2015학년도 수시 모집 수학과학우수자 논술고사 출제 의도 및 해설

[수학] (60점)

[문제 1] (30점)

1. 출제의도

회전변환에 의해 주어진 원은 중심이 회전변환만큼 이동하고 반지름이 같은 원으로 변환된다는 사실을 파악할 수 있는지, 원에서 주어진 기울기를 갖고 접하는 직선의 식을 구할 수 있는지, 삼각함수의 정의를 알고 활용할 수 있는지, 삼각함수의 극한을 이용하여 도형으로부터 식을 도출하고 식의 극한을 찾아낼 수 있는지를 평가한다.

2. 주제 분석과 제시문 해설

(가) 주제 분석

원 $(x-1)^2+y^2=1$과 기울기가 $m\ (m<0)$인 직선 l([그림 1] 참고)이 제1사분면에서 접하고 있다. 이 원을 원점을 중심으로 θ만큼 회전시킨 원이 직선 l과 두 점 A, B에서 만나는 상황에서([그림 2] 참고) 선분 AB와 호 $\widehat{AB}$로 둘러싸인 영역의 넓이 S_θ와 선분 AB의 길이 $f(\theta)$를 가지고 접선의 식, 삼각함수의 정의, 삼각함수의 극한 정리, 극한값을 다루는 내용이다.

(나) 제시문 해설

제시문 (가)는 좌표평면에서 한 점과 그 점을 지나지 않는 직선 사이의 거리 공식을 제공하였다.

제시문 (나)는 삼각함수의 미분법에서 기본이 되는 삼각함수의 극한 정리를 제공하였다.

(다) 제시문 출처

제시문 (가) : 『수학』 교과서, (주)지학사, 158쪽~159쪽
제시문 (나) : 『수학II』 교과서, (주)금성출판사, 86쪽

3. 논제 해설

(1-1)은 제1사분면에서 원 $(x-1)^2+y^2=1$에 접하고 기울기 $m\ (m<0)$을 갖는 직선 l([그림 1] 참고)의 y절편을 구하는 것이다. 제시문 (가)에 주어진 거리 공식을 이용하거나 혹은 원 $x^2+y^2=1$에 접하는 접선을 x축으로 1만큼 평행 이동시켜 구할 수 있다.

(1-2)와 (1-3)은 원 $(x-1)^2+y^2=1$ 을 원점을 중심으로 θ 만큼 회전시킨 원이 기울기가 m 인 직선 l 과 두 점 A, B 에서 만나는 상황에서([그림 2] 참고), (1-2)는 선분 AB 와 호 $\widehat{AB}$ 로 둘러싸인 영역의 넓이 S_θ 가 θ 가 변함에 따라 S_θ 가 최대일 때의 각을 $\theta=\alpha$ 라 할 때 $\tan\alpha$ 의 값을 구하는 것이다. 기하적인 분석을 하여 삼각함수의 정의를 활용하거나 제시문 (가)에 주어진 거리 공식과 미분을 이용하여 구할 수 있다. (1-3)은 선분 AB 의 길이를 $f(\theta)$ 라 할 때 극한 $\lim_{\theta\to+0}\frac{\{f(\theta)\}^2}{\theta}$ 의 값을 구하는 것이다. 제시문 (나)에 주어진 삼각함수의 극한 정리를 적용하는 계산 능력이 요구되는 문제이다.

4. 평가 기준

- 회전변환에 의해 주어진 원은 중심이 회전변환만큼 이동하고 반지름이 같은 원으로 변환된다는 사실을 파악하는 능력
- 삼각함수의 정의를 알고 활용할 수 있는 능력
- 삼각함수의 극한을 이용하여 도형으로부터 식을 도출하고 식의 극한을 찾아낼 수 있는 능력
- 주어진 제시문을 정확하게 이해하고 이를 바탕으로 각 논제에서 요구하는 문제를 파악하는 능력
- 논제에서 요구하는 사항을 정확히 이해하고 기존 지식과 제시문의 내용을 바탕으로 논제의 답을 논리적으로 서술하는 능력

5. 예시 답안

(1-1) (5점) 직선 l 의 y 절편을 k 라 하면, 원과 직선 $l: mx-y+k=0$ 이 접하므로 원의 중심 $(1,0)$ 에서 직선 l 사이의 거리가 반지름 1과 같다. 즉 $\frac{|m+k|}{\sqrt{m^2+1}}=1$ 이다. 이로부터 $k=-m\pm\sqrt{m^2+1}$ 을 얻는데, $k>0$ 이므로 직선 l 의 y 절편은 $-m+\sqrt{m^2+1}$ 이다.

