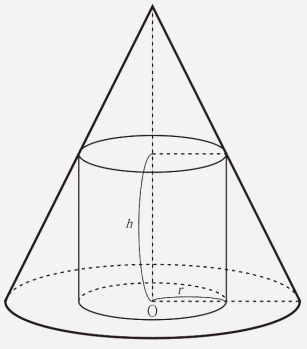
자연계열 I 문제지

수학

[문제 1] 다음 규칙에 따라 점수를 얻는 시행을 한다.

- 밑면의 반지름의 길이가 5 이고 높이가 10 인 원뿔이 있다.
- 주머니 A 에는 1, 2, 3 의 숫자가 하나씩 적혀 있는 3개의 공이 들어 있고, 주머니 B에는 1, 2의 숫자가 하나씩 적혀 있는 2개의 공이 들어 있다.
- 한 개의 주사위를 한 번 던져서 나온 눈의 수가 3의 배수이면 주머니 A에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내고, 주머니 B에서 임의로 1개의 공을 꺼낸다. 3의 배수가 아니면 주머니 A에서 임의로 1개의 공을 꺼내고, 주머니 B에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낸다.
- 주머니 A와 B에서 꺼낸 공에 적힌 숫자들의 합을 k라 하자. 이때 반지름의 길이가 $k-3$이고 원뿔에 내접하는 원기둥의 부피를 점수로 한다.
- 다음은 원뿔에 내접하고, 밑면의 반지름의 길이가 r이고 높이가 h인 원기둥을 나타낸 것이다.



시행의 결과로 얻은 점수의 기댓값을 구하시오. [20점]

[문제 2] 다음을 읽고 문제에 답하시오.

- $a>0$, $a\neq 1$, $N>0$일 때, $a^x=N \Leftrightarrow x=\log_a N$이다. 그리고 $\log_a N^k = k\log_a N$ 이다. (단, k는 실수)
- $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $c>0$, $c\neq 1$일 때, $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ 이다.
- 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속일 때, 다음 식이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \quad (\text{단, } \Delta x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+k\,\Delta x)$$

- $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ (단, $\tan\alpha\tan\beta\neq -1$)

[문제 2-1] 다음 식의 값을 구하시오. [10점]

$$\sum_{k=2}^{9}\left(k^{\frac{k\ln 2}{\ln k}}-2^{\frac{2\ln k}{\ln 2}}\right)$$

[문제 2-2] 좌표평면에서 직선 $x=1$ 위를 움직이는 점 $\mathrm{A}(1,y_1)$과 x축 위를 움직이는 점 $\mathrm{B}(x_1,0)$의 시각 t에서의 위치는 두 함수 $x_1=f(t)$, $y_1=g(t)$, 로 나타내어질 수 있다. 두 점 $\mathrm{A}(1,g(t))$, $\mathrm{B}(f(t),0)$, 은 시각 $t=0$일 때 $(1,0)$에서 출발한 후, $0<t\leq\dfrac{\pi}{4}$일 때 원점 O에 대하여 $\angle\mathrm{AOB}=t$이고 $\angle\mathrm{OAB}=\dfrac{2\pi}{3}$ 를 만족하며 움직인다고 하자. 이때, 극한값 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{\pi k}{6n}\right)$ 를 구하시오. (단, $x_1\geq 1$, $y_1\geq 0$이다.) [15점]

[문제 3] 다음을 읽고 문제에 답하시오.

- 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 곡선 $y = f(x)$와 x축 및 두 직선 $x = a$, $x = b$로 둘러싸인 도형의 넓이는 $S = \int_a^b |f(x)|\,dx$이다.
- 미분가능한 함수 $g(x)$의 도함수 $g'(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$를 포함하는 열린구간에서 연속이고, $g(a) = \alpha$, $g(b) = \beta$에 대하여 함수 $f(x)$가 α와 β를 양끝으로 하는 닫힌구간에서 연속일 때 다음 식이 성립한다.

