

# 자연계열 Ⅱ 문제지

## 수학

**[문제 1]** **좌표평면의 원점 O에 있는 점 A는 다음과 같은 규칙에 따라 이동한다.**

- 주머니에 숫자 2가 적힌 공 1개와 숫자 3이 적힌 공 1 개가 들어 있다.
- 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼낸 후 그 공에 적힌 숫자를 $m$이라 하자. 점 A는 $\frac{1}{m}$ 의 확률로 원점 O와 점 $\mathrm{P}(12,0)$을 이은 선분 OP를 $m:1$로 내분하는 점으로 이동하거나, $1-\frac{1}{m}$의 확률로 선분 OP를 $1:m$으로 외분하는 점으로 이동한다. 이때 이동한 점을 $\mathrm{A}_1(x_1,0)$이라 하고, 꺼낸 공은 다시 집어넣지 않는다.
- 주머니에 남아 있는 공에 적힌 숫자를 $n$이라 하자. 점 $\mathrm{A}_1$은 $\frac{2}{n}$의 확률로 점 $\mathrm{A}_1$과 점 $\mathrm{Q}(x_1,8)$을 이은 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{Q}$를 $1:n$으로 내분하는 점으로 이동하거나, $1-\frac{2}{n}$의 확률로 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{Q}$를 $n:1$로 외분하는 점으로 이동한다. 이때 이동한 점을 $\mathrm{A}_2(x_1,y_1)$이라 한다.

**두 점 $\mathrm{A}_2(x_1,y_1)$, $\mathrm{P}(12,0)$사이의 거리가 $|x_1|$ 보다 작을 확률을 구하시오. [20점]**

**[문제 2]** 다음을 읽고 문제에 답하시오.

- 함수 $f(t)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때 다음 식이 성립한다.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \quad (\text{단, } a < x < b)$$

- 함수 $f(x)$가 $x = a$에서 미분가능하고 $x = a$에서 극값을 가지면 $f'(a) = 0$이다.
- 함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 미분가능할 때, 그 구간에 속하는 모든 $x$에 대하여 $f'(x) > 0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 증가하고, $f'(x) < 0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다.
- 좌표평면 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(x, y)$의 시각 $t$에서의 위치가 함수 $x = f(t)$, $y = g(t)$로 나타내어질 때, $t = a$에서 $t = b$까지 점 P가 움직인 거리는 $s = \int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}\,dt$ 이다.
- 미분가능한 함수 $g(x)$의 도함수 $g'(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$를 포함하는 열린구간에서 연속이고, $g(a) = \alpha$, $g(b) = \beta$에 대하여 함수 $f(x)$가 $\alpha$와 $\beta$를 양끝으로 하는 닫힌구간에서 연속일 때 다음 식이 성립한다.

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(t)\,dt$$

**[문제 2-1]** 닫힌구간 $[-1, 5]$에서 함수

$$f(x) = \int_{-1}^x (t^2+5)\left\{1-2\sin\left(\frac{\pi t}{t^2+5}\right)\right\}dt$$

의 최댓값을 구하시오. [10점]

**[문제 2-2]** 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t$에서의 좌표 $(x, y)$가

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}}\cos t, \qquad y = \sqrt{3}\ln\left(1+\frac{\sin^2 t}{8}\right)$$

일 때, 시각 $t = 0$에서 $t = \pi$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오. [15점]

**[문제 3]** 다음을 읽고 문제에 답하시오.

- 좌표평면에서 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$사이의 거리는 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ 이다.
- 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.
- 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$이다.

