[문제 4] 다음 제시문 (가) - (마)를 읽고 문제에 답하시오.

(가) 사람 몸의 기능이 정상적으로 유지되기 위해서는 세포 호흡의 결과로 발생한 노폐물을 적절히 몸 밖으로 내보내야 한다. 탄수화물과 지방이 세포 호흡에 이용되면 물과 이산화 탄소가 노폐물로 생성되고, 단백질이 세포 호흡에 이용되면 물과 이산화 탄소와 함께 암모니아가 노폐물로 생성된다. 독성이 강한 암모니아는 간에서 독성이 덜한 요소로 전환되어 콩팥을 통해 오줌의 형태로 몸 밖으로 배출된다. 혈당량은 혈액 내의 포도당 농도를 말하는데, 사람의 혈당량은 식사 전에 일정하게 유지된다. 하지만 식사 후 혈당량이 정상 범위보다 높아지면 이자의 β 세포에서 인슐린의 분비량이 증가한다. 인슐린은 간에서 포도당이 글리코젠으로 합성되는 과정을 촉진하며, 근육 세포에서 포도당의 흡수를 촉진한다. 그 결과 혈당량이 낮아져 정상 범위로 돌아온다.

(나) 화학 반응이 일어나도록 하는데 필요한 최소한의 에너지를 활성화 에너지라고 한다. 세포 내에서는 효소가 활성화 에너지를 낮추어 반응이 빠르게 일어나게 하는 촉매 역할을 한다. 효소가 작용하는 특정 반응 물질을 기질이라고 하는데, 효소는 기질과 결합하여 효소·기질 복합체를 형성하고 활성화 에너지를 낮추는 촉매 작용을 한다. 활성 부위에 기질이 결합하고 있는 동안 기질은 생성물로 변하게 된다. 온도, pH, 기질의 농도 등 다양한 요인이 효소가 관여하는 화학 반응에 영향을 미치며 이는 효소의 종류에 따라 다르다.

(다) 세포막은 세포를 둘러싸는 막으로, 세포의 형태를 유지하고 세포를 보호한다. 세포막을 구성하는 주성분은 인지질과 단백질이다. 세포막을 통한 물질의 이동은 물질의 종류에 따라 선택적으로 일어난다. 이산화 탄소나 산소 같이 크기가 작고 극성이 없는 물질이 세포막에 있는 막단백질을 거치지 않고 인지질 2중층을 통해 바로 세포막을 통과하는 현상을 단순 확산이라고 한다. 한편, 세포막은 단백질과 같은 거대한 분자나 이온, 포도당, 아미노산 등 수용성 분자에 대해서는 투과성을 보이지 않는다. 따라서 이러한 물질의 일부는 세포막에 있는 막단백질을 통해 세포막을 통과하는데, 이와 같은 현상을 촉진 확산이라고 한다.

(라) 뉴런의 세포막을 구성하는 인지질 2중층은 이온 투과성이 없지만 일부 막단백질은 이온 통로와 펌프로 작용하여 세포 안과 밖의 이온들이 불균등하게 분포한다. 이러한 이온들의 불균등한 분포와 막 투과성의 차이로 뉴런이 자극을 받지 않을 때 세포 안과 밖이 약 $-80\,\mathrm{mV}$ ~ $-60\,\mathrm{mV}$의 전위차가 발생하며, 이를 휴지 전위라고 한다. 신경 세포가 자극을 받으면 Na^+ 통로가 열려 세포 밖에 있던 Na^+이 세포 안으로 확산하여 막전위가 상승하는데, 이를 탈분극이라고 하고, 축삭 돌기에 나타나는 막전위의 급격한 변화를 활동 전위라고 한다. 활동 전위가 진행됨에 따라 Na^+ 통로가 닫히고, 대부분 K^+ 통로가 열려 세포 안에 있던 K^+이 세포 밖으로 확산한다. 그 결과 막전위가 급격히 하강하는데, 이를 재분극이라고 한다. 이후 K^+ 통로가 닫히고 이온이 재배치되어 휴지 전위로 돌아간다.

(마) 신경 세포의 축삭 돌기 말단에는 신경 전달 물질이 들어 있는 시냅스 소포가 존재한다. 흥분이 축삭 돌기 말단에 도달하면 시냅스 소포는 신경 전달 물질을 시냅스 틈으로 분비한다. 분비된 신경 전달 물질이 시냅스 이후 신경 세포의 세포막에 있는 수용체에 결합하면 이온 통로가 열려 시냅스 이후 신경 세포가 탈분극되고 활동 전위가 발생한다.

[문제 4-1] **대사 질환을 확인할 수 있는 진단 키트를 이용하여 다음과 같은 결과를 얻었다.**

[진단 키트의 원리]

Ⅰ. 콩에서 추출한 유레이스를 이용한 생체 반응 P와 젖산균을 이용한 생체 반응 Q를 활용하여 대사 질환 진단 키트를 개발하였다.

