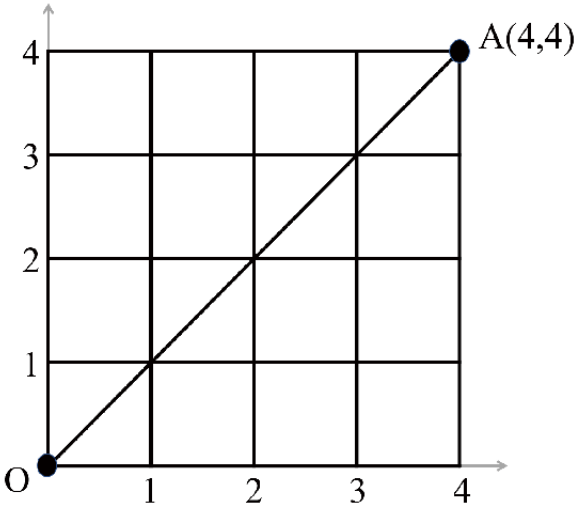
# 자연계열 II (2교시) 문제

## 수학

**[문제 1]** 다음의 그림과 같은 도로망이 있다. $(i, j)$ 좌표에서 $(i+1, j)$ 또는 $(i, j+1)$ 좌표로의 이동 비용은 1000원이고 소요 시간은 1시간이다. $(i, i)$ 좌표에서 $(i+1, i+1)$ 좌표로의 이동 비용은 2400원이며 소요 시간은 30분이다. 원점 O 지점에서 출발하여 A(4, 4)지점까지 도로를 따라갈 때, 9000원 이하의 비용으로 7시간 이내에 도착하기 위한 모든 경로의 수를 구하시오. (단, 왼쪽(←) 또는 아래(↓) 방향과 왼쪽 아래로의 대각선(↙) 방향으로 이동할 수 없다.) [20점]



**[문제 2]** 다음을 읽고 문제에 답하시오.

- 함수 $f(x)$가 임의의 세 실수 $a, b, c$를 포함하는 열린구간에서 연속일 때 다음 식이 성립한다.

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

- 모든 실수 $x$에 대하여 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$이 성립한다.
- 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f'(x)$, $g'(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때 다음 식이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

- 미분가능한 두 함수 $y = f(u)$, $u = g(x)$에 대하여 합성함수 $y = f(g(x))$의 도함수는 $\{f(g(x))\}' = f'(g(x))\,g'(x)$이다.
- 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x = a$에서 극값을 가지면 $f'(a) = 0$이다.

**[문제 2-1]** 다음 정적분의 값을 구하시오. [10점]

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{|x|}{1-\sin x}\,dx$$

**[문제 2-2]** 좌표평면 위의 곡선 $y = 4 \cdot \sqrt{\left(1+\frac{x^2}{36}\right)^3}$에서 점 $\mathrm{P}(0, 109)$에 이르는 거리가 최소인 두 점을 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$라 하자. 이때, $x = x_1$에서 $x = x_2$까지의 곡선 $y = 4 \cdot \sqrt{\left(1+\frac{x^2}{36}\right)^3}$의 길이를 구하시오. (단, $x_1 < x_2$이다.) [15점]

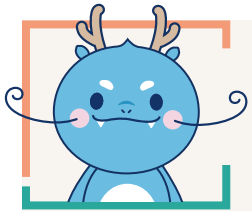
**[문제 3]** 다음을 읽고 문제에 답하시오.

- 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$이다.
- 모든 실수 $x$에 대하여 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$이 성립한다.
- 미분가능한 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$에 대하여 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수는 $\{f(g(x))\}'=f'(g(x))\,g'(x)$이다.
- $x$의 함수 $y$가 음함수의 꼴 $f(x,y)=0$으로 주어질 때, $f(x,y)=0$의 양변을 $x$에 대하여 미분하여 $\frac{dy}{dx}$를 구한다.