**[문제 3-1]** 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n=\int_0^{\ln(n+1)}(2e^{2x}-e^x)\,dx$ 일 때, 다음 식의 값을 구하시오. [10점]

$$\sum_{k=1}^{99}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+1\right)\frac{1}{a_k}$$

**[문제 3-2]** 좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{A}(5,0)$, $\mathrm{B}(0,5)$, $\mathrm{P}(7\cos\theta, 7\sin\theta)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값을 $m$이라 할 때, $m^2$의 값을 구하시오. (단, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$이다.) [15점]

**[문제 4]** 다음을 읽고 문제에 답하시오.

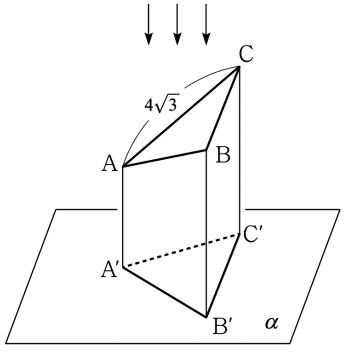
- 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 $m$인 접선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ 이다.
- 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 $\alpha,\beta$라 하면 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$이고 $\alpha\beta=\frac{c}{a}$ 이다.
- 평면 $\beta$위에 있는 도형의 넓이를 $S$, 이 도형의 평면 $\alpha$위로의 정사영의 넓이를 $S'$이라 할 때,

  두 평면 $\alpha,\beta$가 이루는 각의 크기를 $\theta\,(0^\circ\le\theta\le90^\circ)$라 하면 $S'=S\cos\theta$이다.

**[문제 4-1]** 직선 $y=\sqrt{3}$ 위의 점 $\mathrm{P}(k,\sqrt{3})$에서 타원 $x^2+\frac{y^2}{2}=1$에 그은 두 접선이 이루는 예각이 $45^\circ$일 때, $k^2$의 값을 구하시오. [15점]

**[문제 4-2]** 넓이가 $6\sqrt{3}$이고 $\overline{\mathrm{AC}}=4\sqrt{3}$인 삼각형 $\mathrm{ABC}$가 평면 $\alpha$와 만나지 않게 놓여 있다. 평면 $\alpha$에 수직으로 입사하는 빛에 의한 삼각형 $\mathrm{ABC}$의 그림자가 평면 $\alpha$위에서 그림과 같이 정삼각형 $\mathrm{A'B'C'}$을 이룬다.

$\overline{\mathrm{AA'}}+\overline{\mathrm{CC'}}=2\overline{\mathrm{BB'}}=10$일 때, 삼각형 $\mathrm{ABC}$의 내접원의 그림자의 넓이를 구하시오. [15점]





# 자연계열 II 문제해설

## 1. 예시답안 및 채점기준

**[문제 1]** 예시답안

(1) 선분의 내분점과 외분점은 다음과 같이 정의된다.

- 좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$를 이은 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점의 좌표는 $\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$이다. $(m>0,\ n>0)$
- 선분 AB를 $m:n$으로 외분하는 점의 좌표는 $\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$이다. $(m>0,\ n>0,\ m\neq n)$

(2) 일반적으로 $(m, n)$인 경우 $A_1(x_1, 0)$과 $A_2(x_1, y_1)$은 다음과 같이 계산할 수 있다.

| 선분 OP | $A_1(x_1, 0)$ | 확률 | 선분 $A_1Q$ | $A_2(x_1, y_1)$ | 확률 |
|---|---|---|---|---|---|
| $m:1$로 내분 | $\left(\frac{12m}{m+1}, 0\right)$ | $\frac{1}{m}$ | $1:n$으로 내분 | $\left(x_1, \frac{8}{1+n}\right)$ | $\frac{2}{n}$ |
| $1:m$로 내분 | $\left(\frac{12}{1-m}, 0\right)$ | $1-\frac{1}{m}$ | $n:1$로 내분 | $\left(x_1, \frac{8n}{n-1}\right)$ | $1-\frac{2}{n}$ |

(3) $m=2$, $n=3$인 경우

- 선분 OP를 $2:1$로 내분한 점은 $(8, 0)$이고, $1:2$로 외분한 점은 $(-12, 0)$이다.
  즉, 점 A는 $\frac{1}{2}$의 확률로 $A_1(8, 0)$으로 이동하거나, $\frac{1}{2}$의 확률로 $A_1(-12, 0)$으로 이동한다.
- 점 $A_1(8, 0)$일 때, 선분 $A_1Q$를 $1:3$으로 내분한 점은 $(8, 2)$이고, $3:1$로 외분한 점은 $(8, 12)$이다.
  즉, 점 $A_1$은 $\frac{2}{3}$의 확률로 $A_2(8, 2)$로 이동하거나, $\frac{1}{3}$의 확률로 $A_2(8, 12)$로 이동한다.
- 점 $A_1(-12, 0)$일 때, 점 $A_1$은 $\frac{2}{3}$의 확률로 $A_2(-12, 2)$로 이동하거나, $\frac{1}{3}$의 확률로 $A_2(-12, 12)$로 이동한다.

