문항카드 6

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	수시 모집 논술	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	경영경제계열 (수학) / 문제 3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	확률과 통계
	핵심 개념 및 용어	조건부확률, 연속확률변수, 확률분포
예상 소요 시간	20분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

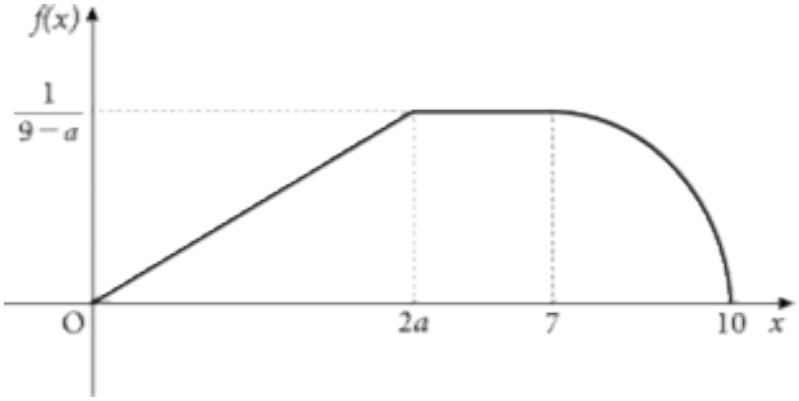
□ 다음 상황에 기초하여 문제에 답하시오. (풀이 과정 포함)

- 두 국가 M과 N에서 각각 48명과 42명의 학생을 선발하여, 스스로 진로를 결정한 정도가 진로 만족도에 미친 영향을 조사하였다.

- 학생이 스스로 진로를 결정한 정도를 '진로자기결정성'이라 할 때, 진로자기결정성을 1(낮음), 2(보통), 3(높음)의 값으로 조사한 결과는 다음과 같다.

- 국가 M의 학생 48명 중 진로자기결정성이 1이라고 답한 학생이 8명, 2라고 답한 학생이 28명, 3이라고 답한 학생이 12명이다.
- 국가 N의 학생 42명 중 진로자기결정성이 1이라고 답한 학생이 12명, 2라고 답한 학생이 21명, 3이라고 답한 학생이 9명이다.

- 한편, 연속확률변수인 진로 만족도 X가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le 10$이고, 진로자기결정성 값이 a일 때 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



- 어떤 학생의 진로 만족도가 7 이상이면, '매우 만족'으로 간주한다.

[문제 3] 선발된 90명의 학생 중 임의로 한 명을 택하여 진로 만족도를 조사하였더

니 '매우 만족'이었다고 할 때, 이 학생이 국가 M의 학생일 확률을 구하시오. [20점, 원고지 작성법을 준수할 필요 없음]

3. 출제 의도

일상생활에서의 복잡한 상황을 더 쉽게 표현하고 잘 이해하기 위해서, 상황을 확률적 문제로 계량화하는 작업은 아주 중요하다. 특히, 상황에 따른 확률변수와 확률분포를 이해하는 과정은 확률적 상황 및 성질을 파악하기 위한 중요한 과정이다. 본 문제에서는 연속확률변수의 확률밀도함수를 이용하여 두 개의 조건에 따른 확률을 계산하고, 조건부확률과 확률의 곱셈정리를 이용하여 특정 조건의 확률을 구하는 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2020-236호 [별책 8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
문제 3	[확률과 통계] - (2) 확률 - ② 조건부확률 [12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다. [12확통02-07] 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [확률과 통계] - (3) 통계 - ① 확률분포 [12확통03-01] 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	확률과 통계	권오남 외	교학사	2023	62-66 82-88
	확률과 통계	이준열 외	천재교육	2024	62-65 83-88
	확률과 통계	고성은 외	좋은책신사고	2020	58-61 79-83

5. 문항 해설

본 문제에서는 연속확률변수 X의 확률밀도함수가 '진로자기결정성' a의 값에 따라 달라지며 그에 따른 '매우 만족'일 확률이 a의 함수로 나타남을 파악해야 한다. 이와 함께 조사 결과를 바탕으로 국가별 '매우 만족' 확률을 구하고, 확률의 곱셈정리와 조건부확률을 활용하여 최종 확률을 구해야 한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 3	진로자기결정성 점수가 a일 때 '매우 만족'일 확률을 정확히 구하면 +6점 $P(A\cap B)$, $P(A^c\cap B)$를 정확히 계산하면 각 +6점 (총 +12점) 답을 정확히 계산하면 +2점	20

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.
※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ±1점을 부여할 수 있습니다.

7. 예시 답안 혹은 정답

(1) 진로자기결정성의 조사 결과를 표로 정리하면 다음과 같다.