**[문제 3-1]** 조건 $a\geq 0$, $0<2b<\left(a+\frac{3}{2}\right)^2$을 만족하는 실수 $a$, $b$가 있다. 주어진 $a$에 대하여 곡선 $y=\left(a+\frac{3}{2}\right)^2-(a+1)^2x^2$과 원 $x^2+(y-b)^2=b^2$이 서로 다른 두 점에서 만나게 하는 $b$의 값을 $f(a)$라 할 때, $f(a)$의 최댓값을 구하시오. [10점]

**[문제 3-2]** 좌표평면 위를 움직이는 점 $\mathrm{A}(\cos t,\sin t)$와 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위의 점 $\mathrm{B}(x,y)$가 거리 1을 유지하며 연속적으로 움직인다. $t=0$일 때, 점 $\mathrm{B}(x,y)$는 제1사분면의 한 점에서 출발한다. $t=\frac{\pi}{2}$일 때, $\frac{dx}{dt}$의 값을 구하시오. 또한, 점 $\mathrm{B}(x,y)$의 $x$좌표의 최댓값을 구하시오. (단, $0\leq t\leq \pi$이다.) [15점]

[2024학년도 자연계열 논술전형]에서 과학과목이 폐지됨에 따라, 4번 과학문항은 본 가이드북에서 제외되었습니다. 과학 문항을 확인하고 싶은 경우 중앙대학교 입학처 홈페이지(http://admission.cau.ac.kr) 에서 받아보실 수 있습니다.



# 자연계열 II (2교시) 문제해설

## 1. 예시답안 및 채점기준

**[문제 1]** **예시답안**

한 단위의 가로, 세로, 대각선 방향으로 이동 횟수를 각각 $x$, $y$, $z$이라고 하자. 원점 O에서 A로 이동하기 위해서 다음의 관계식이 만족되어야 한다.

$$x = y,\ x + y + 2z = 8$$

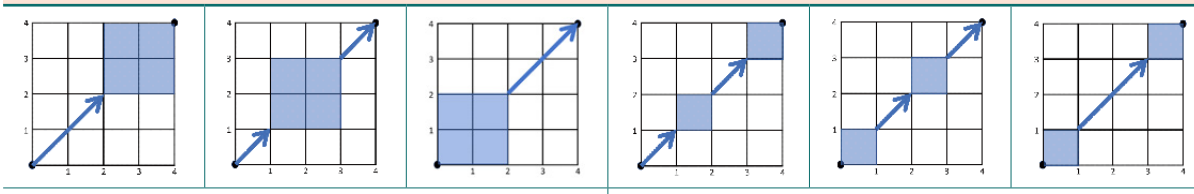
왜냐하면, 한 단위 가로 또는 세로 방향으로만 갈 때는 총 8번의 이동이 필요하지만, 한 단위 대각선 방향으로 갈 때는 가로와 세로 방향을 한 번만에 간 효과가 있기 때문이다. 위의 관계식을 만족시키는 $(x, y, z)$의 조합 및 그에 따른 경로의 비용 및 소요 시간은 다음 표와 같다.

| 조합 | $x = y$ | $z$ | 비용 (원) | 소요 시간 (시간) |
|---|---|---|---|---|
| I | 0 | 4 | 4 × 2400 = 9600 | 4 × 0.5 = 2 |
| II | 1 | 3 | (2 × 1000) + (3 × 2400) = 9200 | (2 × 1) + (3 × 0.5) = 3.5 |
| III | 2 | 2 | (4 × 1000) + (2 × 2400) = 8800 | (4 × 1) + (2 × 0.5) = 5 |
| IV | 3 | 1 | (6 × 1000) + (1 × 2400) = 8400 | (6 × 1) + (1 × 0.5) = 6.5 |
| V | 4 | 0 | 8 × 1000 = 8000 | 8 × 1 = 8 |

따라서, 9000원 이하 비용과 7시간 이내 소요 시간 조건을 만족시키는 조합은 III과 IV이다.

조합 III에 따른 경로는 아래와 같은 $6(= {}_4C_2)$가지 종류가 있을 수 있다. 따라서, 총 $30(=18+12)$가지 경로가 있다.

