| 고등학교 교과서 | 확률과 통계 | 배종숙 외 | 금성 | 2018 | 66-83 |
| | 확률과 통계 | 이준열 외 | 천재교육 | 2018 | 61-72 |
| | 확률과 통계 | 황선욱 외 | 미래엔 | 2018 | 58-67 |
| | 확률과 통계 | 김원경 외 | 비상교육 | 2018 | 53-69 |
| | 확률과 통계 | 박교식 외 | 동아출판 | 2018 | 61-74 |
| | 확률과 통계 | 고성은 외 | 좋은책신사고 | 2018 | 58-68 |

## 5. 문항 해설

(1) 두 주머니 A, B 중 임의로 1개의 주머니를 택하여 임의로 1개의 공을 꺼낼 때, 빨간 공을 꺼낼 확률은 조건부확률과 확률의 덧셈정리를 사용하여 계산할 수 있다.

(2) 주머니 A에서 공을 꺼낼 때 꺼낸 공이 빨간색일 확률은 문항(1)에서 계산할 수 있다. 비슷하게 주머니 B에서 공을 꺼낼 때 꺼낸 공이 빨간색일 확률을 계산할 수 있다. 조건부확률을 활용하여 문제에서 제시된 확률값을 계산할 수 있다.

(3) 문항(3)의 주어진 조건들을 만족하며 각 주머니에서 공을 꺼내는 시행은 독립시행이다. 또한 주머니 B가 선택되었을 때, 빨강 공이 나올 확률과 파란 공이 나올 확률은 조건부확률로 제시문을 통해 주어져 있다. 따라서 독립시행과 조건부확률을 활용하여 정답을 계산할 수 있다.

(4) 문항(3)에서와 주어진 조건들을 만족하며 각 주머니에서 공을 꺼내는 시행은 독립시행이다. 각 주머니를 선택하였을 때, 빨간 공이 나올 확률과 파란 공이 나올 확률은 조건부확률로 제시문을 통해 주어져 있으므로, 확률의 덧셈정리를 활용하여, 문제에서 찾는 수식을 다음과 같이 작성할 수 있다: $\mathrm{P}(X=3)=\mathrm{P}(X=3|A)\mathrm{P}(\mathrm{A})+\mathrm{P}(X=3|B)\mathrm{P}(\mathrm{B})$. 최종적으로 조건부확률을 활용하여 $\mathrm{P}(A|X=3)$의 값을 구할 수 있다.

## 6. 채점 기준

| 하위 문항 | 채점 기준 | 배점 |
|---|---|---|
| (1) | 설명과 답안의 수식이 정확한 경우 (7점)<br>식이 맞았는데 기약분수가 아니거나, 답이 틀린 경우 (5점)<br>풀이과정이 정확하지 않거나 없는 경우 (0점) | 7 |
| (2) | 설명과 답안의 수식이 명확한 경우 (7점) | 7 |

| | | |
|---|---|---|
| | 식이 맞았는데 기약분수가 아니거나, 답이 틀린 경우 (5점)<br>풀이과정이 정확하지 않거나 없는 경우 (0점) | |
| (3) | $P(X=3\|B)$인 확률의 수식이 정확하며 답도 모두 정확한 경우 (8점)<br>식이 맞았는데 기약분수가 아니거나, 답이 틀린 경우 (6점)<br>풀이과정이 정확하지 않거나 없는 경우 (0점) | 8 |
| (4) | $P(R\|X=3)$의 확률의 수식이 정확하며 답도 모두 정확한 경우 (8점)<br>식이 맞았는데 기약분수가 아니거나, 답이 틀린 경우 (6점)<br>풀이과정이 정확하지 않거나 없는 경우 (0점) | 8 |

## 7. 예시 답안 혹은 정답

(1) '$R$: 주머니에서 빨간 공이 나오는 사건'일 때,

$$P(R)=P(R\cap A)+P(R\cap B)=P(R|A)P(A)+P(R|B)P(B)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{8}.$$