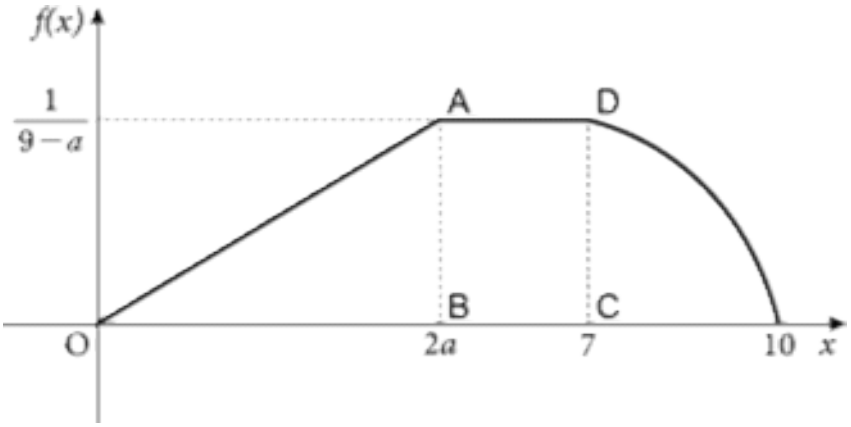
진로자기결정성		1	2	3	합계
학생 수	국가 M	8	28	12	48
	국가 N	12	21	9	42

위의 표를 통해 국가별로 진로자기결정성의 비율을 표로 정리하면 다음과 같다.

진로자기결정성		1	2	3	합계
학생 비율	국가 M	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{4}$	1
	국가 N	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{14}$	1

(2) 진로자기결정성 값이 a일 때, 진로 만족도가 '매우 만족'일 확률은 아래 그림에서 $7 \le x \le 10$에서의 그래프 아래 영역의 넓이와 같다. 이는 다시 말해 1에서 삼각형 OAB의 넓이와 사각형 ABCD의 넓이를 뺀 것과 같다. 삼각형 OAB의 넓이는 $\frac{a}{9-a}$,

사각형 ABCD의 넓이는 $\frac{7-2a}{9-a}$ 이므로, A 점수가 a일 때 '매우 만족'일 확률은 $1-\frac{a}{9-a}-\frac{7-2a}{9-a}=\frac{2}{9-a}$ 이다.



(3) 임의로 한 학생을 택했을 때, 학생이 국가 M의 학생인 사건을 A, 진로 만족도가 '매우 만족'인 사건을 B라 하자. 임의로 선택한 학생의 진로 만족도가 '매우 만족'이었을 때, 그 학생이 국가 M의 학생일 확률은 $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ 이다.

(4) $P(A\cap B)$는 어떤 학생이 국가 M의 학생이면서 진로 만족도가 '매우 만족'일 확률이다. 확률의 곱셈법칙에 의해 $P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$이다. $P(A)=\frac{48}{90}=\frac{8}{15}$ 이다.

(5) (1), (2)를 종합하면 다음과 같은 정보를 얻을 수 있다.

- 국가 M의 학생 중 $\frac{1}{6}$ 은 진로자기결정성이 $a=1$이므로 만족도가 '매우 만족'일 확률이 $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ 이다.

- 국가 M의 학생 중 $\frac{7}{12}$ 은 진로자기결정성이 $a=2$이므로 진로 만족도가 '매우 만족'일 확률이 $\frac{2}{7}$ 이다.

- 국가 M의 학생 중 $\frac{1}{4}$ 은 진로자기결정성이 $a=3$이므로 진로 만족도가 '매우 만족'일 확률이 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ 이다.

따라서 $P(B|A)=\left(\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{7}{12}\times\frac{2}{7}\right)+\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{24}$ 이다.

종합하면 $P(A\cap B)=\frac{8}{15}\times\frac{7}{24}=\frac{7}{45}$ 이다.

(6) (4), (5)와 같은 과정을 거치면 다음과 같은 정보를 얻을 수 있다.

- 국가 N의 학생 중 $\frac{2}{7}$ 은 진로자기결정성이 $a=1$ 이므로 만족도가 '매우 만족'일 확률이 $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ 이다.

- 국가 N의 학생 중 $\frac{1}{2}$ 은 진로자기결정성이 $a=2$ 이므로 진로 만족도가 '매우 만족'일 확률이 $\frac{2}{7}$ 이다.

- 국가 N의 학생 중 $\frac{3}{14}$ 은 진로자기결정성이 $a=3$ 이므로 진로 만족도가 '매우 만족'일 확률이 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ 이다.

따라서 $P(B\mid A^c)=\left(\frac{2}{7}\times\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{7}\right)+\left(\frac{3}{14}\times\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{7}$ 이다.

종합하면 $P(A^c\cap B)=P(A^c)P(B\mid A^c)=\frac{7}{15}\times\frac{2}{7}=\frac{2}{15}$ 이다.

(7) (5), (6)을 종합하면 $P(B)=P(A\cap B)+P(A^c\cap B)=\frac{7}{45}+\frac{2}{15}=\frac{13}{45}$ 이다.

(8) 최종적으로, 구하는 확률은 다음과 같다.

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{7}{45}}{\frac{13}{45}}=\frac{7}{13}$$

문항카드 7

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	수시 모집 논술	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 Ⅰ (수학) / 문제 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	확률과 통계
	핵심 개념 및 용어	독립시행, 수학적 확률, 조건부확률
예상 소요 시간	25분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

[문제 1] 다음 규칙에 따라 점수를 얻는 시행을 한다. 풀이와 함께 물음에 답하시오.

- 주머니에 빨간색 공 4개, 파란색 공 3개, 초록색 공 3개가 들어 있다.
- 서로 다른 2개의 주사위를 동시에 던져 나온 눈의 수의 합이 4 이하이면, 주머니에서 임의로 공 2개를 동시에 꺼낸다. 만일 눈의 수의 합이 5 이상이면, 주머니에서 임의로 공 1개를 꺼낸다.
- 꺼낸 공 중에서 빨간색 공의 개수를 점수로 얻는다.
- 꺼낸 공을 모두 주머니에 다시 넣는다.