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(t)\,dt$$

- 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x = a$에서 극값을 가지면 $f'(a) = 0$이다.
- $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$ (단, $\tan\alpha\tan\beta \neq 1$)

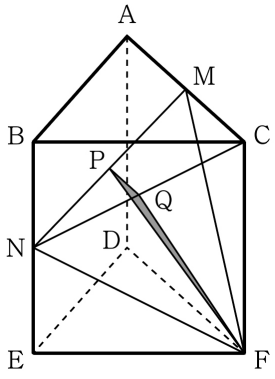
[문제 3-1] $x \geq 0$에서 정의된 곡선 $y = \dfrac{x}{x^2+1}\left(\{\ln(x^2+1)\}^2 - 6\ln(x^2+1) + 5\right)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오. [10점]

[문제 3-2] 좌표평면 위에 점 $\mathrm{A}(-1, 0)$, $\mathrm{B}(1, 0)$이 있다. 구간 $-1 \leq x \leq 1$에서 정의된 곡선 $y = \sqrt{x+2}$ 위의 점 P에 대하여 $\theta = \angle \mathrm{APB}$라 할 때, $\tan^2\theta$의 최댓값을 구하시오. [15점]

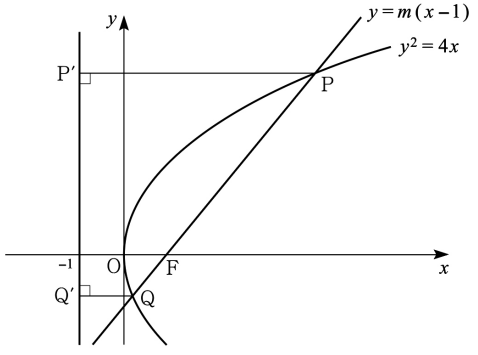
[문제 4] 다음을 읽고 문제에 답하시오.

- 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$이다.
- 삼각형 ABC에서 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$이다.
- 평면 위의 한 점 F와 이 점을 지나지 않는 직선 l이 주어질 때, 점 F와 직선 l에 이르는 거리가 같은 점들의 집합을 포물선이라 한다.
- 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$이고 $\alpha\beta = \frac{c}{a}$이다.

[문제 4-1] 오른쪽 그림과 같이 모든 모서리의 길이가 2인 정삼각기둥에서 두 선분 AC, BE의 중점을 각각 M, N이라 하고, 두 선분 MN, CN의 중점을 각각 P, Q라 하자. 삼각형 PFQ의 외접원의 반지름의 길이를 구하시오. [15점]



[문제 4-2] 아래의 그림과 같이 포물선 $y^2 = 4x$의 초점 $\mathrm{F}(1, 0)$을 지나고 $m > 0$인 직선 $y = m(x-1)$이 서로 다른 두 점 P, Q에서 포물선과 만난다. 두 점 P, Q에서 준선 $x = -1$에 내린 수선의 발을 각각 P′, Q′이라 하자. 사각형 PP′Q′Q의 둘레의 길이가 40일 때, 이 사각형의 넓이를 구하시오. [15점]





자연계열 I 문제해설

1. 예시답안 및 채점기준

[문제 1] 예시답안

(1) 한 개의 주사위를 한 번 던져서 나온 눈의 수가 3의 배수일 확률은 $\frac{1}{3}$이다. 이때 주머니 A에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때 적힌 숫자들의 표본공간은 $\{(1,2),(1,3),(2,3)\}$이고, 각 경우가 발생할 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

주머니 B에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때 적힌 숫자들의 표본공간은 $(1,2)$이고, 각 경우의 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

예를 들어, 주머니 A에서 꺼낸 공이 $(1,2)$이고, 주머니 B에서 꺼낸 공이 1일 때 확률은 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{18}$이고, 공에 적힌 숫자들의 합 k는 4이다.