생체 반응 P: 요소 $\xrightarrow{\text{유레이스}}$ 암모니아 + 이산화 탄소

생체 반응 Q: 포도당 $\xrightarrow{\text{젖산균}}$ 젖산 + ATP

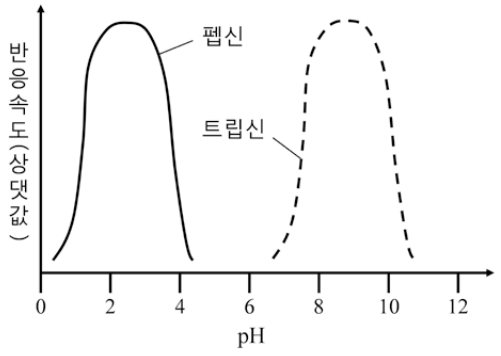
Ⅱ. 생체 반응 P는 요소의 농도가 30 mg/mL일 때부터 반응이 시작되고, 생체 반응 Q는 포도당의 농도가 125 mg/100 mL일 때부터 반응이 시작된다.

Ⅲ. 검사할 사람의 혈액으로부터 혈장을 분리하고, 이를 진단 키트에 넣어 생체 반응 P, Q가 일어나도록 충분히 반응시킨다. 그 후 첨가 시약 A를 추가하고 색 변화를 관찰한다.

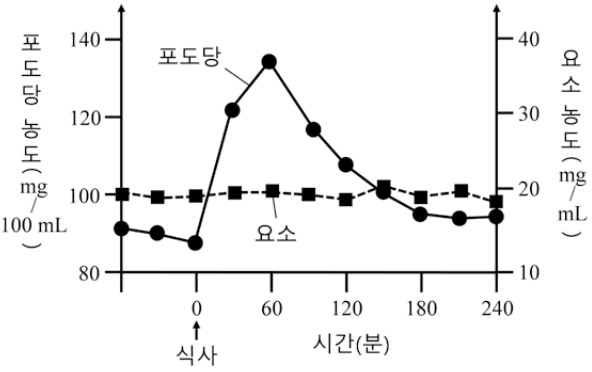
Ⅳ. 첨가 시약 A는 무색의 용액(pH 5)이고, 트립신, 펩신, 트립신 기질(트립신이 작용하면 반응 후 용액은 빨간색을 나타냄), 펩신 기질(펩신이 작용하면 반응 후 용액은 녹색을 나타냄)을 포함하고 있다.

Ⅴ. 첨가 시약 A에 포함된 효소의 pH에 따른 반응 속도는 <그림 1>과 같고, 건강한 사람의 식사 후 혈당량과 요소의 혈중 농도 변화는 <그림 2>와 같다.

<그림 1>



<그림 2>



[혈액 검사 결과]

구분	선우	철수	민수
반응 후의 색	무색	녹색	빨간색

진단 키트를 이용한 선우, 철수, 민수 세 사람의 혈액 검사 결과, 대사 질환이 있을 것이라고 예상되는 사람을 모두 제시하고, 대사 질환의 원인을 제시문 (가)와 (나)에 근거하여 설명하시오. 또한 제시된 진단 키트를 사용할 때 정확한 진단을 위하여 주의할 점에 대해 <그림 2>를 고려하여 논리적으로 설명하시오. (단, 효소 반응에서 온도 조건은 고려하지 않는다.) [15점]

[문제 4-2] **신약을 개발하기 위해 독소를 이용하여 다음과 같은 실험을 진행하였다.**

[실험 과정]

Ⅰ. 작용하는 기작이 서로 다른 독소 A와 독소 B를 각각 식염수에 녹이고, 대조군으로는 식염수를 사용하였다.

Ⅱ. 적혈구 세포에 식염수, 독소 A, 독소 B를 각각 처리한 후 1시간이 지났을 때, 각 세포 안팎의 이온 농도를 측정하여 <표 1>로 나타내었다.

Ⅲ. 아래 <그림>과 같이 신경 세포 3개에 대해 시냅스를 형성시킨 후, 실험군별로 식염수, 독소 A, 독소 B를 신경 세포 2에만 각각 처리하는 실험을 진행하였다.

Ⅳ. 신경 세포 1에 자극을 한 번 주고 난 뒤 각 신경 세포의 측정지점에서 막전위를 측정하여 최솟값과 최댓값을 <표 2>에 나타내었다.