(별해) 원 $x^2+y^2=1$ 에 접하고 기울기가 m 인 접선의 식은 $y=mx\pm\sqrt{m^2+1}$ 이다. 이를 x 축으로 1 만큼 평행 이동시키면 [그림 1]에 주어진 직선 l 은

$$y=m(x-1)+\sqrt{m^2+1}$$

이다($\because$ y 절편이 양수이므로). 따라서 직선 l 의 y 절편은 $-m+\sqrt{m^2+1}$ 이다.

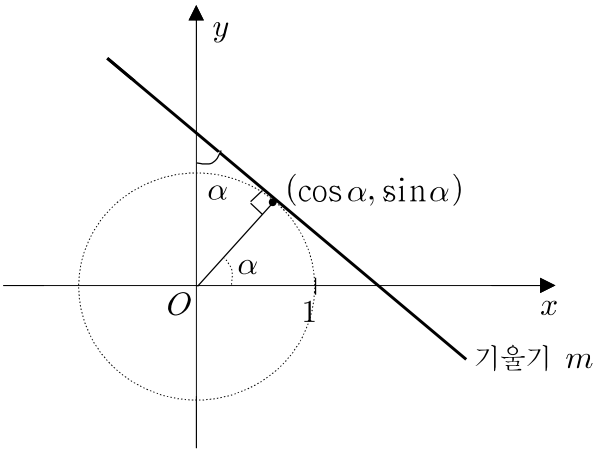
(별해) 직선 l 의 y 절편을 k 라 하면, $y=mx+k$ 를 원 $(x-1)^2+y^2=1$ 에 대입하여 정리하

면 $(1+m^2)x^2+2(mk-1)x+k^2=0$을 얻는다. 판별식

$$D/4=(mk-1)^2-k^2(1+m^2)=-k^2-2mk+1=0$$

으로부터 $k=-m\pm\sqrt{m^2+1}$이고 $k>0$이므로 직선 l의 y절편은 $-m+\sqrt{m^2+1}$이다.

(1-2) (10점) 넓이 S_θ는 선분 AB가 원 O_θ의 중심에 가까워질수록 커진다. 원 O_θ의 중심 $(\cos\theta, \sin\theta)$는 원 $x^2+y^2=1$ 위를 움직인다. 이 점이 선분 AB와 가장 가까울 때는 이 점에서 원 $x^2+y^2=1$의 접선의 기울기가 m일 때이다. 넓이 S_θ가 최대일 때의 θ를 α라 하면, 아래 그림으로부터 $\tan\alpha=-\frac{1}{m}$이다.



(별해) 넓이 S_θ가 최대가 될 필요충분조건은 원 O_θ의 중심 $(\cos\theta, \sin\theta)$과 직선 $l: mx-y-m+\sqrt{m^2+1}=0$ 사이의 거리가 최소일 때이다. 그 거리를 $h(\theta)$라 하면

$$h(\theta)=\frac{\left| m\cos\theta-\sin\theta-m+\sqrt{m^2+1}\right|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{m\cos\theta-\sin\theta-m+\sqrt{m^2+1}}{\sqrt{m^2+1}}$$

이다($\because$ $m\cos\theta-\sin\theta-m+\sqrt{m^2+1}$
$=\sqrt{m^2+1}\cos(\theta+\beta)-m+\sqrt{m^2+1}\geq -m>0$).

$h(\theta)$의 최솟값은 임계점에서 존재하므로 $\frac{d}{d\theta}h(\theta)=\frac{-m\sin\theta-\cos\theta}{\sqrt{m^2+1}}=0$에서

$\cos\theta=-m\sin\theta$이므로 $\tan\theta=-\frac{1}{m}$인 θ에서 넓이 S_θ는 최댓값을 갖는다. 따라서

$\tan\alpha=-\frac{1}{m}$이다.