(2) 빨간 공이 나왔을 때 주머니 A를 선택한 확률은

$$P(A|R)=\frac{P(A\cap R)}{P(R)}=\frac{\frac{2}{8}}{\frac{3}{8}}=\frac{2}{3}.$$

(3) '$G$: 주머니에서 파란 공이 나오는 사건'일 때, 주머니 B에서 꺼낸 공이 빨간색일 확률은 $P(R|B)=\frac{1}{4}$, 파란색일 확률은 $P(G|B)=\frac{3}{4}$이다. 제시된 조건에서 $X=3$이 되는 사건은 주머니 B에서 공을 세 번 꺼내는 독립시행에서 순서대로 파란색, 파란색, 빨간색 공이 나오는 사건이므로 구하는 확률은

$$P(G|B)P(G|B)P(R|B)=\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{1}{4}=\frac{9}{64}.$$

(4) 제시된 방법으로 공을 꺼내는 시행을 하였을 때, $X=3$이 되는 사건을 $C$라 하자. 문항 (3)으로부터 $P(C|B)=\frac{9}{64}$이다. 또한 문항 (3)의 풀이와 동일한 방법으로 주머니 A를 골랐을 때 $X=3$일 확률은 $P(C|A)=\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$이다.

따라서,

$$P(C)=P(C|A)P(A)+P(C|B)P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\times\frac{9}{64}=\frac{17}{128}$$

이며, $X=3$일 때, 주머니 A를 선택할 확률은

$$P(A|C)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}=\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{8}\right)/\left(\frac{17}{128}\right)=\frac{8}{17}.$$

# 7 자연계열 논술고사 (서울) (수학)

[홍익대학교 문항정보]

## 1. 일반 정보

| | | |
|---|---|---|
| 유형 | ☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사 ☐ 선다형고사 | |
| 전형명 | 논술전형 | |
| 해당 대학의 계열(과목) / 문항번호 | 자연계열 / 문제 3 | |
| 출제 범위 | 수학과 교육과정 과목명 | 수학, 수학 II, 기하, 미적분 |
| | 핵심개념 및 용어 | 포물선, 원, 접선, 매개변수 |
| 예상 소요 시간 | 50분 / 전체 120분 | |

## 2. 문항 및 제시문

**문제 3** (30점)

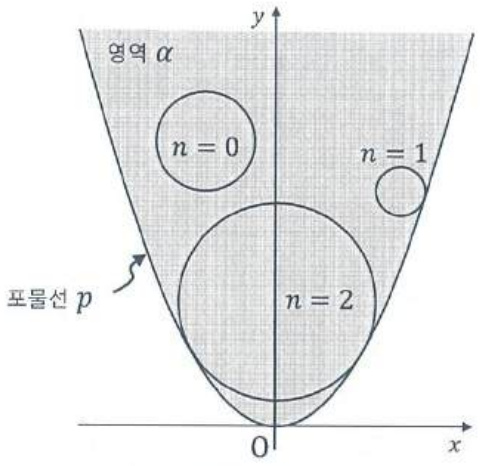
홍익이는 지난 평창 동계올림픽에서 하프파이프를 타는 스노우보더가 만드는 궤적을 관찰하였다. 스노우보더의 헬멧이 하프파이프의 곡선과 일정한 거리를 두고 움직이듯이, 포물선과 일정한 거리를 두고 움직이는 점이 그리는 곡선에 대해 궁금해졌다.

궁금증을 해결하기 위해, 홍익이는 포물선의 방정식을 $y=x^2$으로 정하고, 포물선과 포물선의 초점이 포함된 영역(<그림 1>의 영역 $\alpha$)에 있는 원과 포물선 사이의 관계에서 다음과 같은 특징을 관찰하였다.

