

자연계열 I (1교시) 문제

수학

[문제 1] **세 사람 A, B, C 의 이름이 각각 적힌 서로 다른 3장의 이름표가 들어 있는 상자가 있다. 다음과 같은 규칙의 게임을 고려하자.**

- 1라운드: A, B, C 가 상자에서 임의로 각각 한 장씩 이름표를 뽑은 다음, 자신의 이름표를 뽑은 사람을 제외하고 다른 사람의 이름표를 뽑은 사람만 이름표를 상자에 다시 넣는다.
- n 라운드 $(n \geq 2)$: 아직 자신의 이름표를 뽑지 못한 사람만 $(n-1)$ 라운드 직후의 상자에서 임의로 각각 한 장씩 이름표를 뽑는다. 이때 자신의 이름표를 뽑은 사람을 제외하고 다른 사람의 이름표를 뽑은 사람만 이름표를 상자에 다시 넣는다.
- 각 라운드 직후 상자에 남은 이름표가 없으면 게임은 종료된다.

위와 같은 규칙으로 게임이 종료되지 않고 6라운드까지 진행된다고 할 때, 오직 한 사람만 자신의 이름표를 뽑는 경우의 수를 구하시오. (단, 각 라운드에서 이름표를 뽑는 순서는 고려하지 않는다.) [20점]

[문제 2] 다음을 읽고 문제에 답하시오.

- 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때 $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$이다.
- 미분가능한 두 함수 $y = f(u)$, $u = g(x)$에 대하여 합성함수 $y = f(g(x))$의 도함수는 $\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$이다.
- 함수 $f(x)$가 임의의 세 실수 a, b, c를 포함하는 열린구간에서 연속일 때 다음 식이 성립한다.

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

- 미분가능한 함수 $g(x)$의 도함수 $g'(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$를 포함하는 열린구간에서 연속이고, $g(a) = \alpha$, $g(b) = \beta$에 대하여 함수 $f(x)$가 α와 β를 양끝으로 하는 닫힌구간에서 연속일 때 다음 식이 성립한다.

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(t)\,dt$$

[문제 2-1] 양의 실수 α에 대하여, 곡선

$$y = \sqrt[3]{\alpha + \frac{x}{1 \cdot 2 \quad 3}} \cdot \sqrt[3]{\left(\alpha + \frac{x}{2 \cdot 3 \cdot 4}\right)^2} \cdot \left(\alpha + \frac{x}{3 \cdot 4 \cdot 5}\right)$$

위의 점 $(0,\ \alpha^2)$에서의 접선이 점 $(5, 1)$을 지난다고 할 때, α의 값을 구하시오. [10점]

[문제 2-2] 주기가 2π인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x) + 2f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 15 \cdot \frac{|\sin x|}{2 + \cos x}$$

을 만족할 때, 정적분 $\int_0^\pi f(x)\,dx$의 값을 구하시오. [15점]

[문제 3] 다음을 읽고 문제에 답하시오.

- 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서 접하는 접선의 방정식은 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ 이다.
- 미분가능한 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$ 에 대하여 합성함수 $y=f(g(x))$ 의 도함수는 $\{f(g(x))\}'=f'(g(x))\,g'(x)$ 이다.
- 미분가능한 함수 $g(x)$ 의 도함수 $g'(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 를 포함하는 열린구간에서 연속이고, $g(a)=\alpha$, $g(b)=\beta$ 에 대하여 함수 $f(x)$ 가 α 와 β 를 양끝으로 하는 닫힌구간에서 연속일 때 다음 식이 성립한다.