위 시행을 2회 반복할 때, 얻은 점수의 합이 2 이상일 확률을 구하시오. [20점]

3. 출제 의도

일상생활에서의 복잡한 상황을 더 쉽게 표현하고 잘 이해하기 위해서, 상황을 확률적 문제로 계량화하는 작업은 아주 중요하다. 특히, 수학적 확률의 개념을 이해하고 독립시행에서의 확률을 계산하는 과정은 확률적 상황 및 성질을 파악하기 위한 중요한 과정이다. 본 문제에서는 주어진 상황에서 사건에 따른 조건부확률을 계산하고, 이를 종합하여 원하는 확률 계산해내는 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2020-236호 [별책 8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
문제 1	[확률과 통계] - (2) 확률 - 1 확률의 뜻과 활용 [12확통02-03] 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12확통02-04] 여사건의 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다. [확률과 통계] - (2) 확률 - 2 조건부확률 [12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다. [12확통02-06] 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다. [12확통02-07] 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	확률과 통계	권오남 외	교학사	2023	53-56 62-70
	확률과 통계	홍성복 외	지학사	2023	51-56 63-71
	확률과 통계	고성은 외	좋은책신사고	2020	50-53 58-66
	확률과 통계	이준열 외	천재교육	2024	53-56 62-69

5. 문항 해설

본 문제는 주사위를 던져 확률적인 시행을 한 후 2번의 시행으로부터 얻은 점수의 확률을 계산하는 과정을 다루고 있다. 확률의 덧셈정리 및 곱셈정리를 이용하여 각 시행에서의 점수의 확률을 계산하고, 각 시행이 독립시행임을 이용하여 점수의 확률을 개별 시행의 점수의 확률로 나타내 최종 확률을 계산할 수 있어야 한다. 여사건의 확률을 이용하여 계산을 더욱 간단히 할 수 있다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 1	사건 A의 확률을 정확히 계산하면 +2점 사건 C, D의 조건부확률을 정확히 계산하면 +8점 - $P(C\|A)$, $P(D\|A)$, $P(C\|A^c)$, $P(D\|A^c)$를 정확히 계산하면 각 +2점 사건 C, D의 확률을 정확히 계산하면 +8점 - $P(C)$, $P(D)$를 정확히 계산하면 각 +4점 최종 확률을 정확히 계산하면 +2점	20

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.
※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ±1점을 부여할 수 있습니다.

7. 예시 답안 혹은 정답

(1) 2개의 주사위를 동시에 던져 나온 수의 눈의 합이 4 이하인 사건을 A라고 하자. 2개의 주사위를 동시에 던져 나온 수의 눈의 합이 4 이하인 경우의 수는 (1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (2,2), (3,1)의 6가지이므로, 사건 A가 일어날 확률은 $P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ 이다.

(2) 시행을 2회 반복할 때 얻은 점수의 합이 0인 사건과 점수의 합이 1인 사건은 서로 배반사건이므로, 점수의 합이 2 미만일 확률은 점수의 합이 0인 확률과 점수의 합이 1인 확률의 합과 같다. 또한, 점수의 합이 2 이상인 사건은 점수의 합이 2 미만인 사건의 여사건이다. 따라서,
$P(\text{점수의 합} \geq 2)=1-P(\text{점수의 합} \leq 1)=1-P(\text{점수의 합}=0)-P(\text{점수의 합}=1)$
으로 구할 수 있다.

(3) 문제의 시행을 1회 했을 때 얻은 점수를 X라 하고, $X=0$인 사건을 C, $X=1$인 사건을 D라 하자. 각 시행은 독립시행이므로 $P(\text{점수의 합}=0)=\{P(C)\}^2$ 이며, 점수의 합이 1이려면 첫 번째 시행에서 0점, 두 번째 시행에서 1점을 얻거나 첫 번째 시행에서 1점, 두 번째 시행에서 0점을 얻으면 되므로
$P(\text{점수의 합}=1)=P(C)\times P(D)+P(D)\times P(C)=2\times P(C)\times P(D)$ 이다.

(4) 확률의 곱셈정리와 덧셈정리를 이용하면, $P(C)$, $P(D)$는 다음과 같이 구할 수 있다.
$P(C)=P(C\cap A)+P(C\cap A^c)=P(A)P(C|A)+P(A^c)P(C|A^c)$
$P(D)=P(D\cap A)+P(D\cap A^c)=P(A)P(D|A)+P(A^c)P(D|A^c)$

(5) $P(C|A)$와 $P(D|A)$, $P(C|A^c)$와 $P(D|A^c)$는 다음과 같이 구할 수 있다.

$P(C|A)=\frac{{}_6C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$, (나머지 색깔 중에서만 2개를 꺼낼 확률)

$P(D|A)=\frac{{}_6C_1\times{}_4C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{24}{45}=\frac{8}{15}$, (빨간색 공 1개, 나머지 색깔 중 1개를 꺼낼 확률)

$P(C|A^c)=\frac{{}_6C_1}{{}_{10}C_1}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$, (나머지 색깔 중에서만 1개를 꺼낼 확률)

$P(D|A^c)=\frac{{}_4C_1}{{}_{10}C_1}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$, (빨간색 공 1개를 꺼낼 확률)

(6) (4), (5)를 종합하면, $P(C)$, $P(D)$는 다음과 같다.