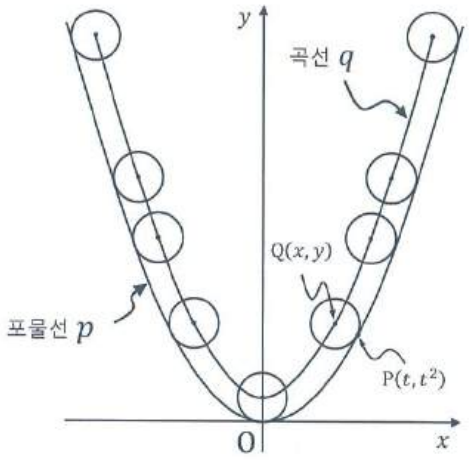
① 원의 중심과 반지름의 길이에 따라 원과 포물선이 만나는 점의 개수 $n$은 <그림 1>과 같이 0, 1, 또는 2이다.
② 반지름의 길이가 충분히 작은 경우에 원과 포물선이 만나는 점의 개수 $n$은 0 또는 1이다.
③ 원이 포물선과 한 점에서 만나면서 이동할 때, 원의 중심이 그리는 궤적은 <그림 2>와 같은 형태의 곡선이다.

이에 대해 좀 더 자세히 알아보기 위해 아래와 같이 생각해 보았다.

방정식 $y=x^2$으로 주어진 포물선을 포물선 $p$라 하자. 포물선 $p$는 좌표평면을 포물선의 초점




〈그림 1〉

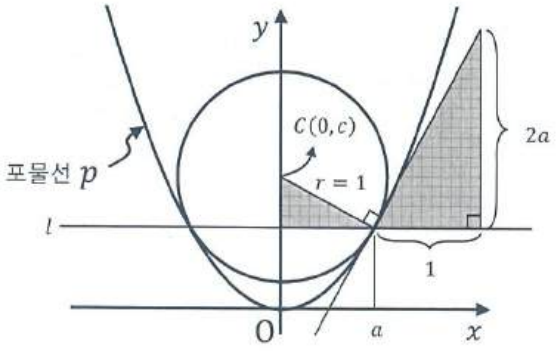



〈그림 2〉

※ 단 O는 원점이다.

이 포함된 영역과 준선이 포함된 영역으로 나눈다. <그림 1>과 같이 포물선의 초점이 포함된 영역과 포물선을 합하여 영역 $\alpha$라 정의하자. <그림 2>와 같이 영역 $\alpha$에서 반지름의 길이가 $\frac{1}{4}$인 원이 포물선 $p$와 한 점에서 만나면서 이동할 때 원의 중심 $Q(x,y)$가 그리는 궤적을 곡선 $q$라 하자.

(1) 영역 $\alpha$에서 중심이 $C(0,c)$이고 반지름의 길이 $r$이 1인 원이 포물선 $p$와 서로 다른 두 점에서 만나고 직선 $l$은 이 두 점을 지난다. 다음 그림에서 색칠된 두 삼각형의 닮음을 이용하여 이 원의 중심의 좌표 $(0,c)$를 구하고 원과 포물선이 만나는 두 점의 좌표를 구하시오.




(2) 중심이 $C(0,r)$이고 반지름의 길이가 $r$인 원이 포물선 $p$와 한 점에서 만나기 위한 $r$의 최댓값을 구하시오.

(3) 중심이 $Q(x,y)$이고 반지름이 $\frac{1}{4}$인 원이 포물선 $p$와 <그림 2>와 같이 한 점 $P(t,t^2)$에서 만날 때, $Q(x,y)$의 좌표는 매개변수 $t$에 대한 함수 $x=f(t)$, $y=g(t)$로 나타낼 수 있다. 이때 함수

$f(t)$, $g(t)$를 구하시오.

(4) 문항(3)과 동일한 상황에서 함수 $x=f(t)$, $y=g(t)$를 이용하여 $t=t_0$일 때 곡선 $q$ 위의 점 Q에서 접선의 기울기를 구하고, 포물선 $p$ 위의 점 $\mathrm{P}(t_0, t_0^2)$에서 접선의 기울기를 구하여 두 기울기가 같음을 보이시오.

(5) 문항(3)과 동일한 상황에서 $t=\frac{3}{8}$일 때와 $t=\frac{2}{3}$일 때의 점 Q를 각각 $\mathrm{Q}_1$, $\mathrm{Q}_2$라 하자. 아래의 두 포물선을 비교하여 곡선 $q$가 포물선인지 아닌지 설명하시오.