[실험 결과]

<표 1> 실험 조건에 따른 적혈구 세포의 이온 농도

(단위: mM)

조건 / 이온	식염수 처리 세포		독소 A 처리 세포		독소 B 처리 세포	
	세포 안	세포 밖	세포 안	세포 밖	세포 안	세포 밖
Na^+	10	140	11	141	75	75
K^+	150	5	149	5	72	72
Cl^-	10	105	10	106	61	61

<그림> 신경 세포 모식도



<표 2> 신경 세포 1, 2, 3에서 얻은 막전위의 최솟값과 최댓값

(단위: mV)

조건 / 측정지점	식염수 처리 세포		독소 A 처리 세포		독소 B 처리 세포	
	최솟값	최댓값	최솟값	최댓값	최솟값	최댓값
측정지점 1	−70	+40	−70	+40	−70	+40
측정지점 2	−70	+40	−70	+40	0	0
측정지점 3	−70	+40	−70	−70	−70	−70

위의 실험 결과를 해석하여 독소 A와 독소 B가 어떻게 세포에 독성을 나타내는지 제시문 (다), (라), (마) 에 근거하여 논리적으로 설명하시오. [15점]

[문제 4] **다음 제시문 (가) - (라)를 읽고 문제에 답하시오.**

(가) 벡터는 필요에 따라 성분별로 분해할 수 있다. 벡터 분해는 직각 좌표를 이용하여 벡터의 수직 성분과 수평 성분으로 나누어 분해한다. 크기가 $|\vec{C}|$이고 x축과 이루는 각도가 θ인 벡터 $\vec{C}$를 분해하면, 수평 성분은 $C_x=|\vec{C}|\cos\theta$이고 수직 성분은 $C_y=|\vec{C}|\sin\theta$이다.

(나) 도플러 효과란 파동을 발생시키는 파원과 그 파동을 관측하는 관측자 중 하나 이상이 운동하고 있을 때 발생하는 효과이며, 파원이 내는 원래의 파장과 진동수가 매질의 상대 속도에 따라 다른 파장과 진동수로 관측되는 것이다. 소리의 파원이 관측자를 향해 움직일 때 관측자가 듣는 소리의 진동수는 증가하여 높은 소리가 들리며, 파면과 파면 사이의 거리가 짧아진 소리를 듣게 된다. 관측자가 듣는 소리의 진동수 f'는 다음과 같다.

$$f'=\left(\frac{v}{v-v_{\text{파원}}}\right)f$$

이때 v는 매질 내 소리의 속력, f는 파원이 내는 원래의 진동수, $v_{\text{파원}}$은 관측자를 향하는 방향으로의 파원의 속력이다. 따라서 소리의 파원이 관측자로부터 멀어질 때에는 관측자가 듣는 소리의 진동수는 감소하여 낮은 소리가 들린다.

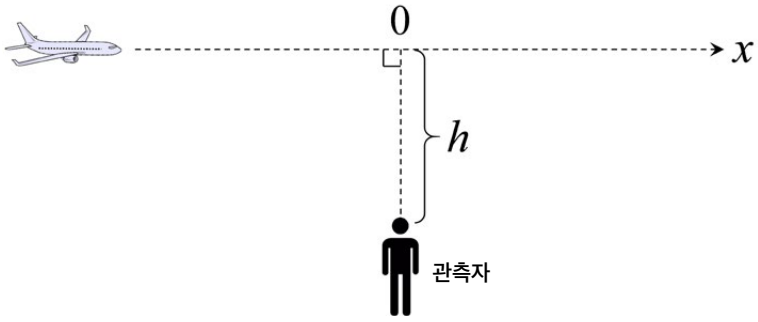
(다) 1864년 맥스웰이 빛이 전자기파라는 것을 예측한 후, 그 당시 대부분의 물리학자들은 음파가 공기라는 매질을 통해 전달되는 것과 같이 빛도 에테르라는 가상의 매질을 통해 전파된다고 믿었다. 만일 우주 전체에 에테르가 있다면, 태양 주위를 공전하는 지구는 에테르에 대해 정지해 있지 않고 움직이게 된다. 빛이 에테르를 통해 전달된다면 에테르 흐름 속에서 빛의 속력이 변할 것이다.

(라) 두 개의 동일한 파동이 서로 중첩될 때, 중첩된 파동의 진폭은 커지거나 작아지는 현상이 나타나며, 이를 파동의 간섭이라고 한다. 두 파동이 한 위치에서 중첩하여 간섭을 일으킬 때, 두 파동의 위상이 동일하여 중첩되기 전보다 진폭이 커지는 것을 보강 간섭이라고 한다. 또한 두 파동의 위상이 정반대라서 중첩되기 전보다 진폭이 더 작아지는 것을 상쇄 간섭이라고 한다. 두 개의 파원에서 위상과 파장이 같은 파동이 퍼져나갈 때, 어떤 지점 P에서의 간섭 결과는 경로차에 의해 결정된다. 경로차가 0이거나 반파장의 짝수 배가 되는 경우에는 보강 간섭이 일어나고, 경로차가 반파장의 홀수 배가 되는 경우에는 상쇄 간섭이 일어난다. 파장을 λ라고 할 때, 이것을 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\text{보강 간섭: 경로차}=\frac{\lambda}{2}(2m) \qquad (m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