(4) $m=3$, $n=2$인 경우

- 선분 OP를 $3:1$로 내분한 점은 $(9, 0)$이고, $1:3$로 외분한 점은 $(-6, 0)$이다.
  즉, 점 A는 $\frac{1}{3}$의 확률로 $A_1(9, 0)$으로 이동하거나, $\frac{2}{3}$의 확률로 $A_1(-6, 0)$으로 이동한다.
- 점 $A_1(9, 0)$일 때, 선분 $A_1Q$를 $1:2$으로 내분한 점은 $\left(9, \frac{8}{3}\right)$이고, $2:1$로 외분한 점은 $(9, 16)$이다.
  즉, 점 $A_1$은 1의 확률로 $A_2\left(9, \frac{8}{3}\right)$로 이동한다.
- 점 $A_1(-6, 0)$일 때, 점 $A_1$은 1의 확률로 $A_2\left(-6, \frac{8}{3}\right)$로 이동한다.

(5) 모든 경우를 고려하여 계산한 확률은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

| $m, n$ | 확률 | $A_1(x_1, 0)$ | 확률 | $A_2(x_1, y_1)$ | 확률 | $A \to A_1 \to A_2$ 일 확률 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $m=2$<br>$n=3$ | $\frac{1}{2}$ | $A_1(8, 0)$ | $\frac{1}{2}$ | $A_2(8, 2)$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$ |
| | | | | $A_2(8, 12)$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$ |
| | | $A_1(-12, 0)$ | $\frac{1}{2}$ | $A_2(-12, 2)$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$ |
| | | | | $A_2(-12, 12)$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$ |
| $m=3$<br>$n=2$ | $\frac{1}{2}$ | $A_1(9, 0)$ | $\frac{1}{3}$ | $A_2\left(9, \frac{8}{3}\right)$ | 1 | $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ |
| | | | | $A_2(9, 16)$ | 0 | 0 |
| | | $A_1(-6, 0)$ | $\frac{2}{3}$ | $A_2\left(-6, \frac{8}{3}\right)$ | 1 | $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ |
| | | | | $A_2(-6, 16)$ | 0 | 0 |

(6) 두 점 $A_2$와 점 P사이의 거리는 거리 공식을 통해서 다음과 같이 계산할 수 있고, $|x_1|$보다 작은 경우는 $A_2(8, 2)$와 $A_2\left(9, \frac{8}{3}\right)$이며 그때의 확률은 $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$이다.

| $A_2(x_1, y_1)$ | 확률 | $\lvert x_1\rvert$ | 점 $A_2$와 점 P사이의 거리 | $\lvert x_1\rvert >$ 거리 |
|---|---|---|---|---|
| $A_2(8, 2)$ | $\frac{1}{6}$ | 8 | $\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}$ | O |
| $A_2(8, 12)$ | $\frac{1}{12}$ | 8 | $\sqrt{4^2+12^2}=\sqrt{160}$ | X |
| $A_2(-12, 2)$ | $\frac{1}{6}$ | 12 | $\sqrt{24^2+2^2}=\sqrt{580}$ | X |
| $A_2(-12, 12)$ | $\frac{1}{12}$ | 12 | $\sqrt{24^2+12^2}=\sqrt{720}$ | X |
| $A_2\left(9, \frac{8}{3}\right)$ | $\frac{1}{6}$ | 9 | $\sqrt{3^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{145}{9}}$ | O |
| $A_2\left(-6, \frac{8}{3}\right)$ | $\frac{1}{3}$ | 6 | $\sqrt{18^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2}=\sqrt{324+\frac{64}{9}}$ | X |

※ 확률이 0인 $A_2(9, 16)$과 $A_2(-6, 16)$의 경우는 거리 계산에서 제외하였다.