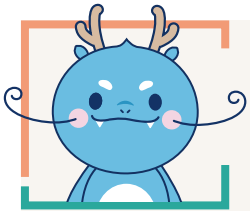
$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$$

[문제 3-1] $x \geq 1$ 에서 정의된, 좌표평면 위의 곡선 $y=\sin(\ln x)$ 가 있다. 좌표평면의 원점에서 곡선 $y=\sin(\ln x)$ 에 그은 가능한 모든 접선의 접점들을 $(a_n, \sin(\ln a_n))$ 으로 나타내자. 이때, x 좌표가 가장 작은 접점의 x 좌표가 a_1 이고, 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n < a_{n+1}$ 이 성립한다. $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{(\ln a_n)(\ln a_{n+1})}$ 의 값을 구하시오. [10점]

[문제 3-2] 함수 $y=2e^{3x}-3\alpha e^{2x}+8$ 의 그래프가 x 축과 한 점에서 만나게 하는 실수 α 의 값을 α_0 이라 하고, 이때 x 축과의 교점을 $(x_0, 0)$ 이라 하자. 다음 정적분의 값을 구하시오. [15점]

$$\int_0^{x_0}\left(2e^{3x}-3\alpha_0 e^{2x}+8\right)dx$$

[2024학년도 자연계열 논술전형]에서 과학과목이 폐지됨에 따라, 4번 과학문항은 본 가이드북에서 제외되었습니다. 과학 문항을 확인하고 싶은 경우 중앙대학교 입학처 홈페이지(http://admission.cau.ac.kr) 에서 받아보실 수 있습니다.



자연계열 I (1교시) 문제해설

1. 예시답안 및 채점기준

[문제 1] **예시답안**

우선, n라운드에서만 1명이 자신의 이름표를 뽑을 조건을 고려하자. 이를 위해서는,

① 이전 라운드까지는 모든 사람이 다른 사람의 이름표를 뽑아야 하고

② n라운드에서 세 사람 중 한 명이 자신의 이름표를 뽑고

③ $(n+1)$라운드부터는 나머지 사람이 모두 다른 사람의 이름표를 계속 뽑아야 한다.

단, $n=1$인 경우는 이전 라운드가 없기 때문에 ①의 과정이 없고, $n=6$인 경우는 6라운드까지 고려하므로 ③의 과정이 없다.

편의상, 세 사람 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$의 이름표를 각각 $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}$라고 하자. ①의 경우는 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$가 $(\mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{a})$ 또는 $(\mathrm{c}, \mathrm{a}, \mathrm{b})$를 고르는 경우이므로 2가지가 있다. ②의 경우는 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ 중 한 사람이 자신의 이름표를 뽑고 나머지 두 사람은 이름표를 엇갈리게 뽑는 경우이다. 따라서, 자신의 이름표를 뽑는 사람이 세 사람 중 한 명이므로 3가지가 있다. ③의 경우는 두 사람이 서로 이름표를 엇갈리게 뽑는 경우이므로 1가지 경우이다. 따라서, 6라운드까지 진행에서 n라운드에서만 1명이 자신의 이름표를 뽑는 경우의 수를 M_n이라고 하면 다음과 같이 계산할 수 있다.

$M_1 = 3\times1\times1\times1\times1\times1 = 3$;

예: A만 이름표를 뽑는 경우 $(\mathrm{a},\mathrm{c},\mathrm{b}) \to (\cdot,\mathrm{c},\mathrm{b}) \to \cdots \to (\cdot,\mathrm{c},\mathrm{b})$

$M_2 = 2\times3\times1\times1\times1\times1 = 3\times2^1$;

예: A만 이름표를 뽑는 경우 $(\mathrm{b},\mathrm{c},\mathrm{a})$ or $(\mathrm{c},\mathrm{a},\mathrm{b}) \to (\mathrm{a},\mathrm{c},\mathrm{b}) \to (\cdot,\mathrm{c},\mathrm{b}) \to \cdots \to (\cdot,\mathrm{c},\mathrm{b})$

$M_3 = 2\times2\times3\times1\times1\times1 = 3\times2^2$;

예: A만 이름표를 뽑는 경우

$(\mathrm{b},\mathrm{c},\mathrm{a})$ or $(\mathrm{c},\mathrm{a},\mathrm{b}) \to (\mathrm{b},\mathrm{c},\mathrm{a})$ or $(\mathrm{c},\mathrm{a},\mathrm{b}) \to (\mathrm{a},\mathrm{c},\mathrm{b}) \to (\cdot,\mathrm{c},\mathrm{b}) \to \cdots \to (\cdot,\mathrm{c},\mathrm{b})$

...