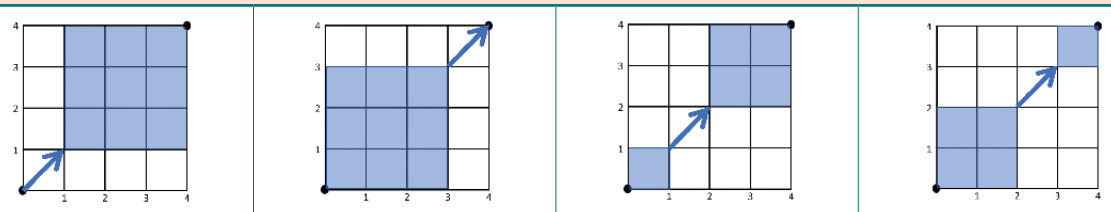
**조합 III에 따른 경로**



$\frac{4!}{2!2!} \times 3 = 6 \times 3 = 18$ | $(2 \times 2) \times 3 = 4 \times 3 = 12$

조합 IV에 따른 경로는 아래와 같은 $4(= {}_4C_1)$가지 종류가 있을 수 있다. 따라서, 총 $64(= 40 + 24)$가지 경로가 있다.

**조합 IV에 따른 경로**



$\frac{6!}{3!3!} \times 2 = 20 \times 2 = 40$ | $\left(2 \times \frac{4!}{2!2!}\right) \times 2 = 12 \times 2 = 24$

따라서, 총 $94(= 30 + 64)$가지의 경로가 있다.

## [문제 1] 채점기준

- 각 경로 조합(총 10가지)에 대하여 비용과 소요 시간 및 경로의 수를 바르게 계산하면: 각 경로당 **+2점**
  - ✓ 비용과 소요 시간을 정확하게 이해하면: 각 경로당 **+1점**
    - 또는 비용과 소요 시간 각각에 +0.5점씩 부여 가능
    - 단, 총점에 소수점 점수가 나올 경우, 답안의 완성도에 따라 +0.5점 또는 -0.5점 부여 가능
  - ✓ 경로의 수를 정확하게 계산하면: 각 경로당 **+1점**
- 모든 경로 조합에 대하여 비용과 소요 시간 및 경로의 수를 바르게 계산하였으나 총 경우의 수인 '94'를 계산하지 못한 경우: **-2점**

※ 계산 실수로 틀렸어도 논리 전개 과정이 맞으면 해당 부분에 1~2점의 부분 점수를 부여함.

※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 20점 이내에서 ±1점 추가 점수 부여 가능함.

## [문제 2-1] 예시답안

다음과 같이 정적분의 적분 구간 나눈 후, 첫 번째 적분에 대하여 $u = -x$로 치환하여 식을 정리한다.

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{|x|}{1-\sin x}\,dx &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{-x}{1-\sin x}\,dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1-\sin x}\,dx \\ &= -\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{u}{1+\sin u}\,du + \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1-\sin x}\,dx \\ &= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\sin x} + \frac{x}{1-\sin x}\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2x}{1-\sin^2 x}\,dx\end{aligned}$$

그리고 삼각함수의 관계식 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, $(\tan x)' = \sec^2 x$과 부분적분을 적용하여

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{|x|}{1-\sin x}\,dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} x\sec^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}\tan\frac{\pi}{4} - 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx$$

를 얻는다. 마지막으로 치환적분($u = \cos x$)으로 정적분

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \frac{1}{u}\,du = \ln 1 - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\ln 2}{2}$$

를 계산하여 답 $\frac{\pi}{2} - \ln 2$를 구한다.

### 채점기준

- 정적분을 정리하여 $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2x}{1-\sin^2 x}\,dx$를 얻으면 **+4점**
- $2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} x\sec^2 x\,dx$로 적은 후, 부분적분을 적용하여 계산을 시도하면 **+4점**
- 정답을 얻으면 **+2점**

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.

※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ±1점을 부여할 수 있습니다.

## [문제 2-2] 예시답안

점 P와 주어진 곡선 위의 점 사이 거리의 제곱의 함수를 $f(x)=x^2+\left\{4\left(1+\frac{x^2}{36}\right)^{\frac{3}{2}}-109\right\}^2$ 라 하자.

$f(x)$의 미분

$$f'(x)=\frac{2x}{3}\left\{4\left(1+\frac{x^2}{36}\right)^2-109\sqrt{1+\frac{x^2}{36}}+3\right\}$$

를 계산한 다음, $t=\sqrt{1+\frac{x^2}{36}}$ 로 치환하여 인수분해 하면

$$f'(x)=\frac{2x}{3}(t-3)(4t^3+12t^2+36t-1)$$

을 얻는다. 이때, $g(t)=4t^3+12t^2+36t-1$라 하면 $g(1)=51>0$이고

$g'(t)=12(t+1)^2+24>0$이므로, $t\geq 1$일 때 $g(t)>0$라는 것을 알 수 있다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$, $t=3$ [즉, $x=\pm 12\sqrt{2}$ ]에서 극값을 가진다.