## [문제 1] 채점기준

- $m=2, n=3$인 경우 점 $A_1$과 $A_2$의 좌표와 그에 해당하는 확률을 정확히 계산하면: **+8점**
  - 점 $A_1$의 좌표를 정확히 계산하면 **+3점**
  - 점 $A_2$의 좌표를 정확히 계산하면 **+3점**
  - 점 $A_1$과 $A_2$가 일어날 확률과 $A \to A_1 \to A_2$일 확률을 정확히 계산하면 **+2점**
- $m=3, n=2$인 경우 점 $A_1$과 $A_2$의 좌표와 그에 해당하는 확률을 정확히 계산하면: **+8점**
  - 점 $A_1$의 좌표를 정확히 계산하면 **+3점**
  - 점 $A_2$의 좌표를 정확히 계산하면 **+3점**
  - 점 $A_1$과 $A_2$가 일어날 확률과 $A \to A_1 \to A_2$일 확률을 정확히 계산하면 **+2점**
- 두 점 사이의 거리를 정확히 계산하고 $|x_1|$와 정확히 비교해서 정답을 찾아내면 **+4점**

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.
※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ±1점을 부여할 수 있습니다.

## [문제 2-1] 예시답안

$f'(x) = (x^2+5)\left\{1-2\sin\left(\frac{\pi x}{x^2+5}\right)\right\}$ 이므로 $f(x)$는 $\frac{\pi x}{x^2+5} = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$, $\frac{\pi x}{x^2+5} = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$ 일 때,

극값을 가질 수 있다. 하지만 $f'(0) \neq 0$이고, $x \neq 0$일 때

$\left|\frac{\pi x}{x^2+5}\right| = \frac{\pi}{|x| + \frac{5}{|x|}} \leq \frac{\pi}{2\sqrt{5}} < \frac{\pi}{4}$ 이므로, $\frac{\pi x}{5+x^2} = \frac{\pi}{6}$ 인 경우, 즉 $x = 1, 5$일 때, 극값을 가진다.

도함수 $f'(x)$의 부호를 조사하기 위해, $g(x) = 1-2\sin\left(\frac{\pi x}{x^2+5}\right)$라 정의하고

이 함수의 도함수 $g'(x) = 2\cos\left(\frac{\pi x}{x^2+5}\right)\frac{\pi(x^2-5)}{(x^2+5)^2}$ 를 구한다. 이로부터 $g(x)$가 구간 $(-1, \sqrt{5})$에서 감소하고,

구간 $(\sqrt{5}, 5)$에서는 증가한다는 것을 알 수 있다. 그런데 $g(1) = g(5) = 0$ 이므로, 구간 $(-1, 1)$ 에서 $g(x) > 0$이고

$f(x)$는 증가하며, 구간 $(1, 5)$에서는 $g(x) < 0$ 이고 $f(x)$는 감소한다.

따라서 $x = 1$일 때 $f(x)$는 최댓값을 가진다. 마지막으로 $(x^2+5)\sin\left(\frac{\pi x}{x^2+5}\right)$ 의 그래프의 형태를 생각해보면

정적분 $\int_{-1}^{1}(x^2+5)\sin\left(\frac{\pi x}{x^2+5}\right)dx = 0$ 이라는 것을 알 수 있다.

따라서, 최댓값은 $f(1) = \int_{-1}^{1}(t^2+5)\,dt = \frac{32}{3}$ 이다.

## [문제 2-1] 채점기준

- $x = 1, 5$일 때 $f'(x) = 0$ 인 것을 확인하면: **+3점**
- $f(x)$의 증가, 감소 구간을 조사하여 $f(1)$이 최대라는 것을 보이면: **+4점**
- $f(1) = \frac{32}{3}$ 를 구하면: **+3점**

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.
※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ±1점을 부여할 수 있습니다.