- 준선이 $x$축과 평행하고 꼭짓점의 좌표가 $\left(0, \frac{1}{4}\right)$이며 점 $\mathrm{Q}_1$을 지나는 포물선
- 준선이 $x$축과 평행하고 꼭짓점의 좌표가 $\left(0, \frac{1}{4}\right)$이며 점 $\mathrm{Q}_2$를 지나는 포물선

## 3. 출제 의도

이 문제는 포물선과 한 점에서 만나면서 이동하는 원의 중심이 그리는 곡선에 대해서 다루고 있다. 이 곡선은 포물선과 비슷한 형태를 보이지만 함수의 형태로 나타낼 수 없다. 따라서 원과 포물선이 한 점에서 만날 때의 기하학적 특성을 활용하여 곡선의 좌표를 매개변수 함수 형태로 표현하고, 매개변수로 표현된 함수의 미분을 수행할 수 있는지 평가한다. 또한 이 곡선이 포물선이 아니라는 것을 포물선의 특성을 이용하여 설명할 수 있는지를 평가한다.

## 4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

| 적용 교육과정 | 교육부 고시 제2020-236호 [별책 8] "수학과 교육과정" |
|---|---|
| 문항 및 제시문 | 학습내용 성취기준 |
| 제시문 | **[기하] - (1) 이차곡선 - 1 이차곡선**<br>[12기하01-01] 포물선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있다. |
| 문항 (1) | **[수학] - (4) 기하 - 6 도형의 닮음**<br>[9수04-14] 삼각형의 닮음 조건을 이해하고, 이를 이용하여 두 삼각형이 닮음인지 판별할 수 있다.<br>**[수학] - (4) 기하 - 9 원의 성질**<br>[9수04-19] 원의 현에 관한 성질과 접선에 관한 성질을 이해한다.<br>**[수학] - (1) 문자와 식 - 5 이차방정식과 이차함수**<br>[10수학01-09] 이차방정식과 이차함수의 관계를 이해한다. |
| 문항 (2) | **[수학] - (1) 문자와 식 - 4 복소수와 이차방정식** |

| | |
|---|---|
| | [10수학01-07] 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고 이를 설명할 수 있다.<br>**[수학] - (1) 문자와 식 - 6 여러 가지 방정식과 부등식**<br>[10수학01-12] 간단한 삼차방정식과 사차방정식을 풀 수 있다.<br>**[수학] - (2) 기하 - 3 원의 방정식**<br>[10수학02-06] 원의 방정식을 구할 수 있다.<br>**[기하] - (1) 이차곡선 - 1 이차곡선**<br>[12기하01-01] 포물선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있다. |
| 문항 (3) | **[수학] - (1) 문자와 식 - 6 여러 가지 방정식과 부등식**<br>[10수학01-13] 미지수가 2개인 연립이치방정식을 풀 수 있다.<br>**[수학] - (2) 기하 - 1 평면좌표**<br>[10수학02-01] 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.<br>**[수학] - (2) 기하 - 3 원의 방정식**<br>[10수학02-06] 원의 방정식을 구할 수 있다.<br>**[미적분] - (2) 미분법 - 2 여러 가지 미분법**<br>[12미적02-08] 매개변수로 나타낸 함수를 미분할 수 있다. |
| 문항 (4) | **[수학Ⅱ] - (2) 미분 - 1 미분계수**<br>[12수학Ⅱ02-02] 미분계수의 기하적 의미를 이해한다.<br>**[기하] - (1) 이차곡선 - 1 이차곡선**<br>[12기하01-04] 이차곡선과 직선의 위치 관계를 이해하고, 접선의 방정식을 구할 수 있다.<br>**[미적분] - (2) 미분법 - 2 여러 가지 미분법**<br>[12미적02-08] 매개변수로 나타낸 함수를 미분할 수 있다. |
| 문항 (5) | **[기하] - (1) 이차곡선 - 1 이차곡선**<br>[12기하01-01] 포물선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있다. |