$M_6 = 2\times2\times2\times2\times2\times3 = 3\times2^5$;

예: A만 이름표를 뽑는 경우

$(\mathrm{b},\mathrm{c},\mathrm{a})$ or $(\mathrm{c},\mathrm{a},\mathrm{b}) \to \cdots \to (\mathrm{b},\mathrm{c},\mathrm{a})$ or $(\mathrm{c},\mathrm{a},\mathrm{b}) \to (\mathrm{a},\mathrm{c},\mathrm{b})$

위의 계산에 의하여, 문제에서 요구하는 경우의 수는 다음과 같다.

$$\sum_{n=1}^{6} M_n = 3\times\left(\frac{2^6-1}{2-1}\right) = 3\times63 = 189$$

[문제 1] **채점기준**

- $M_n\,(n=1,2,\cdots,6)$ 한 개당 **+3점**
  - ✓ 각 경우에 대한 순서를 이해하고 있으면 **+1점**
  - ✓ 경우의 수 계산을 정확하게 한다면 **+2점**
- 모든 경우의 수를 합하여 최종 답인 '189'를 계산했다면 **+2점**

※ 계산 실수로 틀렸어도 논리 전개 과정이 맞으면 해당 부분에 1~2점의 부분 점수를 부여함.

※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 20점 이내에서 ±1점 추가 점수 부여 가능함.

[문제 2-1] 예시답안

주어진 함수를 미분하면,

$$y' = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1\cdot2\cdot3}\left(\alpha+\frac{x}{1\cdot2\cdot3}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(\alpha+\frac{x}{2\cdot3\cdot4}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\alpha+\frac{x}{3\cdot4\cdot5}\right)$$
$$+\left(\alpha+\frac{x}{1\cdot2\cdot3}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2\cdot3\cdot4}\left(\alpha+\frac{x}{2\cdot3\cdot4}\right)^{-\frac{1}{3}}\left(\alpha+\frac{x}{3\cdot4\cdot5}\right)$$
$$+\left(\alpha+\frac{x}{1\cdot2\cdot3}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\alpha+\frac{x}{2\cdot3\cdot4}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{1}{3\cdot4\cdot5}$$

이므로

$$y'(0)=\frac{\alpha}{3}\left(\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}\right)=\frac{\alpha}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)=\frac{\alpha}{10}$$

이다. (채점용: 주어진 함수에 로그를 취하여 $\ln y=\sum_{k=1}^{3}\frac{k}{3}\ln\left(\alpha+\frac{x}{k(k+1)(k+2)}\right)$를 미분하면

$$\frac{y'}{y}=\sum_{k=1}^{3}\frac{k}{3}\cdot\frac{1}{k(k+1)(k+2)}\frac{1}{\alpha+\frac{x}{k(k+1)(k+2)}}$$

이므로 $y'(0)=\frac{y(0)}{3\alpha}\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\cdots=\frac{\alpha}{10}$를 얻을 수 있다.) 따라서 $(0,\ \alpha^2)$에서의 접선은 $y=\frac{\alpha}{10}x+\alpha^2$이다.

이 직선이 $(5,\ 1)$을 지나기 위해서는 $\alpha^2+\frac{\alpha}{2}-1=0$을 만족해야 하므로 $\alpha=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$이다.

채점기준

- 미분하여 $y'(0)=\frac{\alpha}{10}$를 구하면 **+6점**
- α에 대한 방정식을 풀어 답을 구하면 **+4점**

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.

※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ±1점을 부여할 수 있습니다.