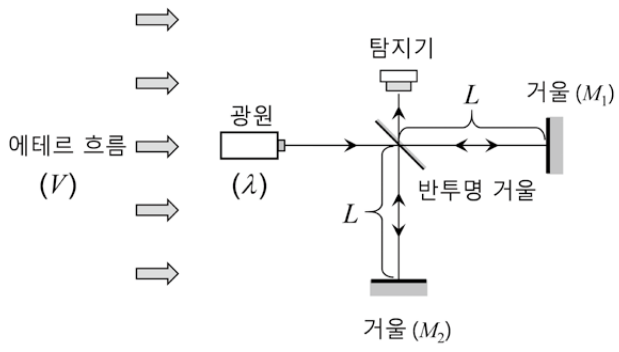
$$\text{상쇄 간섭: 경로차}=\frac{\lambda}{2}(2m+1) \quad (m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

[문제 4-1] 원래의 진동수가 f_0인 음파를 발생시킬 수 있는 비행기가 다음 그림과 같이 $x=0$에 정지해 있는 관측자의 위 높이 h에서 $+x$ 방향으로 날아 관측자를 향해 다가오고 있다. $h=0$일 때 관측자에 의해 측정되는 음파의 진동수를 구하고, $h>0$일 때 예상되는 음파의 진동수 변화를 제시문 (가)와 (나)에 근거하여 논리적으로 설명하시오. (단, 비행기의 속력은 음속의 $\frac{1}{2}$이다.) [15점]

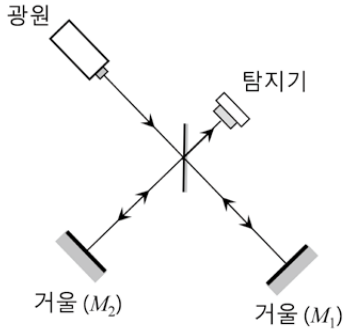


[문제 4-2] 맥스웰 당시 학자들의 생각과 같이 음파가 공기를 매질로 전파되는 것과 동일한 원리로 빛이 에테르라는 매질을 통해 전파되고, 정지한 에테르에서 빛의 속력이 c라고 가정해 보자. 이 경우 지구에서 빛의 속도는 에테르의 속도와 정지한 에테르에서 빛의 속도를 각 방향 벡터 성분별로 합한 것으로, 예를 들어 에테르 운동 방향과 수직 방향 빛의 속력은 c가 된다. 지구의 움직임을 통해 그림 (a)와 같이 에테르에 대해 상대 속력 V로 움직이는 실험계를 준비한다. 파장이 λ인 빛이 광원에서 나와 반투명 거울을 통해 수직한 두 방향으로 나뉜 후, 각각 거리 L만큼 떨어진 곳에 놓인 거울 M_1, M_2에 의해 반사되어 반투명 거울로 되돌아온다. 반투명 거울에서 다시 합쳐진 빛의 간섭을 탐지기로 측정한다.

시각 $t=0$에서 T까지 실험계를 시계 방향으로 $45°$만큼 천천히 회전시켜 그림 (b)와 같이 만든 후, 시각 $t=T$에서 $2T$까지 실험계를 반시계 방향으로 $45°$만큼 천천히 회전시켜 그림 (a)의 초기 배치 상태로 돌아온다. 실험이 수행되는 시간 $2T$ 동안 관측되는 보강 간섭의 횟수를 구하는 과정을 제시문 (가), (다), (라)에 근거하여 논리적으로 설명하시오. (단, $V<c$이다.) [15점]



(a)



(b)

[문제 4] **다음 제시문 (가) - (라)를 읽고 문제에 답하시오.**

(가) 화학 반응은 본래의 물질과 성질이 전혀 다른 새로운 물질이 생성되는 현상이다. 화학 반응이 일어날 때 반응물과 생성물의 관계를 화학식을 이용하여 나타낸 것을 화학 반응식이라고 한다. 화학 반응에 관여한 물질 사이의 계수비는 곧 몰비이므로, 이를 통해 반응물과 생성물의 질량비를 계산할 수 있다. 즉 화학 반응식을 통해 반응물과 생성물의 종류, 몰비, 질량비, 기체 부피비 등을 알 수 있다.