(2) 주사위의 눈의 수가 3의 배수가 아닐 확률은 $\frac{2}{3}$이다. 이때 주머니 A에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때 적힌 숫자들의 표본공간은 $\{1,2,3\}$이고 각 경우의 확률은 $\frac{1}{3}$이고, 주머니 B에서 2개의 공을 동시에 꺼낼 때 적힌 숫자들의 표본공간은 $\{(1,2)\}$이고 그때의 확률은 1이다. 예를 들어, 주머니 A에서 꺼낸 공이 1이고, 주머니 B에서 꺼낸 공이 $(1,2)$일 때 확률은 $\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times 1=\frac{2}{9}$이고, 공에 적힌 숫자들의 합 k는 4이다.

(3) 위와 같은 방식으로 얻은 시행의 결과는 다음과 같다.

주사위의 눈의 수	주머니 A에서 꺼낸 공	주머니 B에서 꺼낸 공	k	확률
3의 배수인 경우	(1,2)	1	4	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{18}$
		2	5	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{18}$
	(1,3)	1	5	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{18}$
		2	6	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{18}$
	(2,3)	1	6	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{18}$
		2	7	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{18}$
3의 배수가 아닌 경우	1	(1,2)	4	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times 1=\frac{2}{9}$
	2		5	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times 1=\frac{2}{9}$
	3		6	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times 1=\frac{2}{9}$

(4) 반지름의 길이가 $k-3$인 원기둥의 높이는 그림 1에서 도형의 닮음을 이용하면 $(16-2k)$로 계산할 수 있고, 원기둥의 부피는 $(k-3)^2(16-2k)\pi$이다.

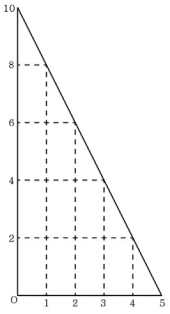


그림 1

(5) $k=4$일 때의 확률은 $\frac{1}{18}+\frac{2}{9}=\frac{5}{18}$이고, 이때 원기둥의 반지름의 길이는 1, 높이는 8, 부피는 8π이다.

(6) $k=5$일 때의 확률은 $\frac{1}{18}+\frac{1}{18}+\frac{2}{9}=\frac{6}{18}$이고, 이때 반지름의 길이는 2, 높이는 6, 부피는 24π이다.

(7) $k=6$일 때의 확률은 $\frac{1}{18}+\frac{1}{18}+\frac{2}{9}=\frac{6}{18}$이고, 이때 반지름의 길이는 3, 높이는 4, 부피는 36π이다.

(8) $k=7$일 때의 확률은 $\frac{1}{18}$이고, 이때 반지름의 길이는 4, 높이는 2, 부피는 32π이다.

(9) 시행의 결과는 다음과 같고, 이를 이용하여 점수의 기댓값을 계산할 수 있다.

k	확률	원기둥의 밑면의 반지름	원기둥의 높이	원기둥의 부피
4	$\frac{5}{18}$	1	8	8π
5	$\frac{6}{18}$	2	6	24π
6	$\frac{6}{18}$	3	4	36π
7	$\frac{1}{18}$	4	2	32π

$$\text{기댓값} = \left(\frac{5}{18}\times 8\pi\right)+\left(\frac{6}{18}\times 24\pi\right)+\left(\frac{6}{18}\times 36\pi\right)+\left(\frac{1}{18}\times 32\pi\right)$$

$$= \frac{\pi}{18}\{(5\times 8)+(6\times 24)+(6\times 36)+(1\times 32)\}$$

$$= \frac{432}{18}\pi = \frac{216}{9}\pi = 24\pi$$

[문제 1] 채점기준

- k의 값, 그때의 확률, 원기둥의 부피를 정확히 계산하면 각: **+4점(총 +16점)**
  - k의 값과 그때의 확률을 정확히 계산하면 **+2점**
  - 원기둥의 높이를 정확히 계산하면 **+1점**
  - 원기둥의 부피를 정확히 계산하면 **+1점**
- 원기둥의 부피의 기댓값을 정확히 계산하면: **+4점**

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.
※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ±1점을 부여할 수 있습니다.