## [문제 2-2] 예시답안

$x$와 $y$를 $t$에 대해 미분하여

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\left(-\frac{\sin t}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{3}\sin t\cos t}{8+\sin^2 t}\right)^2}$$

$$=\frac{\sin t}{\sqrt{3}(8+\sin^2 t)}\sqrt{(8+\sin^2 t)^2+36\cos^2 t}=\frac{\sin t\,(10-\sin^2 t)}{\sqrt{3}(8+\sin^2 t)}$$

를 구한다. 따라서 $u=\cos t$로 치환하여,

$$\int_0^{\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^{\pi}\frac{\sin t\,(9+\cos^2 t)}{\sqrt{3}(9-\cos^2 t)}dt=\int_{-1}^{1}\frac{9+u^2}{\sqrt{3}(9-u^2)}du=\frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^1\frac{9+u^2}{9-u^2}du$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^1\left(-1+\frac{3}{3-u}+\frac{3}{3+u}\right)du=\frac{2}{\sqrt{3}}(-1+3\ln 2)=-\frac{2}{\sqrt{3}}+2\sqrt{3}\ln 2$$ 를 구한다.

## [문제 2-2] 채점기준

- $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\frac{\sin t\,(10-\sin^2 t)}{\sqrt{3}(8+\sin^2 t)}$ 를 구하면: **+5점**
- $u=\cos t$로 치환하여, $\int_{-1}^{1}\frac{9+u^2}{\sqrt{3}(9-u^2)}du$ 를 구하면: **+5점**
- 정적분을 $\frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^1\left(-1+\frac{3}{3-u}+\frac{3}{3+u}\right)du$ 형태로 정리한 후, 계산하여 정답 $\frac{2}{\sqrt{3}}(-1+3\ln 2)$를 얻으면: **+5점**

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.
※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ±1점을 부여할 수 있습니다.

## [문제 3-1] 예시답안

정적분하면 $a_n = \int_0^{\ln(n+1)} (2e^{2x} - e^x)\,dx = \left[e^{2x} - e^x\right]_0^{\ln(n+1)} = n(n+1)$이다.

$\frac{1}{a_k} = \frac{1}{k(k+1)} = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$ 이므로 주어진 식의 값은

$$\sum_{k=1}^{99}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + 1\right)\frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^{99}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) + \sum_{k=1}^{99}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)}\right) \equiv \frac{9999}{10000} + \frac{99}{100} = \frac{19899}{10000}$$

## [문제 3-1] 채점기준

- $a_n = n(n+1)$를 구하면: **+5점**
- $\frac{1}{a_k} = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$을 이용하여 식의 값 $\frac{19899}{10000}$ 을 구하면: **+5점**

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.
※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ±1점을 부여할 수 있습니다.

## [문제 3-2] 예시답안

함수 $f(\theta)$를 $\overline{AP} + \overline{BP} = f(\theta) = \sqrt{74 - 70\cos\theta} + \sqrt{74 - 70\sin\theta}$ 라 하자.

$f'(\theta) = \frac{35\sin\theta}{\sqrt{74 - 70\cos\theta}} - \frac{35\cos\theta}{\sqrt{74 - 70\sin\theta}}$ 이므로 $f'(\theta) = 0$을 정리하면

$37(\sin^2\theta - \cos^2\theta) - 35(\sin^3\theta - \cos^3\theta) = 0$ 이다.

정리하면 $(\sin\theta - \cos\theta)[37(\sin\theta + \cos\theta) - 35(1 + \sin\theta\cos\theta)] = 0$ 이다.

$\sin\theta - \cos\theta = 0$일 때, $\theta = \frac{\pi}{4}$이고 $\sin\theta = \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

$37(\sin\theta + \cos\theta) = 35(1 + \sin\theta\cos\theta)$일 때, 제곱하고 $X = \sin\theta\cos\theta$ 로 써서 정리하면

$(25 \times 49)X^2 - 288X - 144 = (25X - 12)(49X + 12) = 0$ 이다. 범위가 $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\sin\theta\cos\theta = \frac{12}{25}$이다.