[문제 2-2] 예시답안

편의상 $g(x)=15\cdot\frac{|\sin x|}{2+\cos x}$라 하자. 주어진 식 $f(x)=g(x)-2f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$를 반복해서 적용하면

$$f(x)=g(x)-2f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=g(x)-2g\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+4f(x+\pi)$$
$$=g(x)-2g\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+4g(x+\pi)-8f\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$$
$$=g(x)-2g\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+4g(x+\pi)-8g\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)+16f(x+2\pi\ )$$

를 얻는다. 그런데 $f(x)$의 주기가 2π이므로,

$$f(x)=-\frac{1}{15}\left\{g(x)-2g\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+4g(x+\pi)-8g\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)\right\}$$

이다. 따라서

$$\int_0^{\pi}f(x)dx=-\frac{1}{15}\left\{\int_0^{\pi}g(x)dx-2\int_0^{\pi}g\left(x+\frac{\pi}{2}\right)dx+4\int_0^{\pi}g(x+\pi)dx-8\int_0^{\pi}g\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)dx\right\}$$

이다. 우변의 첫 번째 적분은 $u=2+\cos x$로 치환하여 값을 구하고

$$\int_0^{\pi}g(x)dx=15\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{2+\cos x}dx=-15\int_3^1\frac{1}{u}du=15\ln3$$

를 얻고, 두 번째 적분은 구간을 나눈 다음 $u=2+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$로 치환하여 값을 구한다.

$$\int_0^{\pi}g\left(x+\frac{\pi}{2}\right)dx=15\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{2+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}dx-15\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{2+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}dx$$
$$=-15\int_2^1\frac{1}{u}du+15\int_1^2\frac{1}{u}du=30\ln2$$

같은 방식으로 세 번째, 네 번째 적분도 값을 구할 수 있다.

$$\int_0^{\pi} g(x+\pi)dx = -15\int_0^{\pi} \frac{\sin(x+\pi)}{2+\cos(x+\pi)}dx = 15\int_1^3 \frac{1}{u}du = 15\ln 3,$$

$$\int_0^{\pi} g\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)dx = -15\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)}{2+\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)}dx + 15\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)}{2+\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)}dx$$
$$= -15\int_2^3 \frac{1}{u}du + 15\int_3^2 \frac{1}{u}du = 30(\ln 3-\ln 2).$$

따라서

$$\int_0^{\pi} f(x)dx = -\ln 3+4\ln 2-4\ln 3+16(\ln 3-\ln 2) = 11\ln 3-12\ln 2$$ 이다.

채점기준

- $f(x)=-\frac{1}{15}\left\{g(x)-2g\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+4g(x+\pi)-8g\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)\right\}$ 를 유도하면 **+8점**
  (귀납적으로 식을 정리할 시도를 하면 4~5점 부여)
- $\int_0^{\pi} g\left(x+\frac{k\pi}{4}\right)dx$ $(k=0,1,2,3)$ 의 값을 구하면 **+5점** (치환적분을 일부지만 올바르게 수행하면 2~3점 부여)
- 합을 계산하여 정답을 얻으면 **+2점**

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.

※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ±1점을 부여할 수 있습니다.

[문제 2-2] 별해

편의상 $g(x)=15\cdot\frac{|\sin x|}{2+\cos x}$ 라 하자. 정적분 $\int_0^{\pi} f(x)dx$ 에 주어진 식 $f(x)=g(x)-2f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ 를 반복해서 적용하면,

$$\int_0^{\pi} f(x)dx = -2\int_0^{\pi} f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)dx + \int_0^{\pi} g(x)dx$$
$$= 4\int_0^{\pi} f(x+\pi)dx - 2\int_0^{\pi} g\left(x+\frac{\pi}{2}\right)dx + \int_0^{\pi} g(x)dx$$
$$= -8\int_0^{\pi} f\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)dx + 4\int_0^{\pi} g(x+\pi)dx - 2\int_0^{\pi} g\left(x+\frac{\pi}{2}\right)dx + \int_0^{\pi} g(x)dx$$
$$= 16\int_0^{\pi} f(x+2\pi)dx - 8\int_0^{\pi} g\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)dx + 4\int_0^{\pi} g(x+\pi)dx - 2\int_0^{\pi} g\left(x+\frac{\pi}{2}\right)dx + \int_0^{\pi} g(x)dx$$

그런데 $f(x)$ 의 주기가 2π 이므로,

$$\int_0^{\pi} f(x)dx = -\frac{1}{15}\left\{\int_0^{\pi} g(x)dx - 2\int_0^{\pi} g\left(x+\frac{\pi}{2}\right)dx + 4\int_0^{\pi} g(x+\pi)dx - 8\int_0^{\pi} g\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)dx\right\}$$

를 얻을 수 있다. 이후 과정은 이전 예시답안과 같다.