[문제 2-1] 예시답안

로그함수의 성질을 이용하여

$k^{\frac{k\ln 2}{\ln k}} = k^{\frac{\ln 2^k}{\ln k}} = k^{\log_k 2^k} = 2^k$, $\quad 2^{\frac{2\ln k}{\ln 2}} = 2^{\frac{\ln k^2}{\ln 2}} = 2^{\log_2 k^2} = k^2$ 로 정리한 후,

아래와 같이 등비수열의 합과 자연수의 거듭제곱의 합에 대한 식을 이용하여 답을 구한다.

$$\sum_{k=2}^{9} 2^k - \sum_{k=2}^{9} k^2 = \sum_{k=2}^{9} 2^k - \left(\sum_{k=1}^{9} k^2\right) + 1 = \frac{4(2^8-1)}{2-1} - \frac{9\cdot 10\cdot 19}{6} + 1$$
$$= 1020 - 285 + 1 = 736$$

[문제 2-1] 채점기준

- 로그함수의 성질을 이용하여 $k^{\frac{k\ln 2}{\ln k}} = 2^k$, $2^{\frac{2\ln k}{\ln 2}} = k^2$ 구하면: **+6점**
- 수열의 합공식을 이용하여 정답 736를 얻으면: **+4점**

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.
※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ±1점을 부여할 수 있습니다.

[문제 2-2] 예시답안

우선 주어진 문제의 조건으로부터 $f(t) = 1 + (\tan t)\left\{\tan\left(t + \frac{\pi}{6}\right)\right\}$를 구한 후,

정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이용하여 극한값을 $\frac{6}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left[1 + (\tan x)\left\{\tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right\}\right] dx$로 표현한다.

그리고 제시문에 주어진 탄젠트 함수의 덧셈정리를 이용하여

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{\pi k}{6n}\right) = \frac{6}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right) - \tan x}{\tan\frac{\pi}{6}}\, dx = \frac{6\sqrt{3}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left\{\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right) - \tan x\right\} dx$$ 를 얻는다.

치환적분을 하면 $\tan x$의 부정적분이 $-\ln(\cos x) + C$임을 알 수 있는데,

이를 이용하여 다음의 답을 얻는다.

$$\frac{6\sqrt{3}}{\pi}\left\{-\ln\left(\cos\frac{\pi}{3}\right) + \ln\left(\cos\frac{\pi}{6}\right) + \ln\left(\cos\frac{\pi}{6}\right) - \ln(\cos 0)\right\} = \frac{6\sqrt{3}}{\pi}\ln\frac{3}{2}$$

[문제 2-2] 채점기준

- 주어진 정보로부터 $f(t)=1+(\tan t)\left\{\tan\left(t+\frac{\pi}{6}\right)\right\}$ 구하면: **+3점**
- 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이용하여 $\frac{6}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left[1+(\tan x)\left\{\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right\}\right]dx$ 를 얻으면: **+4점**
- 탄젠트 함수의 덧셈정리를 이용하여 $1+(\tan x)\left\{\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right\}=\frac{\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\tan x}{\tan\frac{\pi}{6}}$ 를 얻으면: **+4점**
- 정적분을 계산하여 정답 $\frac{6\sqrt{3}}{\pi}\ln\frac{3}{2}$ 를 얻으면: **+4점**

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.
※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ±1점을 부여할 수 있습니다.

[문제 2-2] 별해

우선 주어진 문제의 조건으로부터 $f(t)=1+(\tan t)\left\{\tan\left(t+\frac{\pi}{6}\right)\right\}$ 를 구한 후, 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이용하여

극한값을 $\frac{6}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left[1+(\tan x)\left\{\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right\}\right]dx$ 로 표현한다.

그리고 탄젠트 함수의 덧셈정리 를 이용하여 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ 를 이용하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{\pi k}{6n}\right)=\frac{6}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left[1+(\tan x)\left\{\frac{\tan x+\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)}{1-\tan x\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right\}\right]dx=1+\frac{6}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\tan x)\left(\frac{1+\sqrt{3}\tan x}{\sqrt{3}-\tan x}\right)dx$$

를 얻는다. 남은 정적분의 값을 구하기 위해 $u=\tan x$로 치환을 한 후, 아래와 같이 식을 정리한다.