(나) 산의 수용액에는 수소 이온(H^+)과 음이온이 들어 있고, 염기의 수용액에는 수산화 이온(OH^-)과 양이온이 들어 있다. 산 수용액과 염기 수용액을 섞으면 H^+과 OH^-이 반응하여 물(H_2O)을 생성하고, 산의 음이온과 염기의 양이온이 반응하여 염을 생성하는데, 이를 중화 반응이라고 한다. 실제 반응에 참여한 이온만으로 나타낸 화학 반응식을 알짜 이온 반응식이라고 하며, 이를 이용하여 중화 반응을 나타내면 다음과 같다.

$$H^+(aq) + OH^-(aq) \rightarrow H_2O(l)$$

중화 반응이 완전히 일어나려면 산이 내놓는 H^+과 염기가 내놓는 OH^-의 개수가 같아야 한다. 따라서 1몰당 n몰의 H^+을 내놓는 산과 1몰당 n'몰의 OH^-을 내놓는 염기가 반응하여 완전히 중화할 때, 일반적으로 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$nMV=n'M'V'$$

(M: 산의 몰 농도, V: 산의 부피, M': 염기의 몰 농도, V': 염기의 부피)

(다) 1801년 영국의 과학자 돌턴은 서로 반응하지 않는 두 종류 이상의 기체가 섞여 있을 때 혼합 기체가 나타내는 전체 압력은 각 기체가 나타내는 압력의 합과 같다는 사실을 알아냈다. 이를 부분 압력 법칙이라고 한다. 혼합 기체의 전체 압력을 P, 각 기체의 분압을 P_A, P_B, P_C, …라고 하면 부분 압력 법칙은 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$P=P_A+P_B+P_C+\cdots$$

혼합물에서 각 물질의 양을 전체 양으로 나눈 값을 몰 분율이라고 한다. 혼합 기체에서 각 기체의 몰 분율을 각각 X_A, X_B라고 하면 각 기체의 분압은 각 기체의 몰 분율에 비례한다.

$$P_A=X_AP,\ P_B=X_BP$$

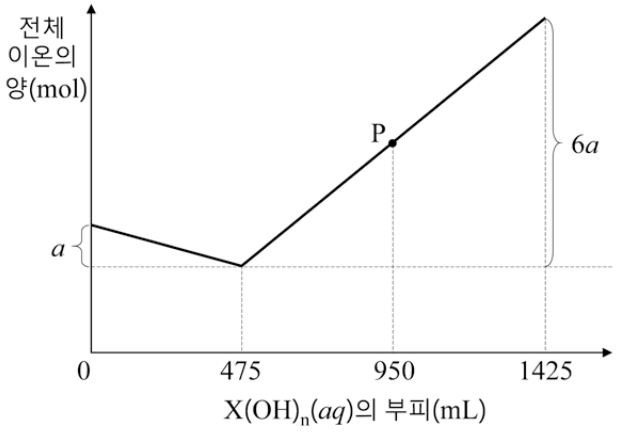
(라) A와 B가 반응하여 C와 D가 생성되는 일반적인 화학 반응에서 반응 속도(v)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$aA + bB \rightarrow cC + dD\text{에서}$$

$$v=k[A]^m[B]^n$$

이와 같이 반응 속도와 반응물의 농도 사이의 관계를 나타낸 식을 반응 속도식이라고 한다. 이때 k는 반응 속도 상수라고 불리는 비례 상수로, 반응물의 농도와는 관계없고 온도 및 촉매에 따라 변한다. 반응 속도식에서 농도의 지수인 m과 n을 반응 차수라고 한다. m=1이면 이 반응은 A에 대하여 1차 반응, n=2이면 B에 대하여 2차 반응이며, $(m+n)$을 이 반응의 전체 반응 차수라고 한다. 반응이 진행됨에 따라 반응물의 농도는 감소하며, 반응물의 농도가 감소하는 경향은 반응 차수에 따라 달라진다. 특히 반응물의 농도가 반으로 줄어드는 데 걸리는 시간을 반감기라고 하는데, 반감기는 반응 차수에 따라 다른 특성을 나타낸다.

[문제 4-1] 아래 그림은 25°C에서 $HCl(aq)$ 50 mL에 임의의 강염기 $X(OH)_n(aq)$을 조금씩 넣었을 때 넣어 준 $X(OH)_n(aq)$의 부피에 따른 혼합 용액 속 전체 이온의 양을 나타낸 것이다. 아래 그림과 제시문 (가)와 (나)에 근거하여 넣어 준 강염기의 화학식을 제시하시오. 또한, P지점에서의 pH가 13이라고 할 때 $HCl(aq)$의 초기 농도와 넣어 준 $X(OH)_n(aq)$의 농도를 구하시오. (단, 온도는 일정하고, 25°C에서 물의 이온화 상수(K_w)는 1.0×10^{-14}이며, 혼합 용액의 부피는 혼합 전 용액의 부피의 합과 같다.) [15점]