(1-3) (15점) 원 O_θ의 중심 $(\cos\theta, \sin\theta)$과 직선 $l : mx-y+k=0$ 사이의 거리는 $\theta > 0$ 일 때 문제 (1-1)의 풀이에 의해 $\dfrac{|\, m\cos\theta-\sin\theta+k\,|}{\sqrt{m^2+1}}$ (여기서 $k = -m+\sqrt{m^2+1}$)

이다. 따라서

$$\left\{\frac{1}{2}f(\theta)\right\}^2 = 1-\frac{(m\cos\theta-\sin\theta+k)^2}{m^2+1}$$
$$= \frac{(m^2-1)\sin^2\theta+2km(1-\cos\theta)+2m\sin\theta\cos\theta+2k\sin\theta}{m^2+1}$$

이다. 제시문 (나)에 주어진 삼각함수의 극한 정리를 사용하면 다음을 얻는다.

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{\{f(\theta)\}^2}{\theta}$$
$$= \frac{4}{m^2+1}\lim_{\theta\to+0}\left(\frac{(m^2-1)\sin^2\theta+2km(1-\cos\theta)+2m\sin\theta\cos\theta+2k\sin\theta}{\theta}\right)$$
$$= \frac{4}{m^2+1}(2m+2k) = \frac{8}{\sqrt{m^2+1}} \quad (\because m+k=\sqrt{m^2+1})$$

[문제 2] (30점)

1. 출제의도

정적분의 성질을 충분히 이해하고 이를 실제 사례에 활용할 수 있는 능력, 극한의 성질(극한의 사칙연산, 연속성 등)을 사용하여 극한값을 정확하게 계산하는 능력을 평가하고자 하였다. 구체적으로는 학생들이 정적분의 값을 계산할 때 피적분함수의 부정적분을 이용하는 방법, 부분적분법을 능숙하게 사용할 수 있는지 평가하고자 하였다. 그리고 문제에서 요구하는 극한값을 계산하기 위해 제시문과 알려진 성질을 활용하는 능력을 측정하고자 하였다.

2. 주제 분석과 제시문 해설

(가) 주제 분석

평면에서 연속함수의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 영역을 x 축에 수직인 방향으로 잘라서 얻어지는 작은 영역의 넓이가 모두 같을 때 소구간의 길이의 비를 추론하는 문제이다. 영역의 넓이는 정적분을 이용하여 구할 수 있지만, 일반적으로 영역이 단순한 형태가 아닌 경우에는 소구간의 길이를 구체적인 수식으로 나타내기 힘들다. 자르는 회수가 무한히 커질 때 ($n\to\infty$ 일 때) 소구간의 길이는 0 으로 수렴하는데, [문제 2]에서는 정적분의 성질을 바탕으로 소구간의 길이를 $n^{-\alpha}$ $(\alpha>0)$과 비교할 것을 요구하였다.

(나) 제시문 해설

제시문 (가)는 정적분의 기본정리를 서술한다. 연속함수 $f(x)$의 정적분 값은 항상 $f(x)$의 부정적분을 통해 표현될 수 있는데, 이는 정적분의 기본정리에 근거하고 있다. 제시문 (가)는 정적분의 기본정리를 인용하고, 이로부터 얻을 수 있는 추가 정보를 미분계수의 정의를 이용하여 서술하고 있다.

제시문 (나)는 정적분의 기본 성질을 서술한다. 먼저 피적분함수의 차에 관련된 성질을 서술하고, 평면에서 영역의 넓이가 정적분으로 표현될 수 있다는 점을 이용하여 두 개의 피적분함수가 어떤 대소 관계를 만족할 때, 이들의 정적분 값도 같은 대소 관계를 만족함을 간단히 논증하였다.

(다) 제시문 출처

제시문 (가) :『적분과 통계』교과서, (주)두산동아, 48~50쪽,
『수학II』교과서, (주)금성출판사, 121쪽~121쪽,
제시문 (나) :『적분과 통계』교과서, (주)천재교육, 54쪽~55쪽

3. 논제 해설

조건 (a)와 (b)는 주어진 영역을 작은 영역으로 분할할 때 작은 영역의 넓이가 모두 같을 것을 요구하고 있다. 조건 (b)는 각각의 작은 영역의 넓이가 전체 영역의 넓이의 $1/n$과 같음을 서술하고 있다.

(2-1)은 전체 영역의 넓이를 정적분의 부분적분법을 이용하여 계산할 것을 요구하고 있다. 부분적분법과 지수함수의 부정적분을 잘 알고 있는지 평가하는 문제이다.