$\sin\theta + \cos\theta = \frac{7}{5}$ 와 연립하여 근을 구하면 $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ 를 만족하는 $\alpha$ 와 $\sin\beta = \frac{4}{5}$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$ 을 만족하는 $\beta$가 있다. $\theta = 0,\ \alpha,\ \frac{\pi}{4},\ \beta,\ \frac{\pi}{2}$에서 $\{f(\theta)\}^2$ 값을 계산하자.

$\{f(0)\}^2 = \left\{f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}^2 = 78 + 4\sqrt{74}$, $\{f(\alpha)\}^2 = \{f(\beta)\}^2 = 98$, $\left\{f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\}^2 = 296 - 140\sqrt{2}$ 이다.

최솟값은 98 이다.

## [문제 3-2] 채점기준

- $f(\theta)$를 미분하여 $\sin\theta - \cos\theta = 0$, $37(\sin\theta + \cos\theta) = 35(1 + \sin\theta\cos\theta)$를 구하면: **+7점**
- $\sin\theta = \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 와 $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ 를 구하면: **+6점**
- 함수값을 비교하여 최솟값 $7\sqrt{2}$을 구하면: **+2점**

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.
※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ±1점을 부여할 수 있습니다.

## [문제 4-1] 예시답안

$k = \pm 1$인 경우, 두 접선이 이루는 각이 $45^\circ$가 아님을 쉽게 알 수 있다. 따라서 $k \neq \pm 1$이라 가정할 수 있다.

접선을 $y = mx \pm \sqrt{m^2+2}$ 라 놓자. 접선이 점 $\mathrm{P}(k, \sqrt{3})$을 지나므로 대입하여 정리하여 $m$에 대한

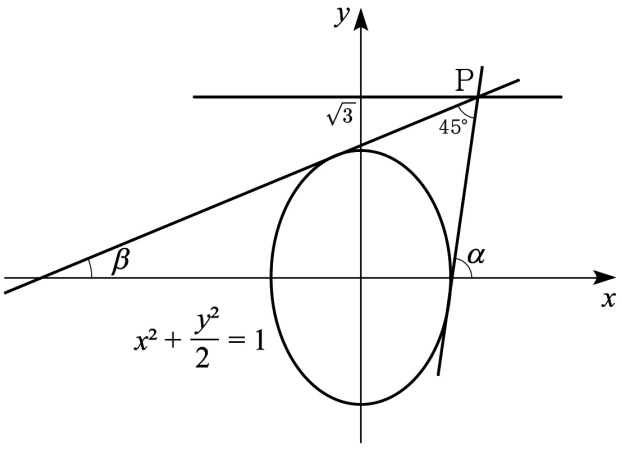
이차방정식 $(k^2-1)m^2 - 2\sqrt{3}km + 1 = 0$ 을 얻는다. 아래 그림과 같이 두 접선이 $x$축과 이루는 각을 $\alpha, \beta\ (\alpha > \beta)$라 하면

$\tan\alpha$, $\tan\beta$는 이 이차방정식의 두 근이고, 근과 계수의 관계에 의하여

$\tan\alpha + \tan\beta = \dfrac{2\sqrt{3}k}{k^2-1}$ 과 $\tan\alpha\tan\beta = \dfrac{1}{k^2-1}$ 이다. $\alpha - \beta = 45^\circ$ 이므로

$$1 = \tan^2(\alpha-\beta) = \left(\frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right)^2 = \frac{(\tan\alpha+\tan\beta)^2 - 4\tan\alpha\tan\beta}{(1+\tan\alpha\tan\beta)^2} = \frac{\left(\dfrac{2\sqrt{3}k}{k^2-1}\right)^2 - \dfrac{4}{k^2-1}}{\left(1+\dfrac{1}{k^2-1}\right)^2}$$