나) 자료 출처

| 참고자료 | 도서명 | 저자 | 발행처 | 발행년도 | 쪽수 |
|---|---|---|---|---|---|
| 고등학교 교과서 | 수학 | 고성은 외 | 좋은책 신사고 | 2018 | 133-145 |
| | 수학 | 김원경 외 | 비상교육 | 2018 | 127-140 |
| | 수학II | 홍성복 외 | 지학사 | 2018 | 85-77 |
| | 수학II | 김원경 외 | 비상교육 | 2018 | 71-73 |
| | 미적분 | 고성은 외 | 좋은책 신사고 | 2019 | 85-86 |
| | 미적분 | 김원경 외 | 비상교육 | 2019 | 85-86 |
| | 기하 | 황선욱 외 | 미래엔 | 2019 | 11-25 |
| | 기하 | 고성은 외 | 좋은책 신사고 | 2019 | 11-50 |

## 5. 문항 해설

(1) 주어진 영역에서 중심이 $y$축에 있고 반지름의 길이가 1인 원이 포물선 $y=x^2$과 오직 두 점에서 만나는 경우 이 두 점의 좌표를 삼각형의 닮음을 이용하여 구하고 원의 방정식을 이용하여 원의 중심의 좌표를 구한다.

(2) 원점이 $(0, r)$이고 반지름의 길이가 $r$인 원이 포물선 $y=x^2$과 한 점에서 만나는 경우 반지름의 길이를 구하기 위하여 원의 방정식과 포물선의 방정식을 사용하고 한 점에서 만나기 위한 조건을 사용하여 원의 반지름이 될 수 있는 최댓값을 구한다.

(3) 삼각형의 닮음을 이용하여 주어진 영역$\alpha$에서 포물선과 한 점에서 만나는 원의 중심이 이동하는 경로의 좌표를 매개변수 함수로 나타낸다.

(4) 매개변수 함수의 미분을 이용하여 원의 중심이 이동하는 경로 곡선의 접선의 기울기와 그때 원이 포물선과 접하는 위치의 접선의 기울기를 구하고 둘이 같음을 보인다.

(5) 포물선에 접하여 이동하는 원의 중심이 이동하는 경로 곡선이 포물선이 아님을 보이기 위하여 곡선 위의 두 개의 점$Q_1$, $Q_2$를 구하고 포물선과 원점에서 한 점에서 만나는 원의 중심의 위치를 꼭짓점으로 하는 두 개의 포물선을 구한다. 이 둘이 같지 않음을 이용하여 원의 중심이 그리는 궤적이 포물선이 아님을 보인다.

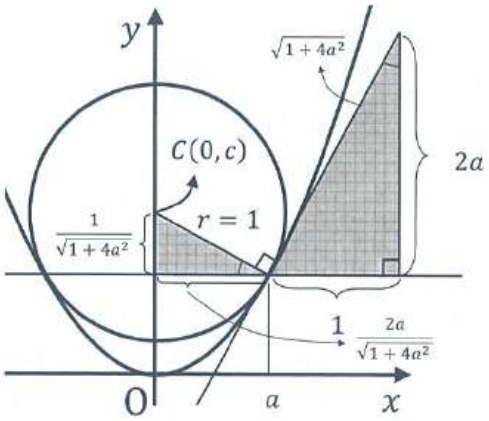
## 6. 채점 기준

| 하위 문항 | 채점 기준 | 배점 |
|---|---|---|
| (1) | 삼각형의 닮음꼴을 이용하여 $\alpha$를 정확히 구함. (2점)<br>원의 중심의 좌표 구함. (2점)<br>세 개의 점의 좌표를 정확히 서술함. (2점) | 6 |
| (2) | 원의 방정식과 포물선의 방정식을 이용하여 식을 구하고 방정식의 근이 하나가 되기 위한 조건을 설명함. (4점)<br>$r$의 최댓값 $(r=\frac{1}{2})$을 정확히 구함. (2점) | 6 |
| (3) | 매개변수 함수 $x=f(t)$를 정확히 표현함. (3점)<br>매개변수 함수 $y=g(t)$가 정확한 표현함. (3점) | 6 |
| (4) | 점 $Q(f(t_0), g(t_0))$에서 접선의 기울기 구함. (4점)<br>- 중간 과정에 충분한 설명이 없는 경우. (0점) | 6 |

| | | |
|---|---|---|
| | 점 $P(t_0, t_0^2)$에서 접선의 기울기 구함. (1점)<br>두 접선의 기울기가 같음을 설명함. (1점) | |
| (5) | 점 $Q_1$, $Q_2$ 구함. (2점)<br>각각의 포물선의 방정식 구함. (2점)<br>두 포물선의 방정식이 일치하지 않음으로 곡선 $p$는 포물선이 아니라 설명함. (2점) | 6 |