채점기준

- $\int_0^{\pi} f(x)dx = -\frac{1}{15}\left\{\int_0^{\pi} g(x)dx - 2\int_0^{\pi} g\left(x+\frac{\pi}{2}\right)dx + 4\int_0^{\pi} g(x+\pi)dx - 8\int_0^{\pi} g\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)dx\right\}$ 를 유도하면 **+8점**
  (귀납적으로 식을 정리할 시도를 하면 4~5점 부여)
- $\int_0^{\pi} g\left(x+\frac{k\pi}{4}\right)dx$ $(k=0,1,2,3)$ 의 값을 구하면 **+5점** (치환적분을 일부지만 올바르게 수행하면 2~3점 부여)
- 합을 계산하여 정답을 얻으면 **+2점**

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.

※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ±1점을 부여할 수 있습니다.

[문제 3-1] 예시답안

곡선 위의 점 $(t, \cos(\ln t))$에서 접선의 방정식은 $y-\sin(\ln t)=\frac{\cos(\ln t)}{t}(x-t)$이다. 원점을 지나므로 $(x, y)=(0, 0)$을 대입하면 $\sin(\ln t)=\cos(\ln t)$가 된다. $t \geq 1$이므로 $\ln t \geq 0$이고 $\ln t=\frac{\pi}{4}, \quad \pi+\frac{\pi}{4}, 2\pi+\frac{\pi}{4}, \cdots$이다. 따라서 $a_n=e^{\pi(n-1)+\frac{\pi}{4}}$ 이다. 등식 $\frac{1}{(n-\frac{3}{4})(n+\frac{1}{4})}=\frac{1}{n-\frac{3}{4}}-\frac{1}{n+\frac{1}{4}}$을 이용하면 구하는 값은 아래와 같다.

$$\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{(\ln a_n)(\ln a_{n+1})}=\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{n-\frac{3}{4}}-\frac{1}{n+\frac{1}{4}}\right)=\frac{1}{\pi^2}\left(4-\frac{4}{41}\right)=\frac{160}{41\pi^2}$$

채점기준

- $y-\sin(\ln t)=\frac{\cos(\ln t)}{t}(x-t)$를 얻으면 **+3점**
- $a_n=e^{\pi(n-1)+\frac{\pi}{4}}$ 을 얻으면 **+3점**
- 계사하여 $\frac{160}{41\pi^2}$을 얻으면 **+4점**

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.

※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ±1점을 부여할 수 있습니다.

[문제 3-2] 예시답안

$\alpha \leq 0$일 때, $2e^{3x}-3\alpha e^{2x}+8 \geq 8$이므로 x축과 만나지 않는다. $\frac{dy}{dx}=6e^{2x}(e^x-\alpha)$이므로 $\alpha>0$인 경우에 $e^x=\alpha$에서 극솟값을 갖는다. x 축과 한점에서 만나기 위하여 $e^x=\alpha$을 함수에 대입하면 $2\alpha^3-3\alpha^3+8=0$이 되어야 한다. 따라서, $\alpha_0=2$일 때 x 축과 한점에서 만나고 $x_0=\ln\alpha_0=\ln 2$이다. 주어진 정적분의 값은 아래와 같다.

$$\int_0^{x_0}\left(2e^{3x}-3\alpha_0 e^{2x}+8\right)dx=\left[\frac{2}{3}e^{3x}-\frac{3\alpha_0}{2}e^{2x}+8x\right]_0^{x_0}=8\ln 2-\frac{13}{3}$$

채점기준

- 함수의 그래프를 이해하고 $e^x=\alpha$에서 극솟값을 가진다는 것을 확인하면 **+5점**
- $\alpha_0=2$, $x_0=\ln\alpha_0=\ln 2$를 확인하면 **+5점**
- 적분하여 $8\ln 2-\frac{13}{3}$을 구하면 **+5점**

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.

※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ±1점을 부여할 수 있습니다.