(2-2)는 소구간 $[x_{n-1}, x_n]$의 길이는 $n \to \infty$ 일 때 0으로 수렴하는데, 이 길이가 얼마나 작은 값인지 알아낼 것을 묻고 있다. 구체적으로는 길이를 $1/n$과 비교할 수 있도록 $n(x_n - x_{n-1})$의 극한값을 구할 것을 요구하고 있다. 이를 해결하기 위해 조건 (b)의 양변을 소구간의 길이 $x_n - x_{n-1}$로 나눈다. $n \to \infty$ 일 때 $x_{n-1} \to x_n = 2$임을 파악하여 제시문 (가)를 적용할 수 있는지 평가하는 문제이다.

(2-3)은 소구간의 길이는 끝점에서 주어진 함수의 값이 0인지 아닌지에 따라 크게 달라진다. $x=2$ 근처와 달리, $x=0$ 근처에서는 근사적으로 $f(x) \approx x$인데, 이것이 소구간 $[0, x_1]$의 길이에 끼치는 영향을 논리적으로 알아낼 것을 요구하고 있다. 이를 위해 힌트를 이용하여

$0 \le x \le x_1$ 일 때 $x \le f(x) \le e^{x_1}x$ 임을 알아내고, 이 부등식과 제시문 (나) 및 조건 (b)를 이용할 수 있는지 평가하는 문제이다.

4. 평가 기준

- 부분적분을 이용하고 정확하게 계산하는 능력
- 제시문에서 주어진 정적분의 성질을 적재적소에 활용하는 능력
- 극한의 성질을 이용하여 극한값을 정확하게 계산하는 능력

5. 예시 답안

(2-1) (5점) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 x\,e^x\,dx = \left[xe^x\right]_0^2 - \int_0^2 e^x\,dx = 2e^2 - \left[e^x\right]_0^2 = e^2+1$

(2-2) (10점) 조건 (b)와 문제 (2-1)에 의해

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx = \frac{1}{n}\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{1}{n}(e^2+1)$$

이므로

$$\frac{e^2+1}{n(x_n-x_{n-1})} = \frac{1}{x_n-x_{n-1}}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx = \frac{1}{x_{n-1}-2}\int_2^{x_{n-1}} f(x)\,dx.$$

이다. 그런데 $n\to\infty$ 일 때 $x_{n-1}\to 2$ 이므로 제시문 (가)에 의해

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{e^2+1}{n(x_n-x_{n-1})} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_{n-1}-2}\int_2^{x_{n-1}} f(x)\,dx \\ &= \lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_2^x f(t)\,dt = f(2)\end{aligned}$$

이다. 그러므로

$$\lim_{n\to\infty} n(x_n-x_{n-1}) = \frac{e^2+1}{f(2)} = \frac{e^2+1}{2e^2}$$

(2-3) (15점) $0 \le x \le x_1$ 일 때 $1 \le e^x \le e^{x_1}$ 이므로 $x \le f(x) \le e^{x_1}x$ 이다. 제시문 (나)에 의해

$$\frac{x_1^2}{2} = \int_0^{x_1} x\,dx \le \int_0^{x_1} f(x)\,dx \le \int_0^{x_1} e^{x_1}x\,dx = \frac{x_1^2}{2}e^{x_1}$$

이다. 조건 (b)와 문제 (2-1)에 의해 $\dfrac{x_1^2}{2} \le \dfrac{e^2+1}{n} \le \dfrac{x_1^2}{2}e^{x_1}$ 이고, 이를 다시 쓰면

$$\frac{2(e^2+1)}{e^{x_1}} \le n x_1^2 \le 2(e^2+1)$$

이다. 그런데 $n \to \infty$ 이면 $x_1 \to 0$ 이고 e^x 는 연속이므로 $\lim_{n\to\infty} e^{x_1} = 1$ 이다. 그러므로 $\lim_{n\to\infty} n x_1^2 = 2(e^2+1)$ 이고, $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(x_1 - x_0) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\, x_1 = \sqrt{2(e^2+1)}$ 이다.

한편,

$$\frac{n^\alpha (x_n - x_{n-1})}{x_1 - x_0} = \frac{n(x_n - x_{n-1})}{\sqrt{n}\, x_1} \cdot n^{\alpha - \frac{1}{2}}$$

이므로, 문제 (2-2)에 의해 $\alpha = \frac{1}{2}$ 일 때 $\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha (x_n - x_{n-1})}{x_1 - x_0}$ 의 값이 양의 실수이다.