$P(C)=\left(\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{5}{6}\times\frac{3}{5}\right)=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}$,

$P(D)=\left(\frac{1}{6}\times\frac{8}{15}\right)+\left(\frac{5}{6}\times\frac{2}{5}\right)=\frac{19}{45}$

(7) 최종적으로, 구하는 확률은 다음과 같다.

$$1-\{P(C)\}^2-2\times P(C)\times P(D)=1-\left(\frac{5}{9}\right)^2-\left(2\times\frac{5}{9}\times\frac{19}{45}\right)=1-\frac{25}{81}-\frac{38}{81}=\frac{18}{81}=\frac{2}{9}$$

별 해

(1) 여사건을 활용하지 않고 직접 답을 구할 수 있다. $X=2$인 사건을 E라 하면

$P(E)=\left(\frac{1}{6}\times\frac{{}_4C_2}{{}_{10}C_2}\right)+\left(\frac{5}{6}\times 0\right)=\frac{1}{45}$ 이며, 이때

점수의 합이 2일 확률$=2\times P(C)\times P(E)+\{P(D)\}^2=\frac{2}{81}+\frac{361}{45^2}=\frac{411}{45^2}$

점수의 합이 3일 확률$=2\times P(D)\times P(E)=\frac{38}{45^2}$

점수의 합이 4일 확률$=\{P(E)\}^2=\frac{1}{45^2}$

이므로 모두 더하면 $\frac{411+38+1}{45^2}=\frac{450}{45^2}=\frac{2}{9}$ 이다.

문항카드 8

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	수시 모집 논술	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 Ⅰ (수학) / 문제 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	문제 2-1: 수학 Ⅰ 문제 2-2: 미적분
	핵심 개념 및 용어	문제 2-1: $\{a_n\}$, $\sum_{k=1}^{n} a_k$ 문제 2-2: 부분적분법
예상 소요 시간	30분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2] 다음을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

[제시문]

- 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면 일반항과 수열의 합의 관계는 다음과 같다.

  $a_1 = S_1,\ a_n = S_n - S_{n-1}\ (n \geq 2)$

- 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때, 다음 식이 성립한다.

  $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$

[문제 2-1] 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 다음을 만족시킬 때, a_1을 구하시오. [10점]

(가) $S_n = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n - 2 & (n\text{이 짝수인 경우}) \\ 2a_n + 3 & (n\text{이 3 이상인 홀수인 경우}) \end{cases}$

(나) $S_8 = 2025$

[문제 2-2] 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[-1, 1]$에서

$$f(x) = \begin{cases} -x^2\cos(\pi x) & (-1 \leq x < 0) \\ x^2\cos(\pi x) & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x) = \frac{1}{2}f(x-2) - \frac{3}{2}$을 만족시킨다. 이때, 정적분 $\int_{-4}^{-1} f(x)dx$의 값을 구하시오. [15점]

3. 출제 의도

본 문제에서는 고교 수학에서 중요하게 다루는 수열과 수열의 합, 함수의 부분적분 등을 잘 이해하고 있는지 평가한다.

[문제 2-1] 고교과정에서 다루는 수열의 합을 이용하여 수열을 계산하는 방법을 숙지하고 있는지 평가한다.

[문제 2-2] 부분적분을 이용하고 활용하여 여러 가지 함수의 정적분을 계산할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2020-236호 [별책 8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문 1	[수학 I] - (3) 수열 - ② 수열의 합 [12수학 I 03-05] 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
제시문 2	[미적분] - (3) 적분법 - ① 여러 가지 적분법 [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문제 2-1	[수학 I] - (3) 수열 - ② 수열의 합 [12수학 I 03-04] Σ의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12수학 I 03-05] 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
문제 2-2	[미적분] - (3) 적분법 - ① 여러 가지 적분법 [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 I	권오남 외	교학사	2023	124
	수학 I	고성은 외	신사고	2023	121
	수학 I	배종숙 외	금성출판사	2023	131
	수학 I	류희찬 외	천재교과서	2020	130
	미적분	홍성복 외	지학사	2023	149
	미적분	고성은 외	신사고	2023	137
	미적분	김원경 외	비상	2023	132
	미적분	류희찬 외	천재교과서	2023	173

5. 문항 해설

[문제 2-1]
본 문제는 수열의 합을 이용하여 일반항을 구하는 공식을 이용하여 처음 몇 개의 항을 구함으로써 거꾸로 첫 번째 항을 유추하게 하는 문제로 수열의 합을 이용하여 첫 번째 항을 유추하는 문제이다.

[문제 2-2]
문제에 주어진 조건을 이해하여 함수식을 각 구간에서 유추하고 유추된 함수식을 부분적분하여 정적분의 값을 구하는 문제이다. 부분적분을 하는 함수는 교과서에서 학생들이 연습한 함수이며 부분적분을 하여 정적분의 값을 구할 수 있는지 평가하고자 하였다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 2-1	$S_{2m+2}=-S_{2m+1}-4$ 혹은 $S_{2m+1}=2S_{2m}-3$ 를 얻으면 +2점 $S_{2m+2}=-2S_{2m}-1$ 을 얻으면 +5점 모든 계산을 정확히 계산하여 $a_1=\frac{499}{2}$ 을 얻으면 +3점	10
문제 2-2	각 구간에서 함수의 형태를 바르게 구하면 +5점 적분식을 계산하여 $(*)=4\int_0^1 x^2\cos\pi x dx+15$ 를 바르게 얻으면 +5점 부정적분 $\int x^2\cos\pi x\,dx=\frac{1}{\pi}x^2\sin\pi x+\frac{2}{\pi^2}x\cos\pi x-\frac{2}{\pi^3}\sin\pi x+C$를 바르게 계산하여 정답 $-\frac{8}{\pi^2}+15$를 얻으면 +5점	15

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.
※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ±1점을 부여할 수 있습니다.