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\tan x)\left(\frac{1+\sqrt{3}\tan x}{\sqrt{3}-\tan x}\right)dx&=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{u(1+\sqrt{3}u)}{(\sqrt{3}-u)(1+u^2)}du\\&=-\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{1}{1+u^2}du+\sqrt{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{1}{\sqrt{3}-u}du\end{aligned}$$

그리고 첫 번째 적분에 대해서 다시 $u=\tan t$ 로 치환하여 계산한다.

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\tan x)\left(\frac{1+\sqrt{3}\tan x}{\sqrt{3}-\tan x}\right)dx=-\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\ln\frac{3}{2}$$

따라서, 정답은 $1+\frac{6}{\pi}\left(-\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\ln\frac{3}{2}\right)=\frac{6\sqrt{3}}{\pi}\ln\frac{3}{2}$이다.

[문제 2-2] 별해 채점기준

- 주어진 정보로부터 $f(t)=1+(\tan t)\left\{\tan\left(t+\frac{\pi}{6}\right)\right\}$ 구하면: **+3점**
- 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이용하여 $\frac{6}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left[1+(\tan x)\left\{\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right\}\right]dx$ 를 얻으면: **+4점**
- 탄젠트 함수의 덧셈정리를 이용하여, $1+(\tan x)\left\{\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right\}=1+\tan x\left\{\frac{\tan x+\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)}{1-\tan x\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right\}$ 라 적으면: **+1점**
- 치환적분을 하여 $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left\{(\tan x)\left(\frac{1+\sqrt{3}\tan x}{\sqrt{3}-\tan x}\right)\right\}dx=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left(-\frac{1}{1+u^2}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-u}\right)du$ 를 얻으면: **+5점**
- 정적분을 계산하여 정답 $\frac{6\sqrt{3}}{\pi}\ln\frac{3}{2}$ 를 얻으면: **+2점**

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.
※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ±1점을 부여할 수 있습니다.

[문제 3-1] 예시답안

$f(x)=\frac{x}{x^2+1}(\ln(x^2+1)-1)(\ln(x^2+1)-5)$라 하자. $x=0,\sqrt{e-1},\sqrt{e^5-1}$ 에서 $f(x)=0$ 이다.

$0\le x\le\sqrt{e-1}$ 에서 $f(x)\ge 0$ 이고 $\sqrt{e-1}\le x\le\sqrt{e^5-1}$ 에서 $f(x)\le 0$이므로 구하는 넓이는

$\int_0^{\sqrt{e-1}}f(x)dx-\int_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{e^5-1}}f(x)dx$이다. $t=\ln(x^2+1)$로 치환하여 적분하면

$\frac{1}{2}\int_0^1(t^2-6t+5)dt-\frac{1}{2}\int_1^5(t^2-6t+5)dt=\frac{7}{6}+\frac{16}{3}=\frac{13}{2}$ 이다.

[문제 3-1] 채점기준

- 교점 $x=0,\sqrt{e-1},\sqrt{e^5-1}$ 을 구한다.: **+3점**
- 그래프의 개형을 이해하고 $\int_0^{\sqrt{e-1}}f(x)dx-\int_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{e^5-1}}f(x)dx$ 를 구하면: **+3점**
- 치환 적분을 하여 $\frac{13}{2}$ 을 구하면: **+4점**

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.
※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ±1점을 부여할 수 있습니다.

[문제 3-2] 예시답안

점 P의 좌표는 $(t, \sqrt{t+2})$라 하자. $\angle PAB = \alpha$, $\angle PBA = \beta$라 하면 $\tan\alpha = \frac{\sqrt{t+2}}{1+t}$, $\tan\beta = \frac{\sqrt{t+2}}{1-t}$ 이다.