따라서 극한값 L 은 $\frac{\sqrt{e^2+1}}{2\sqrt{2}\, e^2}$ 이다.

2015학년도 수시 모집 수학과학우수자 논술고사 출제 의도 및 해설

[생명과학] (20점)

1. 출제의도

멘델의 유전 법칙은 유전 현상을 이해하는 데 있어 가장 기본적인 내용이라고 할 수 있다. 완두콩을 이용한 멘델의 실험은 우성과 열성의 개념, 유전자의 분리 (분리의 법칙), 그리고 두 개 이상의 유전자의 독립적인 유전(독립의 법칙) 현상을 이해하는 데 기본적인 개념을 제시하였다. 그러나 다양한 유전 현상 중에서는 멘델의 법칙을 따르지 않는 사례가 많이 존재한다. 생명과학 I 교과 과정에서 배우는 중간 유전 (우열의 법칙), 두 개 이상의 유전자가 하나의 염색체에 존재하는 경우 (연관) 등이 그 예라 할 수 있다. 2015년 생명과학 논술 문제에서는 '상위' 라는 새로운 개념을 제시문을 통해 이해할 수 있는지, 그리고 이러한 개념을 실제 유전 현상에 적용시킬 수 있는 지를 묻고자 하였다.

2. 주제 분석과 제시문 해설

(가) 주제 분석

생명과학 I 에서는 멘델의 유전 법칙(우열의 법칙, 분리의 법칙, 그리고 독립의 법칙)을 소개함과 동시에 이를 따르지 않는 다양한 예를 소개하고 있다. 대립 유전자의 우열이 확실하지 않은 '중간 유전' 이 그 대표적인 예라고 할 수 있다. 본 문제는 두 개 이상의 유전자가 독립적이 아닌 상호작용을 통해 표현형을 결정하는 경우를 제시문에서 설명한 후, 이것을 이해하고 다른 사례에 적용시킬 수 있는 지를 평가하고자 하였다.

(나) 제시문 해설

제시문 (가)에서는 '상위 (epistasis)'라는 개념을 소개하고 있다. 상위란 두 개 이상의 유전자에 의해 표현형이 결정될 때, 한 유전자의 발현이 다른 유전자의 표현형에 영향을 주는 상황을 일컫는다. 개념 자체는 생소할 수 있지만, 리트리버 종의 개의 털 색 유전을 예를 들어 '상위' 를 설명하고 있어 큰 어려움 없이 이해할 수 있을 것이라고 생각한다.

제시문 (나)에서는 생명과학 I에서 다루고 있는 세 개의 대립유전자 (I^A, I^B, i) 에 의해 ABO식 혈액형이 결정되는 과정을 그림과 함께 설명하고 있다. 이에 더하여 교과서에서 간단히 언급하고 있는 H 기질 역시 유전자에 의해서 결정된다는 내용을 제시하고 H 기질의 표현형에 따라 ABO식 혈액형 유전자(I 유전자)의 표현형이 달라 질 수 있다는 내용을 설명하였다. 제시문 (나)의 경우, 생명과학 I 과정에서 중요하게 다루어지는 내용이기 때문에 학생들에게 익숙할 것이라고 판단하며, H 기질을 결정하는 H 유전자에 대한 내용은 교과서

에서 자세히 소개되어 있지는 않지만 큰 어려움 없이 이해할 수 있을 것이라고 생각한다.

(다) 제시문 출처

제시문 (가) : 생명과학 (by Campbell) 교재 참조
제시문 (나) : 생명과학 I (교학사)에 소개된 ABO식 혈액형의 유전 내용을 참조하였으며, H 기질의 유전자에 대한 내용은 생명과학 교재 참조

3. 논제 해설

[문제 1]은 A 와 B 두 유전자에 의해 호박의 색이 결정되는 경우를 제시하였다. 노란색을 결정하는 A 유전자는 녹색을 결정하는 a 대립 유전자에 대해 우성이므로 AA 또는 Aa 일 경우에는 노란색을 나타내고 aa일 경우에는 녹색을 나타낼 것이다. B 유전자는 BB 또는 Bb일 경우에는 A 유전자와 무관하게 흰색을 나타낸다고 하였다. 예를 들어 AABB, AABb, aaBB 모두 흰색을 나타낸다. 문제에서는 유전자형이 AaBb인 흰색 호박끼리 교배했을 때 다음 세대에서 나타나는 호박색의 비를 구할 수 있는 지를 묻고 있다. 따라서 교과과정에서 배운 퍼넷 사각형을 이용하여 다음 세대에서 나올 수 있는 유전자 형을 구한 후, A와 B 유전자형에 따른 표현형을 결정하여 그 비를 구하는 문제이다.