7. 예시 답안 혹은 정답

[문제 2-1]
제시문에서 주어진 식 $a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\geq 2)$를 이용하면

$n=2m+2$ $(m\geq 0)$인 경우, $S_{2m+2}=\frac{1}{2}(S_{2m+2}-S_{2m+1})-2$,

즉, $S_{2m+2}=-S_{2m+1}-4$ 를 얻는다.

$n=2m+1$ $(m\geq 1)$인 경우, $S_{2m+1}=2(S_{2m+1}-S_{2m})+3$,

즉, $S_{2m+1}=2S_{2m}-3$ 을 얻는다.

그러므로, $S_{2m+2}=-(2S_{2m}-3)-4=-2S_{2m}-1$ 이고, 반복하여 대입하면

$S_8=-2S_6-1=4S_4+1=-8S_2-3$ 을 얻는다. 따라서, $S_2=-\frac{507}{2}$ 이고,

$S_2=-S_1-4$ 를 이용하면, $S_1=a_1=\frac{499}{2}$ 이다.

(별해) 주어진 제시문을 이용하여 $S_2-S_1=\frac{1}{2}a_2-2-a_1=a_2$ 이므로, $a_2=-2a_1-4$,

$S_2=-a_1-4$ 를 얻는다. $S_3-S_2=2a_3+3-(-a_1-4)=a_3$ 이므로, $a_3=-a_1-7$,

$S_3=-2a_1-11$ 을 얻고, 동일한 방법으로 $a_4=4a_1+18$, $S_4=2a_1+7$,

$a_5=2a_1+4$, $S_5=4a_1+11$, $a_6=-8a_1-26$, $S_6=-4a_1-15$,

$a_7=-4a_1-18$, $S_7=-8a_1-33$,

$a_8=16a_1+62$, $S_8=8a_1+29$ 를 얻는다. 따라서, $a_1=\frac{499}{2}$ 를 얻는다.

[문제 2-2]

$f(x)=\frac{1}{2}f(x-2)-\frac{3}{2}$ 이므로 $f(x-2)=2f(x)+3$

즉, $f(x)=2f(x+2)+3=4f(x+4)+9$이다.

따라서, $-4\le x<-3$일 때, $f(x)=4(x+4)^2\cos(\pi(x+4))+9$ 이고,

$-3\le x<-2$일 때, $f(x)=-2(x+2)^2\cos(\pi(x+2))+3$,

$-2\le x<-1$ 일 때, $f(x)=2(x+2)^2\cos(\pi(x+2))+3$ 이다.

구하는 정적분을

$$\int_{-4}^{-1}f(x)\,dx=4\int_{-4}^{-3}(x+4)^2\cos\pi(x+4)dx-2\int_{-3}^{-2}(x+2)^2\cos\pi(x+2)dx+2\int_{-2}^{-1}(x+2)^2\cos\pi(x+2)dx+15$$

$$=4\int_0^1x^2\cos(\pi x)dx-2\int_0^1x^2\cos(\pi x)dx+2\int_0^1x^2\cos(\pi x)dx+15=4\int_0^1x^2\cos\pi x dx+15\cdots(*)$$로

정리할 수 있다.

주어진 제시문의 부분적분에 의해

$$\int x^2\cos\pi x\,dx=\frac{1}{\pi}x^2\sin\pi x-\frac{2}{\pi}\int x\sin\pi x\,dx=\frac{1}{\pi}x^2\sin\pi x+\frac{2}{\pi^2}x\cos\pi x-\frac{2}{\pi^2}\int\cos\pi x dx$$

$$=\frac{1}{\pi}x^2\sin\pi x+\frac{2}{\pi^2}x\cos\pi x-\frac{2}{\pi^3}\sin\pi x+C$$ 이다.

따라서, $(*)=4\left[\frac{1}{\pi}x^2\sin\pi x+\frac{2}{\pi^2}x\cos\pi x-\frac{2}{\pi^3}\sin\pi x\right]_0^1+15=-\frac{8}{\pi^2}+15$ 이다.

문항카드 9

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	수시 모집 논술	
해당 대학의 계열(과목) / 문항 번호	자연계열 I (수학) / 문제 3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	문제 3-1: 미적분, 수학 문제 3-2: 미적분
	핵심 개념 및 용어	문제 3-1: 접선의 기울기, 점과 직선 사이의 거리 문제 3-2: 삼각함수의 덧셈정리, 치환적분
예상 소요 시간	30분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

[문제 3] 다음을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

- 점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는 다음과 같다.

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

- 모든 실수 α, β에 대하여 다음 식이 성립한다.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

- 미분가능한 함수 $g(x)$의 도함수 $g'(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$를 포함하는 열린구간에서 연속이고, $g(a)=\alpha$, $g(b)=\beta$에 대하여 함수 $f(x)$가 α와 β를 양끝으로 하는 닫힌구간에서 연속일 때 다음 식이 성립한다.