## 7. 예시 답안 혹은 정답

(1)




원의 중심을 $C(0,c)$라 할 때, 옆의 그림에서 닮은꼴 삼각형을 이용하면 다음과 같다.

$$a = \frac{2a}{\sqrt{1+4a^2}}$$

이때 $a$의 값은

$$(1+4a^2) = 4$$

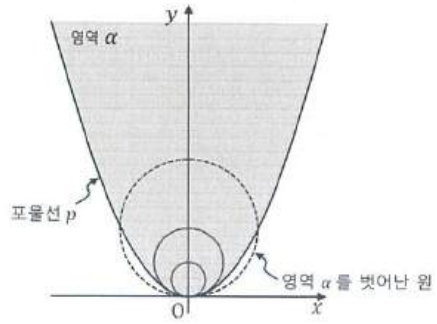
$$a = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

그림에서

$$c = a^2 + \frac{1}{\sqrt{1+4a^2}} = \frac{5}{4}$$

이므로 원의 중심의 좌표는 $\left(0, \frac{5}{4}\right)$, 원과 포물선이 만나는 점의 좌표는 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4}\right)$이다.

(2)




원의 중심이 $C(0, r)$이고 반지름이 $r$인 원의 방정식은

$$x^2 + (y-r)^2 = r^2$$

포물선 $y = x^2$과 원 $x^2 + (y-r)^2 = r^2$의 교점의 좌표를 구하기 위해 $y = x^2$를 원의 방정식에 대입하면

$$x^2 + (x^2 - r)^2 = r^2$$

이 식을 정리하면 다음과 같다.

$$x^2(x^2 - 2r + 1) = 0$$

여기서 $x = 0$ 또는 $x^2 = 1 - 2r$이다.

$1 - 2r \le 0$일 때 근은 $x = 0$(따라서 $y = 0$) 하나이므로 $r \le \frac{1}{2}$. 따라서, $r$의 최댓값은 $r = \frac{1}{2}$이다.

<별해>

포물선 $y = x^2$과 원 $x^2 + (y-r)^2 = r^2$의 교점의 좌표를 구하기 위해 $x^2 + (y-r)^2 = r^2$를 포물선의 방정

식에 대입하면

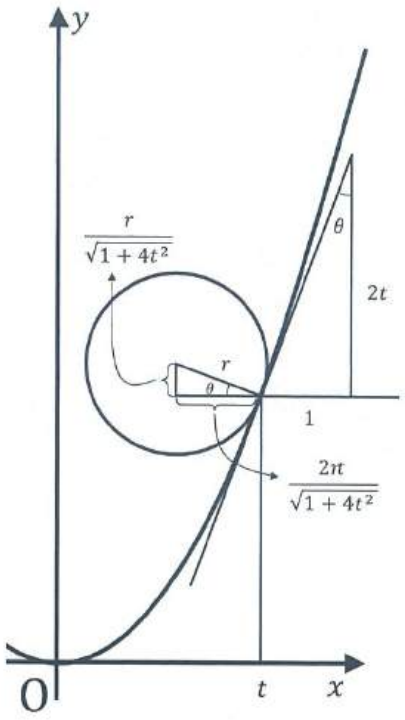
$$y = r^2 - (y-r)^2$$

이 식을 정리하면 다음과 같다.

$$y(y+(1-2r)) = 0$$

$y = x^2$이므로 $2r-1 \le 0$일 때 근은 $x=0$, $y=0$ 하나만 존재한다. 따라서, $r$의 최댓값은 $r = \frac{1}{2}$이다.