$\theta = \pi - \alpha - \beta$ 이므로 $\tan(\theta) = f(t)$라 하면 $f(t) = \frac{2\sqrt{t+2}}{t^2+t+1}$ 이다.

미분하면 $f'(t) = -\frac{3(t^2+3t+1)}{(t^2+t+1)^2\sqrt{t+2}}$ 이다. $t = \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ 에서 극값을 갖고

$\frac{-3-\sqrt{5}}{2} < -1 < \frac{-3+\sqrt{5}}{2} < 1$ 이므로 $t = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ 에서 최댓값을 갖는다.

$\tan^2\theta$ 의 최댓값은 $\left\{f\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)\right\}^2 = \frac{11+5\sqrt{5}}{2}$ 이다.

[문제 3-2] 채점기준

- $f(t) = \frac{2\sqrt{t+2}}{t^2+t+1}$ 와 $f'(t) = -\frac{3(t^2+3t+1)}{(t^2+t+1)^2\sqrt{t+2}}$ 을 구하면: **+8점**
- $t = \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ 를 구하고 $t = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ 에서 최댓값을 갖는다는 것을 보이면 : **+4점**
- 최댓값 $\frac{11+5\sqrt{5}}{2}$ 을 구하면: **+3점**

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.
※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ±1점을 부여할 수 있습니다.

[문제 3-2] 별해 채점기준

코사인 법칙을 이용하면 $t^2+t+1 = \sqrt{t^2+3t+3}\sqrt{t^2-t+3}\cos\theta$ 이 된다.

$\tan^2\theta$ 의 최댓값에서 $\cos^2\theta$는 최솟값을 갖는다. $\cos^2\theta = \frac{(t^2+t+1)^2}{(t^2+3t+3)(t^2-t+3)}$ 이고 미분하면

$t = \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ 에서 극값을 갖는다. $\cos^2\theta$의 최솟값은 $\frac{2}{13+5\sqrt{5}}$ 이고 $1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$ 을 이용하면

$\tan^2\theta$ 의 최댓값은 $\frac{11+5\sqrt{5}}{2}$ 이다.

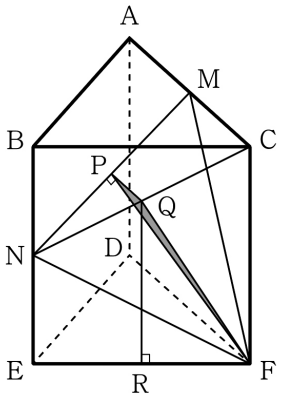
[문제 4-1] 예시답안

$\overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{MC} = \frac{1}{2}$

직각삼각형 MBN에서 $\overline{MN} = \sqrt{\overline{MB}^2 + \overline{BN}^2} = \sqrt{3+1} = 2$이다. 직각삼각형 FCM과 NEF에서

$\overline{MF} = \sqrt{\overline{MC}^2 + \overline{FC}^2} = \sqrt{5}$ 와 $\overline{NF} = \sqrt{\overline{NE}^2 + \overline{EF}^2} = \sqrt{5}$ 이므로 삼각형 FMN은 이등변삼각형이고

삼각형 MPF는 직각삼각형이다. 직각삼각형 MPF에서 $\overline{PF} = \sqrt{\overline{MF}^2 - \overline{MP}^2} = 2$



점 Q에서 선분 EF에 내린 수선의 발을 R이라 할 때, $\overline{QR} = \frac{3}{2}$이고

삼각형 QRF는 직각삼각형이므로 $\overline{QF} = \sqrt{\overline{QR}^2 + \overline{RF}^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$

$\theta = \angle QPF$라 하면 삼각형 QPF에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta = \frac{\frac{1}{4} + 4 - \frac{13}{4}}{2 \times \frac{1}{2} \times 2} = \frac{1}{2}$이므로 $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.

외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$2R = \frac{\frac{\sqrt{13}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$ 이므로 $R = \frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{39}}{6}$

[문제 4-1] 채점기준

- $\overline{PF} = 2$ 를 구하면: **+5점**
- $\overline{QF} = \frac{\sqrt{13}}{2}$ 을 구하면 : **+5점**
- $R = \frac{\sqrt{39}}{6}$ 를 구하면: **+5점**

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.
※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ±1점을 부여할 수 있습니다.