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$$

[문제 3-1] 좌표평면 위에 점 A$(3,0)$, B$(4,2)$가 있다. 방정식 $y^3-3e^{2x}y+2e^{3x}=0$을 만족시키는 점 P(x,y)에 대하여 삼각형 PAB의 넓이의 최솟값을 구하시오. (단, $y\geq 0$이다.) [10점]

[문제 3-2] $\overline{AB}=2$, $\overline{AC}=1$이고 $\angle BAC=3x$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 BC 위의 점 D를 $\angle BAD=x$가 되도록 잡자. 선분 AD의 길이를 $f(x)$라 할 때, 정적분 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\sin^3 x\,dx$의 값을 구하시오. [15점]

3. 출제 의도

함수의 미분과 적분을 문제에 맞게 적절히 구사하여 주어진 문제를 해결할 수 있는지 평가한다. 또한 점과 직선과의 거리를 구할 수 있는지, 삼각함수의 기본연산을 잘 이해하고 있는지 평가한다.

[문제 3-1] 주어진 방정식의 그래프를 이해하는지 그리고 미분을 통하여 주어진 직선과 가장 가까운 점을 구할 수 있는지 평가한다. 이를 통해 삼각형의 넓이의 최솟값을 구할 수 있는지 평가한다.

[문제 3-2] 주어진 상황에 맞는 함수를 구성하고 이를 정적분할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2020-236호 [별책 8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문 1	[수학] - (2) 기하 - ② 직선의 방정식 [10수학02-05] 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.
제시문 2	[미적분] - (2) 미분법 - ① 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.
제시문 3	[미적분] - (3) 적분법 - ① 여러 가지 적분법 [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다,
문제 3-1	[미적분] - (2) 미분법 - ① 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. [수학] - (2) 기하 - ② 직선의 방정식 [10수학02-05] 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.
문제 3-2	[미적분] - (2) 미분법 - ① 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. [미적분] - (3) 적분법 - ① 여러 가지 적분법 [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다,

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	김원경 외	비상교육	2023	120-122
	수학	홍성복 외	지학사	2024	134-135
	미적분	김원경 외	비상교육	2023	58-62
	미적분	김준열 외	천재교육	2023	147-154
	미적분	박교식 외	동아출판	2023	61-66
	미적분	홍성복 외	지학사	2021	144-147

5. 문항 해설

[문제 3-1]
주어진 방정식의 그래프를 이해하고 삼각형의 넓이의 최솟값을 구하기 위하여 미분을 통하여 주어진 직선과 가장 가까운 점을 구할 수 있는지 평가한다.

[문제 3-2]
삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 함수를 구성하고 치환적분을 이용하여 주어진 정적분의 값을 구할 수 있는지 평가한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 3-1	$y=e^x$을 구하면 +4점 점 $(\ln 2, 2)$을 구하면 +3점 거리 $\frac{8-2\ln 2}{\sqrt{5}}$을 구하고 삼각형의 넓이 $4-\ln 2$ 를 구하면 +3점	10
문제 3-2	$2\sin 3x = 2f(x)\sin x + f(x)\sin 2x$을 구하면 +4점 $f(x)=\frac{4\cos^2 x-1}{1+\cos x}$ 을 구하면 +4점 정적분 값 $\frac{\sqrt{2}}{6}-\frac{3}{16}$을 구하면 +7점	10

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.
※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ±1점을 부여할 수 있습니다.

7. 예시 답안

[문제 3-1]

$0 = y^3 - 3e^{2x}y + 2e^{3x} = (y - e^x)^2(y + 2e^x)$ 이므로 $\mathrm{P}(x, y)$는 $y = e^x$ 또는 $y = -2e^x$ 위에 있다. $y \geq 0$ 이므로 $y = e^x$ 위에 있다. 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은 $2x - y - 6 = 0$ 이다. $y = e^x$ 에서 기울기가 2인 점은 $(\ln 2, 2)$ 이고, 이 점에서 직선 $2x - y - 6 = 0$ 까지의 거리는 $\dfrac{8 - 2\ln 2}{\sqrt{5}}$ 이다. $\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{5}$ 이므로 삼각형의 넓이의 최솟값은 $4 - \ln 2$ 이다.

[문제 3-2]

두 삼각형의 넓이의 합이 전체 삼각형의 넓이와 같다는 것을 이용하면

$$2\sin 3x = 2f(x)\sin x + f(x)\sin 2x$$

이고 $\sin 3x = \sin(x + 2x) = \sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x$ 를 이용하여 정리하면

$$f(x) = \frac{4\cos^2 x - 1}{1 + \cos x}$$

이다. $\cos x = y$ 로 치환하여 적분하면 아래와 같다.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{4\cos^2 x - 1}{1 + \cos x} \sin^3 x \, dx = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{4y^2 - 1}{y + 1}(1 - y^2)\, dy$$

$$= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (4y^2 - 1)(1 - y)\, dy = \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{3}{16}$$

문항카드 10

1. 일반정보

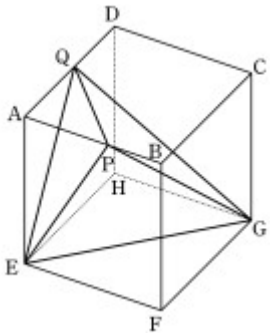
유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	수시 모집 논술	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열I(수학) / 문제 4	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	문제 4-1: 기하 문제 4-2: 기하
	핵심 개념 및 용어	문제 4-1: 삼수선의 정리 문제 4-2: 쌍곡선(초점, 점근선)
예상 소요 시간	35분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

[문제 4] 다음을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

- 평면 α 위에 있지 않은 점 P, 평면 α 위의 점 O, 점 O를 지나지 않는 α 위의 직선 l, 직선 l 위의 점 H에 대하여 $\overline{PO} \perp \alpha$, $\overline{OH} \perp l$이면 $\overline{PH} \perp l$이다.
- 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$의 점근선의 방정식은 $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$이다.
- 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은 $\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$이다.