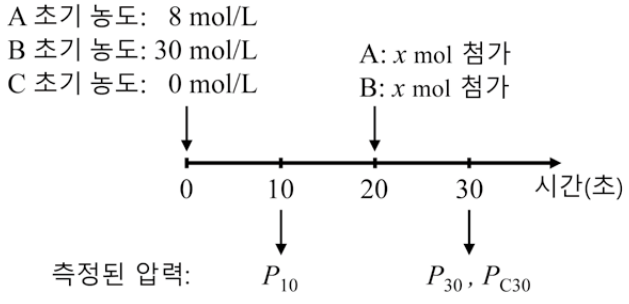
[문제 4-2] 다음은 임의의 기체 A와 기체 B가 반응하여 기체 C를 생성하는 화학 반응식이다.

$$a\,A(g) + b\,B(g) \rightarrow c\,C(g)$$

이 반응은 A에 대한 1차 반응이며 반감기는 10초이다. 부피가 0.5 L이고 온도가 300 K로 일정하게 유지되는 강철 용기에서 서로 다른 초기 반응 조건으로 실험하여 그 결과를 아래의 표에 나타내었다.

실험	반응 전 초기 농도 (mol/L)			10초가 지난 후 A의 몰 분율
	A	B	C	
I	8	30	0	$\frac{2}{15}$
II	16	30	0	$\frac{4}{15}$

위의 두 실험 중 실험 I에서 반응을 시작한 지 20초가 되었을 때 반응 용기 안에 A와 B를 각각 x mol씩 첨가하였다. 실험 I에서 반응을 시작한 지 10초가 되었을 때 반응 용기 내부의 전체 압력이 P_{10}, 30초가 되었을 때 반응 용기 내부의 전체 압력과 C의 압력이 각각 P_{30}, P_{C30}이었다. P_{10}과 P_{30}은 같고 P_{C30}이 120기압일 때 제시문 (다)와 (라)에 근거하여 x를 구하고 화학 반응식을 완성하시오. (단, 기체 상수 R는 0.08 atm · L/(mol · K)이다.) [15점]



자연계열 Ⅱ(2교시) 문제해설

수학

1. 출전 및 출제의도

제시문 출전

[문제 1] 제시문

확률과 통계, ㈜금성출판사(2019), 배종숙 외, p.21-23, 49-52

확률과 통계, 천재교과서(2019), 류희찬 외, p.12-21, 44-52

확률과 통계, (주)교학사, 권오남 외, p.12-18, 44-52

[문제 2] 확률과 통계, I-3, 이항정리, 천재교과서(2020), 류희찬 외 9인, p.28

미적분, I-1, 수열의 극한, 천재교육(2019), 이준열 외 7인, p.17

미적분, III-1, 여러 가지 적분법, 좋은책신사고(2020), 고성은 외 5인, p.133

수학 II, III-2, 정적분, 교학사(2020), 권오남 외 14인, p.131

수학 II, III-1, 부정적분과 정적분, 비상교육(2019), 김원경 외 14인, p.113

[문제 3] 미적분, 정적분의 활용, ㈜교학사(2019), 권오남 외 11인, p.179

미적분, 정적분의 활용, 천재교육(2019), 이준열 외 7인, p.176

미적분, 정적분의 활용, 좋은책신사고(2019), 고성은 외 5인, p.160

수학 II, 도함수의 활용, ㈜금성출판사(2019), 배종숙 외 6인, p.187

수학 II, 도함수의 활용, 천재교육(2019), 이준열 외 9인, p.83

수학 II, 도함수의 활용, 좋은책신사고(2019), 고성은 외 6인, p.83

출제의도

[문제 1] 경우의 수는 논리적 사고에 의하여 다양한 방법으로 계산할 수 있으며 이는 확률 계산에서 중요한 도구가 된다. 본 문제에서는 경우의 수를 계산하기 위하여 '같은 것이 있는 순열'의 개념을 사용할 수 있는지와 이를 이용하여 확률과 연관시킬 수 있는 능력을 평가한다. 본 문제는 확률의 개념의 이해도 및 경우의 수에 대한 이해도를 평가하며 난이도는 '중' 정도로 볼 수 있다.

[문제 2-1] 복잡한 형태의 수열의 극한 문제를 보다 간단한 형태의 수열의 분수와 곱의 형태로 이해하여 수열의 극한을 구할 수 있는지에 대해 평가한다. 급수와 정적분 사이의 관계를 이해하여 수열의 극한을 정적분 형태로 표현할 수 있는 지 평가한다.

[문제 2-2] 함수의 기본적인 성질을 이용하여 함수에 대한 정보를 도출해나가는 과정을 평가한다. 또한 함수의 정적분을 치환적분과 정적분의 기하적 의미를 이용하여 정적분의 값을 계산할 수 있는지도 평가한다.