여기서 $f(\pm 12\sqrt{2})=(12\sqrt{2})^2+1<105^2=f(0)$이므로 $x_1=-12\sqrt{2}$, $x_2=12\sqrt{2}$ 임을 알 수 있다.

곡선의 길이를 구하기 위해 적분 $\int_{-12\sqrt{2}}^{12\sqrt{2}}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$를 계산해야 하는데, 적분 함수를

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\sqrt{1+\left(6\sqrt{1+\frac{x^2}{36}}\cdot\frac{x}{18}\right)^2}=1+\frac{x^2}{18}$$

로 정리한 후 계산하면 정답 $152\sqrt{2}$ 를 얻을 수 있다.

### 채점기준

- 거리의 제곱 함수를 미분한 후 인수분해하여 $f'(x)=\frac{2x}{3}(t-3)(4t^3+12t^2+36t-1)$를 얻으면 **+6점**
- $4t^3+12t^2+36t-1$가 주어진 조건 $(t\geq 1)$에서 항상 양수라는 것을 확인하면 **+2점**
- 극소점 $x=\pm 12\sqrt{2}$를 구하면 **+2점**
- 곡선의 길이를 구하여 정답을 얻으면 **+5점**

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.

※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ±1점을 부여할 수 있습니다.

## [문제 2-2] 별해

점 $\mathrm{P}(0, 109)$와 $\mathrm{Q}\left(\alpha, 4\left(1+\frac{\alpha^2}{36}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$와의 거리가 최소이기 위해서는 주어진 곡선 위의 점 $\mathrm{Q}$에서 접선

$$y=-\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{36}}\cdot\frac{\alpha}{3}(x-\alpha)+4\left(1+\frac{\alpha^2}{36}\right)^{\frac{3}{2}}$$

과 선분 $\mathrm{PQ}$가 수직이어야 한다. 따라서, 직선

$$y=-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{36}}\cdot\frac{\alpha}{3}}(x-\alpha)+4\left(1+\frac{\alpha^2}{36}\right)^{\frac{3}{2}}$$

이 점 $\mathrm{P}$를 지나야 한다. 이때, $t=\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{36}}$ 라 하면

$$109=-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{36}}\cdot\frac{\alpha}{3}}(-\alpha)+4\left(1+\frac{\alpha^2}{36}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{t}+4t^3$$

이므로 $4t^4-109t+3=0$를 만족해야 한다.

이후 과정은 앞의 예시답안과 같은 방식으로 인수분해하여 $t=3$(즉, $x=\pm 12\sqrt{2}$)를 구한 후, 곡선의 길이 $152\sqrt{2}$를 구하면 된다.

### 채점기준

- 점 $\mathrm{Q}$에서의 접선과 수직이고 점 $\mathrm{Q}$를 지나는 직선이 점 $\mathrm{P}$도 지나간다는 것을 이용하여 $4t^4-109t+3=0$를 얻으면 **+6점**
- $4t^3+12t^2+36t-1$가 주어진 조건 $(t\geq 1)$에서 항상 양수라는 것을 확인하면 **+2점**
- $x_1=-12\sqrt{2}$, $x_2=12\sqrt{2}$를 구하면 **+2점**
- 곡선의 길이를 구하여 정답을 얻으면 **+5점**

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.

※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ±1점을 부여할 수 있습니다.

## [문제 3-1] 예시답안

$(a+1)^2x^2=\left(a+\frac{3}{2}\right)^2-y$ 를 $x^2+(y-b)^2=b^2$에 대입하여 정리하면 아래와 같다.

$$(a+1)^2y^2-(2b(a+1)^2+1)y+\left(a+\frac{3}{2}\right)^2=0$$

이차함수와 원이 두 점에서 만나려면 $y$가 중근이여야 하고 판별식을 쓰면 다음을 얻는다.

$$\left(2b(a+1)^2+1\right)^2=4(a+1)^2\left(a+\frac{3}{2}\right)^2$$

정리하면 $2b(a+1)^2+1=2(a+1)\left(a+\frac{3}{2}\right)$이고 $b=f(a)=\frac{2a^2+5a+2}{2a^2+4a+2}$이다.