[문제 4-1] 그림과 같이 한 모서리의 길이가 2인 정육면체 ABCD－EFGH의 선분 AB, AD 위에 점 P, Q가 각각 놓여 있다. 삼각형 PEG, QEG의 넓이가 각각 $\sqrt{10}$과 3일 때, 삼각형 EPQ의 넓이를 구하시오. [15점]



[문제 4-2] 두 초점이 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)\,(c > 0)$인 쌍곡선 $x^2 - 3y^2 = 1$ 위의 점 $P(a, b)\,(a > 0, b > 0)$에서의 접선이 y축과 만나는 점을 Q, 쌍곡선의 점근선 중 기울기가 양수인 직선과 만나는 점을 R라 하자. 삼각형 OQR의 넓이를 x축이 이등분할 때, 점 F와 직선 F′P 사이의 거리를 구하시오. (단, O는 원점이다.) [15점]

3. 출제 의도

공간도형의 기본 구성 요소인 점, 직선, 평면의 성질을 잘 이해하고 이차곡선을 대수적으로 잘 다룰 수 있는지를 평가한다.

[문제 4-1] 삼수선의 정리를 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

[문제 4-2] 쌍곡선과 접선의 위치 관계를 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2020-236호 [별책 8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문 1	[기하] - (3) 공간도형과 공간좌표 - ① 공간도형 [12기하03-02] 삼수선의 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
제시문 2	[기하] - (1) 이차곡선 - ① 이차곡선 [12기하01-03] 쌍곡선의 뜻을 알고, 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있다.
제시문 3	[기하] - (1) 이차곡선 - ① 이차곡선 [12기하01-04] 이차곡선과 직선의 위치 관계를 이해하고, 접선의 방정식을 구할 수 있다.
문제 4-1	[기하] - (3) 공간도형과 공간좌표 - ① 공간도형 [12기하03-02] 삼수선의 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문제 4-2	[기하] - (1) 이차곡선 - ① 이차곡선 [12기하01-03] 쌍곡선의 뜻을 알고, 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있다. [12기하01-04] 이차곡선과 직선의 위치 관계를 이해하고, 접선의 방정식을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	기하	권오남 외	교학사	2022	32 49 129
	기하	류희찬 외	천재교과서	2023	32 46 131

5. 문항 해설

[문제 4-1]
공간도형의 선과 선, 선과 면의 위치 관계를 이용하여 주어진 삼각형의 넓이를 구하는 문제이다. 삼수선 정리를 활용하여 직각삼각형을 찾아 변의 길이를 구할 수 있는지를 평가한다.

[문제 4-2]
주어진 점에서의 쌍곡선의 접선과 쌍곡선의 점근선 사이의 위치 관계를 이용하여 점과 직선 사이의 거리를 구하는 문제이다. 접선의 방정식을 잘 활용할 수 있는지를 평가한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 4-1	$\overline{\mathrm{AP}} = \sqrt{2}$ 를 구하면 +5점 $\overline{\mathrm{AQ}} = 1$ 을 구하면 +5점 $\Delta \mathrm{EPQ} = \frac{\sqrt{14}}{2}$ 를 구하면 +5점	15
문제 4-2	$c = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 를 구하면 +3점 $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 을 구하면 +3점 $b = \frac{1}{3}$ 을 구하면 +3점 점 F 와 직선 $\mathrm{F'P}$ 사이의 거리 $\frac{4\sqrt{3}}{21} = \left(\frac{4}{7\sqrt{3}}\right)$ 를 구하면 +6점	15

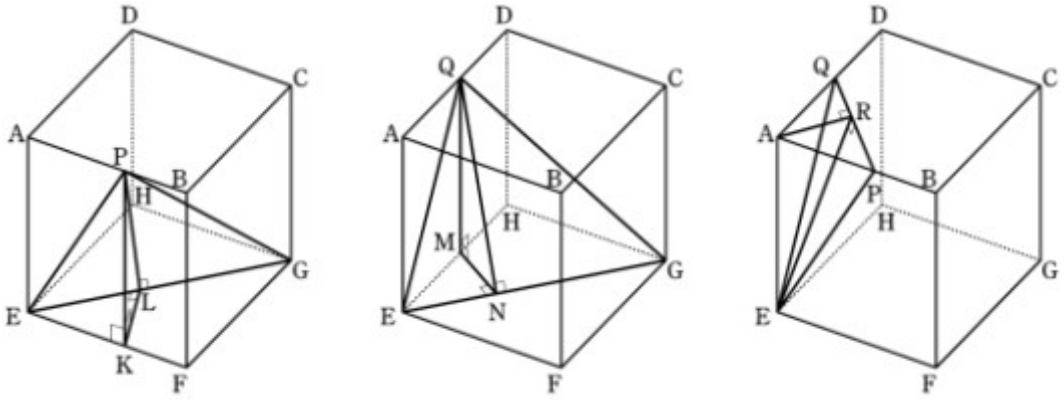
※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.
※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ±1점을 부여할 수 있습니다.