(3)




$t > 0$일 때 다음 그림에서 삼각형의 닮음을 이용하여

$$f(t) = t - \frac{2rt}{\sqrt{4t^2+1}} = t - \frac{t}{2\sqrt{4t^2+1}}$$

$$g(t) = t^2 + \frac{r}{\sqrt{4t^2+1}} = t^2 + \frac{1}{4\sqrt{4t^2+1}}$$

함수 $f$와 $g$는 $f(-t) = -f(t)$, $g(-t) = g(t)$이며 $f(0) = 0$, $g(0) = \frac{1}{4}$이므로 모든 구간에서 위의 식이 성립한다.

(4)

매개변수를 이용하여 점 $Q(f(t), g(t))$에서의 기울기를 구하면 다음과 같다.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

$$f'(t) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{4t^2+1}} + \frac{2t^2}{(4t^2+1)^{3/2}} = 1 - \frac{1}{2(4t^2+1)^{3/2}}$$

$$g'(t) = 2t - \frac{t}{(4t^2+1)^{3/2}} = 2t\left(1 - \frac{1}{2(4t^2+1)^{3/2}}\right)$$

$$\frac{g'(t)}{f'(t)} = 2t$$

점 $Q(f(t_0), g(t_0))$에서의 기울기는 $\frac{g'(t_0)}{f'(t_0)} = 2t_0$ 이다.

포물선 $p$위의 점 $P(t, t^2)$에서 접선의 기울기를 구하면 다음과 같다.

$$\frac{dy}{dx} = 2t$$

점 $P(t_0, t_0^2)$에서의 기울기는 $2t_0$이다. 따라서 두 접선의 기울기는 같다.

(5)

$t = \frac{3}{8}$일 때

$$f\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{3}{8} - \frac{\frac{3}{8}}{2\sqrt{4\left(\frac{3}{8}\right)^2 + 1}} = \frac{9}{40} \text{ 이고, } \quad g\left(\frac{3}{8}\right) = \left(\frac{3}{8}\right)^2 + \frac{1}{4\sqrt{4\left(\frac{3}{8}\right)^2 + 1}} = \frac{109}{320} \text{ 이므로}$$

점 $Q_1$의 좌표는 $\left(\frac{9}{40}, \frac{109}{320}\right)$이다.

$t = \frac{2}{3}$일 때

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} - \frac{\frac{2}{3}}{2\sqrt{4\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1}} = \frac{7}{15} \text{ 이고, } \quad g\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{4\sqrt{4\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1}} = \frac{107}{180} \text{ 이므로}$$

점 $Q_2$의 좌표는 $\left(\frac{7}{15}, \frac{107}{180}\right)$이다.

준선이 $x$축과 평행하고 꼭짓점의 좌표가 $\left(0, \frac{1}{4}\right)$이며 점 $Q_1\left(\frac{9}{40}, \frac{109}{320}\right)$을 지나는 포물선의 방정식을 $y = cx^2 + \frac{1}{4}$라 하면,

$$c = \frac{y - \frac{1}{4}}{x^2} = \frac{\frac{109}{320} - \frac{1}{4}}{\frac{81}{1600}} = \frac{145}{81} \text{ 이므로 } y = \frac{145}{81}x^2 + \frac{1}{4}$$

준선이 $x$축과 평행하고 꼭짓점의 좌표가 $\left(0, \frac{1}{4}\right)$이며 점 $Q_2\left(\frac{7}{15}, \frac{107}{180}\right)$을 지나는 포물선의 방정식을 $y = dx^2 + \frac{1}{4}$라 하면,

$$d = \frac{y - \frac{1}{4}}{x^2} = \frac{\frac{107}{180} - \frac{1}{4}}{\frac{49}{225}} = \frac{155}{98} \text{ 이므로 } y = \frac{155}{98}x^2 + \frac{1}{4}$$

주어진 조건을 만족하는 각각의 포물선은 유일하며 두 포물선이 같지 않으므로 준선이 $x$축과 평행하고 꼭짓점의 좌표가 $\left(0, \frac{1}{4}\right)$이며 점 $Q_1$과 $Q_2$를 동시에 지나는 포물선은 없다. 따라서 곡선 $q$는 포물선이 아니다.