$a\geq 0$이고 $f'(a)=\frac{1-a}{2(a+1)^3}$이므로 $a=1$에서 최댓값 $f(1)=\frac{9}{8}$를 갖는다.

### 채점기준

- $(a+1)^2y^2-(2b(a+1)^2+1)y+\left(a+\frac{3}{2}\right)^2=0$을 구하면 **+3점**
- $b=f(a)=\frac{2a^2+5a+2}{2a^2+4a+2}$를 구하면 **+4점**
- 미분을 하여 최댓값 $f(1)=\frac{9}{8}$를 구하면 **+3점**

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.

※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ±1점을 부여할 수 있습니다.

## [문제 3-1] 별해

$b$를 구하는 과정은 예시답안과 같다.

$b=\frac{2a^2+5a+2}{2a^2+4a+2}=1+\frac{a}{2(a^2+2a+1)}=1+\frac{1}{2\left(a+\frac{1}{a}+2\right)}$이다. $a+\frac{1}{a}\geq 2$이므로 $b\leq\frac{9}{8}$이다.

실제로 $a=1$에서 $a+\frac{1}{a}=2$이고 $b$의 최댓값은 $\frac{9}{8}$이다.

### 채점기준

- $(a+1)^2y^2-(2b(a+1)^2+1)y+\left(a+\frac{3}{2}\right)^2=0$을 구하면 **+3점**
- $b=f(a)=\frac{2a^2+5a+2}{2a^2+4a+2}$를 구하면 **+4점**
- $a+\frac{1}{a}\geq 2$을 이용하여 $f(1)=\frac{9}{8}$를 구하면 **+3점**

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.

※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ±1점을 부여할 수 있습니다.

## [문제 3-2] 예시답안

문제의 조건에서 다음을 얻을 수 있다.

$$(x-\cos t)^2+(\sqrt{x}-\sin t)^2=1 \qquad (*)$$

음함수 미분하여 다음을 얻는다.

$$(x-\cos t)(x'+\sin t)+(\sqrt{x}-\sin t)\left(\frac{x'}{2\sqrt{x}}-\cos t\right)=0$$

1) $t=\frac{\pi}{2}$일 때, 대응하는 점은 $\mathrm{B}(1,1)$ 이다. $t=\frac{\pi}{2}$, $x=1$ 대입하면 $\frac{dx}{dt}=-1$이다.

2) $x$가 $t=\alpha$에서 최댓값을 가질 때 $x'(\alpha)=0$임을 고려하면, $\sqrt{x}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$이다.

식 $(*)$을 정리하면 $x^2-2x\cos t+x-2\sqrt{x}\sin t=0$이다. $\sqrt{x}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$를 대입하면

$$\cos\alpha-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=2\sin^4\alpha$$

이 된다. $\sin^2 t=1-\cos^2 t$을 이용하여 정리하면 $2\cos^2\alpha+\cos\alpha-2=0$이 되고

$\cos\alpha=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$이다. $x$값을 구하면 $x=\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{9-\sqrt{17}}{\sqrt{17}-1}=\frac{\sqrt{17}-1}{2}$이다.

구간 $0\le t\le\pi$의 양 끝점에서 함수 값을 확인하자. $t=0$일 때, 대응하는 B는 $(1,1)$이고,

$t=\pi$일 때, 대응하는 B는 $(0,0)$이다. $1<\frac{\sqrt{17}-1}{2}$ 이므로 최댓값은 $x=\frac{\sqrt{17}-1}{2}$이다.

### 채점기준

- 음함수 미분을 통하여 $\frac{dx}{dt}=-1$구하면 **+5점**
- $\sqrt{x}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$를 유도하면 **+3점**
- $2\cos^2\alpha+\cos\alpha-2=0$을 얻어 $\cos\alpha=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$를 얻으면 **+4점**
- $x=\frac{\sqrt{17}-1}{2}$을 얻고 양 끝점에서의 값과 비교하여 최댓값임을 보이면 **+3점**

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.

※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ±1점을 부여할 수 있습니다.




미래를 움직일 인재를
양성하기 위한
혁신 교육과 첨단 인프라

**오늘도 중앙대학교의 캠퍼스에서**
**우리의 꿈이 한 뼘 더 자라고 있습니다**