7. 예시 답안 혹은 정답

[문제 4-1]

그림 (가), (나)와 같이 점 P, Q에서 선분 EF, EH에 내린 수선의 발을 각각 K, M이라고 하고 점 K, M에서 선분 EG에 내린 수선의 발을 각각 L, N이라고 하자. 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{PL} \perp \overline{EG}$ 이고 $\overline{QN} \perp \overline{EG}$ 이다. 직각이등변삼각형 EFG에서 $\overline{EG} = 2\sqrt{2}$ 이므로 $\sqrt{10} = \Delta PEG = \frac{\overline{EG} \times \overline{PL}}{2}$ 에서 $\overline{PL} = \sqrt{5}$ 이고 $3 = \Delta QEG = \frac{\overline{EG} \times \overline{QN}}{2}$ 에서 $\overline{QN} = \frac{3}{\sqrt{2}}$ 이다.

직각삼각형 PKL, QMN에서 $\overline{KL} = \sqrt{\overline{PL}^2 - \overline{PK}^2} = 1$이고 $\overline{MN} = \sqrt{\overline{QN}^2 - \overline{QM}^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$이다.

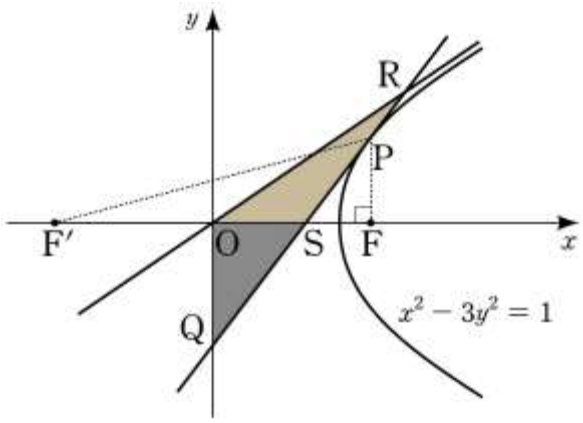


직각이등변삼각형 KLE, ENM에서 $\overline{AP} = \overline{EK} = \sqrt{\overline{EL}^2 + \overline{KL}^2} = \sqrt{\overline{KL}^2 + \overline{KL}^2} = \sqrt{2}$ 와 $\overline{AQ} = \overline{EM} = \sqrt{\overline{EN}^2 + \overline{MN}^2} = \sqrt{\overline{MN}^2 + \overline{MN}^2} = 1$을 얻는다.

그림 (다)와 같이 점 A에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 R라 하면 $\overline{PQ} \perp \overline{ER}$ 이다. 직각삼각형 QAP에서 $\overline{PQ} = \sqrt{\overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2} = \sqrt{3}$ 이므로 $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\overline{AP} \times \overline{AQ}}{2} = \Delta APQ = \frac{\overline{PQ} \times \overline{AR}}{2}$에서 $\overline{AR} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 이다. 직각삼각형 RAE에서 $\overline{ER} = \sqrt{\overline{AR}^2 + \overline{AE}^2} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{3}}$ 이므로

$$\Delta EPQ = \frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times \overline{ER} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

[문제 4-2]



$c=\sqrt{1+\frac{1}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 에서 두 초점 F,F' 의 좌표는 각각 $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},0\right)$, $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},0\right)$ 이므로 $\overline{\mathrm{F'F}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 이다. 점 P 에서의 접선의 방정식 $ax-3by=1$ 과 점근선의 방정식 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$ 을 연립하여 점 R 의 x 좌표가 $\frac{1}{a-\sqrt{3}b}$ 임을 알 수 있다. 접선 $ax-3by=1$ 이 x 축과 만나는 점을 S 라 할 때, 점 S 의 x 좌표는 $\frac{1}{a}$ 이다.

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OQ}}\times(\text{점 R의 } x\text{좌표})=\Delta\mathrm{OQR}=2\Delta\mathrm{OQS}=2\times\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OQ}}\times(\text{점 S의 } x\text{좌표})$ 에서 $a=2\sqrt{3}b$ 를 얻는다. 점 $\mathrm{P}(a,b)$ 가 쌍곡선 위의 점이므로 $a^2-3b^2=1$ 이므로 $a=2\sqrt{3}b$ 를 대입하여 $a=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $b=\frac{1}{3}$ 이다. 따라서 $\overline{\mathrm{FP}}=\frac{1}{3}$, $\overline{\mathrm{F'P}}=2+\overline{\mathrm{FP}}=2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$ 이고 삼각형 $\mathrm{F'FP}$ 은 직각삼각형이다. 점 F 에서 직선 F′P 에 내린 수선의 발을 H 라 하면 $\overline{\mathrm{FH}}\times\overline{\mathrm{F'P}}=2\times\Delta\mathrm{F'FP}=\overline{\mathrm{F'F}}\times\overline{\mathrm{FP}}$ 에서 $\overline{\mathrm{FH}}=\frac{4\sqrt{3}}{21}$ 을 얻는다. 따라서 점 F 와 직선 F′P 사이의 거리는 $\frac{4\sqrt{3}}{21}$ 이다.