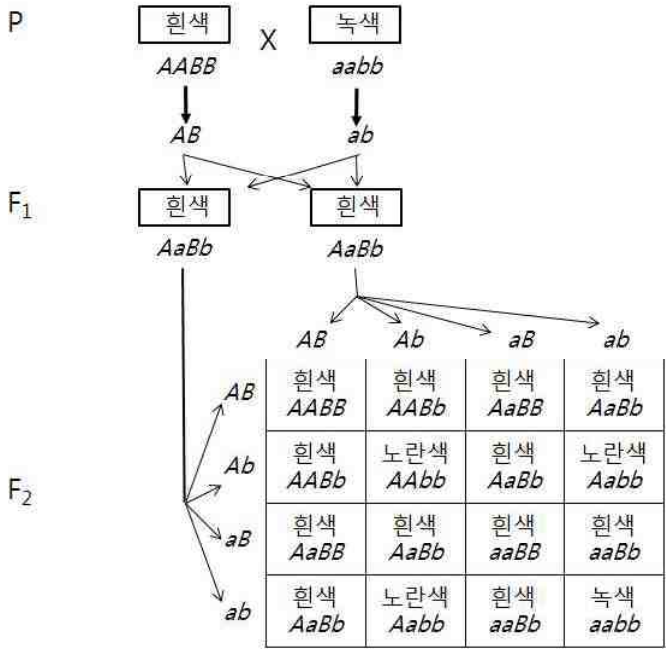
[문제 2]는 ABO 식 혈액형의 결정은 익숙한 내용이지만 H 기질 유전자인 H에 의해서 ABO식 혈액형이 영향을 받을 수 있다는 내용이 제시문에 있으므로 이것을 이용하는 문제이다. 부모가 모두 O 형인 경우 H 기질을 고려하지 않을 경우에는 부모 모두 ii 유전자형을 가져야 하고 자녀도 ii 유전자형만이 가능하기 때문에 항상 O형이어야 한다. 그러나 H 유전자를 고려할 경우 A형을 나타낸는 I^A 유전자를 가지고 있더라도 H 기질 유전자가 열성 동형(hh)일 경우에는 응집원 A가 결합하지 못하기 때문에 표현형은 O형이 된다. 이 내용을 이해하고 적용할 수 있는 지를 묻는 문제이다.

4. 평가 기준

- 멘델의 유전 법칙을 이해하고 있는가?
- 두 쌍의 대립 형질이 유전될 때 잡종 2대의 유전자형을 구할 수 있는가?
- 새로운 개념을 이해하고 적용할 수 있는가?

5. 예시 답안

[문제1] (10점) 문제에서 제시하고 있는 A B 유전자의 잡종 1대와 잡종 2대의 유전자형은 아래 그림과 같다.



그림에서 잡종 2대에서는 흰색 : 노란색 : 녹색이 12 : 3 : 1의 비율로 나타난다

[문제2] (10점) 1. 자녀에게서 A 형이 나타났다고 했으므로 I^A 유전자와 H 유전자를 갖고 있어야 한다.

2. 부모 모두 O형이라고 했으므로 부모의 유전자형은 iiHH, iiHh, I^AI^Ahh, I^AI^Bhh, I^BI^Bhh 중 하나이어야 한다.

3. 1의 조건을 만족시키는 경우는 부모 중 한 쪽의 유전자형은 iiHH 또는 iiHh이고 다른 한 쪽의 유전자형은 I^AI^Ahh 또는 I^AI^Bhh 이어야 한다.

4. 3의 조건을 충족시키는 O 형 부모에게서 A형 자녀가 태어날 수 있다.

예) 아버지는 유전자형이 iiHH 인 O 형이고 어머니는 유전자형이 I^AI^Ahh 인 O 형일 경우에 자녀의 유전자형은 I^AiHh이다. 이 자녀는 H 기질을 만들 수 있고, 또 I^A 유전자가 존재하므로 응집원 A를 결합할 수 있기 때문에 A형을 나타낸다.