[문제 3-1] 좌표평면에서 매개 변수로 표현된 점의 속도를 구하고 이를 이용하여 속력을 구한다. 그리고 주어진 구간에서 정적분을 하여 이동한 거리를 계산할 수 있는지 평가한다.

[문제 3-2] 삼각형의 넓이를 $\tan\theta$에 의해서 표현된 식으로 나타내고, 이 함수를 이용하여 최댓값을 구한다. 이 때, 함수의 극대점을 미분을 이용하여 찾아내고 이 점에서 최댓값을 갖는다는 것을 보일 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 채점기준

[문제 1] **예시답안**

P → Q로 진행되는 모든 경로는 동일한 확률$(=(1/2)^{12})$을 가지므로, P가 x축에 닿지 않았을 확률 p는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$p=\frac{\text{P}\to\text{Q의 경로 중에서 } x\text{축에 닿지 않는 경우의 수}}{\text{P}\to\text{Q의 경우의 수}}\left(=\frac{m}{n}\right)$$

※ 참고: 조건부 확률 및 이항분포 형태를 고려하여 다음과 같은 표현을 고려할 수도 있음.

$$p=\frac{m\times\left(\frac{1}{2}\right)^{12}}{n\times\left(\frac{1}{2}\right)^{12}}$$

(1) n의 값

Q점에 도착하기 위한 동전의 앞면(H)이 나온 횟수를 a, 뒷면(T)의 횟수를 b라고 하면, 다음과 같은 관계식을 유도할 수 있다.

$$a+b=12,\ a-b=8$$

따라서, $a=10$, $b=2$이다. 즉, 10개의 H와 2개의 T를 일렬로 배열하는 경우의 수이다.

$$n={}_{12}C_{10}={}_{12}C_{2}=\frac{12\times11}{2}=66.$$

(2) m의 값

x축에 닿지 않는 경로는 다음의 2가지 경우로 나눠 생각할 수 있다.

(i) P가 (0, 0) → (1, 1) → (2, 2) → (3, 3)으로 진행한 경우 (참고: 그림1)

이 경우는, 7개의 H와 2개의 T를 일렬로 배열하는 경우의 수이다.

$$m_1={}_{9}C_{7}={}_{9}C_{2}=\frac{9\times8}{2}=36$$

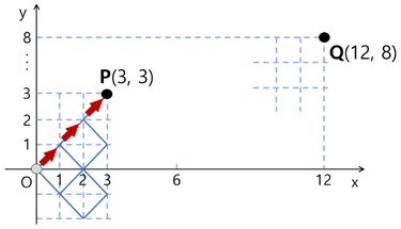
(ii) P가 (0, 0) → (1, 1) → (2, 2) → (3, 1) → (4, 2)로 진행한 경우 (참고: 그림2)

이 경우는, 7개의 H와 1개의 T를 일렬로 배열하는 경우의 수이다.

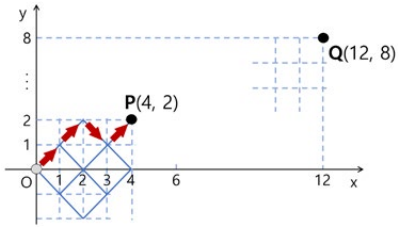
$$m_2={}_{8}C_{7}={}_{8}C_{1}=8$$

(3) 확률 p의 계산

따라서, $m=m_1+m_2=44$ 이므로, $p=\frac{44}{66}=\frac{2}{3}$.



<그림 1>



<그림 2>

※ m의 계산을 위하여, 다음과 같이 여사건을 이용할 수도 있다. 즉, x축에 닿고 Q점에 도달하는 경우는 다음과 같은 세 가지 경우이다.

(i) P가 (0, 0) → (1, −1)로 진행한 경우: $m_1^*={}_{11}C_{1}=11$

(ii) P가 (0, 0) → (1, 1) → (2, 0)으로 진행한 경우: $m_2^*={}_{10}C_{1}=10$

(iii) P가 (0, 0) → (1, 1) → (2, 2) → (3, 1) → (4, 0)으로 진행한 경우: $m_3^*={}_{8}C_{0}=1$

따라서, 위의 세 가지 경우의 합(여사건의 경우의 수, m^*)을 이용하여,

$$m=n-m^*=n-(m_1^*+m_2^*+m_3^*)=66-(11+10+1)=66-22=44.$$

채점기준

1. Q점에 도착하기 위한 모든 경로의 수 n을 바르게 계산한 경우: **+7점**(a, b의 값만 구한 경우: **+2점**)
2. x축에 닿지 않는 경로의 수 m_1과 m_2를 각각 바르게 계산 경우: **+5점**, **+5점**

   (여사건의 경로의 수 m^*를 고려하여 $m=n-m^*$를 계산한 경우: **+10점**; 단, 각 여사건(m_1^*, m_2^*, m_3^*)에 대하여 **+3점**씩 부여; 총합 $m^*=m_1^*+m_2^*+m_3^*$ 계산: **+1점**)
3. n과 m을 이용하여 확률 p를 바르게 계산한 경우: **+3점**

※ 계산 실수로 틀렸어도 논리 전개 과정이 맞으면 해당 부분에 1~2점의 부분 점수를 부여함.