[문제 4-2] 예시답안

$y^2 = 4x$에 $y = m(x-1)$을 대입하고 정리해 얻은 이차방정식 $m^2x^2 - 2(m^2+2)x + m^2 = 0$ 의

두 근을 α, β라 하면 $\alpha + \beta = \dfrac{2(m^2+2)}{m^2}$ 이다. 그리고

$\overline{PQ} = \overline{PF} + \overline{FQ} = \overline{PP'} + \overline{QQ'} = (\alpha+1) + (\beta+1) = \dfrac{4(m^2+1)}{m^2}$ 이다.

점 P에서 직선 QQ′에 내린 수선의 발을 R이라 하고 각 PQR을 θ라 하면,

$\overline{P'Q'} = \overline{PR} = \tan\theta\,\overline{QR} = m\sqrt{\overline{PQ}^2 - \overline{PR}^2} = m\sqrt{\overline{PQ}^2 - \overline{P'Q'}^2}$ 이므로

$\overline{P'Q'} = \sqrt{\dfrac{m^2}{m^2+1}}\,\overline{PQ} = 4\sqrt{\dfrac{m^2+1}{m^2}}$

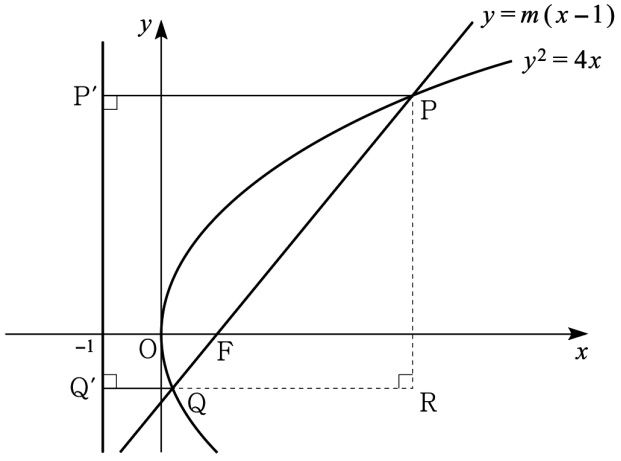
사각형 PP′Q′Q 의 둘레의 길이 ℓ은

$\ell = \overline{PQ} + \overline{PP'} + \overline{QQ'} + \overline{P'Q'} = 2\overline{PQ} + \overline{P'Q'} = \dfrac{8(m^2+1)}{m^2} + 4\sqrt{\dfrac{m^2+1}{m^2}} = 40$

$r = \sqrt{\dfrac{m^2+1}{m^2}}$ 라 놓아 얻은 이차방정식 $8r^2 + 4r = 40$에서 $r > 0$ 이므로 $r = \sqrt{\dfrac{m^2+1}{m^2}} = 2$

따라서 $m^2 = \dfrac{1}{3}$이고 사각형 PP′Q′Q의 넓이 S는

$S = \dfrac{1}{2}\overline{P'Q'} \cdot (\overline{PP'} + \overline{QQ'}) = \dfrac{1}{2}\overline{P'Q'} \cdot \overline{PQ} = \dfrac{1}{2} \cdot 8 \cdot 16 = 64$



[문제 4-2] 채점기준

- $\overline{PQ} = \dfrac{4(m^2+1)}{m^2}$ 을 구하면: **+5점**
- 방정식 $\dfrac{8(m^2+1)}{m^2} + 4\sqrt{\dfrac{m^2+1}{m^2}} = 40$ 을 찾으면: **+5점**
- 사각형 PP′Q′Q의 넓이 64 를 구하면: **+5점**
  (사각형 PP′Q′Q의 넓이 64 이외의 것을 더 찾으면: **-2점**)

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.
※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ±1점을 부여할 수 있습니다.