정리하여 방정식 $(k^2)^2 - 8k^2 - 4 = 0$ 을 얻는다. $k^2 > 0$이므로 $k^2 = 4+2\sqrt{5}$




## [문제 4-1] 채점기준

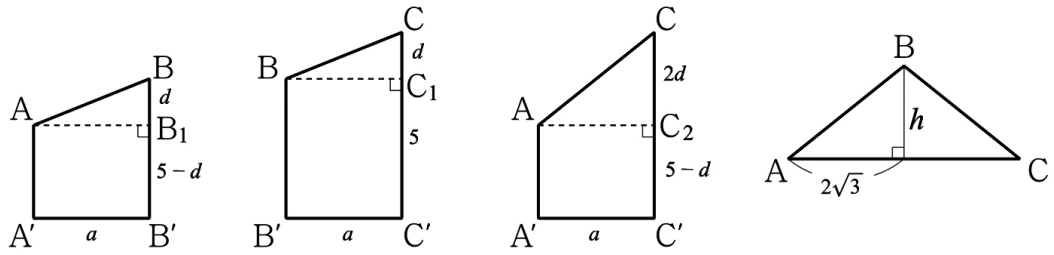
- 접선을 $y = mx \pm \sqrt{m^2+2}$ 라 놓고, $(k^2-1)m^2 - 2\sqrt{3}km + 1 = 0$ 를 얻으면: **+5점**
- 두 접선이 $x$축과 이루는 각을 $\alpha, \beta$라 놓고, $\tan\alpha + \tan\beta = \dfrac{2\sqrt{3}k}{k^2-1}$ 과 $\tan\alpha\tan\beta = \dfrac{1}{k^2-1}$ 을 얻으면: **+5점**
- $k^2 = 4+2\sqrt{5}$ 를 구하면: **+5점**

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.
※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ±1점을 부여할 수 있습니다.

**[문제 4-2]** 예시답안

$\overline{AA'}=5-d$, $\overline{BB'}=5$, $\overline{CC'}=5+d$라 하고, 정삼각형 $A'B'C'$의 한 변의 길이를 $a$라 하자.

아래 그림과 같이 점 $B_1, C_1, C_2$를 선분 $BB'$ 또는 $CC'$ 위에서 잡자.




직각삼각형 $AB_1B, BC_1C$에서 $\overline{AB}=\overline{BC}=\sqrt{a^2+d^2}$ 이므로 삼각형 $ABC$는 이등변삼각형이다.

위 그림과 같이 점 $B$와 선분 $AC$사이의 거리를 $h$라 하면 삼각형 $ABC$의 넓이가 $6\sqrt{3}$ 이므로 $h=3$이고 $\overline{AB}=\overline{BC}=\sqrt{21}$이다.

직각삼각형 $AB_1B$와 $AC_2C$에서 $a^2+d^2=21, a^2+4d^2=48$ 이므로 $a=2\sqrt{3}\ (d=\pm 3)$을 얻는다.

따라서 삼각형 $A'B'C'$의 넓이는 $3\sqrt{3}$ 이고, 평면 $ABC$와 평면 $\alpha$가 이루는 각을 $\theta$라 하면 $\cos\theta=\frac{1}{2}$ 이다.

삼각형 $ABC$의 내접원의 반지름의 길이를 $r$라 하고 삼각형 $ABC$의 넓이를 $S$라 하면

$\frac{1}{2}(4\sqrt{3}+2\sqrt{21})r=S=6\sqrt{3}$ 이므로 $r=2(\sqrt{7}-2)$ 을 얻는다.

삼각형 $ABC$의 내접원의 그림자의 넓이는 $\pi r^2\cos\theta=\frac{1}{2}\pi r^2=2(11-4\sqrt{7})\pi$ 이다.

**[문제 4-2]** 채점기준

- $\overline{AB}=\overline{BC}=\sqrt{21}$를 구하면: **+5점**
- 삼각형 $A'B'C'$의 넓이 $3\sqrt{3}$을 구하면: **+5점**
- 그림자의 넓이 $2(11-4\sqrt{7})\pi$를 구하면: **+5점**

  (그림자의 넓이를 $\frac{18\pi}{11+4\sqrt{7}}$로 구해도 **+5점**)

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.
※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ±1점을 부여할 수 있습니다.