※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 20점 이내에서 ±1점 추가 점수 부여 가능함.

[문제 2-1] 예시답안

[방법 1]

우선 문제에 주어진 식을 다음과 같이 정리한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}(k+\sqrt{n})^4}{\sum_{k=1}^{n}(n+k)^4}=\frac{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}\sum_{k=1}^{n}(k+\sqrt{n})^4}{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}\sum_{k=1}^{n}(n+k)^4}$$

분모는 정적분과 급수의 합과의 관계를 이용하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}\sum_{k=1}^{n}(n+k)^4=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^4=\int_0^1(1+x)^4dx=\frac{31}{5}$$

를 얻는다. 분자는 다음과 같이 식을 정리한 후

$$\sum_{k=1}^{n}(k+\sqrt{n})^4=\sum_{k=1}^{n}k^4+4\sqrt{n}\sum_{k=1}^{n}k^3+6n\sum_{k=1}^{n}k^2+4n\sqrt{n}\sum_{k=1}^{n}k+n^2$$

거듭제곱의 합 공식을 적용한다.

$$\sum_{k=1}^{n}(k+\sqrt{n})^4=\sum_{k=1}^{n}k^4+4\sqrt{n}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+6n\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+4n\sqrt{n}\frac{n(n+1)}{2}+n^2$$

그리고 정적분과 급수의 합과의 관계를 이용하여 극한을 취한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}\sum_{k=1}^{n}(k+\sqrt{n})^4=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4+0=\int_0^1x^4dx=\frac{1}{5}$$

마지막으로 분자의 극한을 분모의 극한으로 나누어 정답 $\frac{1}{31}$을 얻는다.

[방법 2]

위 예시답안에서 분자의 극한을 취할 때, 식을 다음과 같이 정리한 후,

$$\frac{1}{n^5}\sum_{k=1}^{n}(k+\sqrt{n})^4=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4+\frac{4}{\sqrt{n}}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3+\frac{6}{n}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2+\frac{4}{n\sqrt{n}}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{n^2}$$

정적분과 급수의 합과의 관계를 이용하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}\sum_{k=1}^{n}(k+\sqrt{n})^4=\int_0^1x^4dx+0\cdot\int_0^1x^3dx+0\cdot\int_0^1x^2dx+0\cdot\int_0^1xdx+0=\frac{1}{5}$$

를 얻을 수도 있다. 나머지 과정은 동일하다.

채점기준

- 분모와 분자에 $\frac{1}{n^5}$를 곱한 후, 정적분과 급수의 합과의 관계를 적용하면 **+4점**
- 정적분과 급수의 합과의 관계를 이용한 계산을 통해 정답 $\frac{1}{31}$을 얻으면 **+6점**

  단, 분자를 다룰 때 0으로 수렴하는 항들을 엄밀하게 처리하지 않았다면 **최대 3점 감점** (전혀 언급이 없으면 **3점 감점**, 과정이 미흡하면 **1-2점 감점**)

[문제 2-2] 예시답안

주어진 식을 제곱하여

$$2f(x)^2+f(20-x)^2=-x^2+20x$$

를 얻는다. 위 식의 양변에 2를 곱하여

$$4f(x)^2+2f(20-x)^2=-2x^2+40x$$

를 얻는다. 그리고 첫 번째 식에 x대신 $20-x$를 대입하여

$$2f(20-x)^2+f(x)^2=-(20-x)^2+20(20-x)=-x^2+20x$$

를 얻는다. 위의 식에서 아래의 식을 빼면

$$3f(x)^2=-x^2+20x=100-(x-10)^2$$

를 얻을 수 있는데, 따라서

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{100-(x-10)^2}$$

이다. 적분에 이 식을 대입한 후 $u=\frac{x-10}{10}$으로 치환하여 적분을 계산한다.

$$\int_0^{10} xf(x)dx=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{10} x\sqrt{100-(x-10)^2}\,dx=\frac{1000}{\sqrt{3}}\int_{-1}^{0}(u+1)\sqrt{1-u^2}\,du$$
$$=\frac{1000}{\sqrt{3}}\left(\int_{-1}^{0}\sqrt{1-u^2}\,du+\int_{-1}^{0}u\sqrt{1-u^2}\,du\right)=\frac{1000}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\right)$$

채점기준

- $20-x$를 대입하여 새로운 식 $2f(20-x)^2+f(x)^2=-x^2+20x$를 얻으면 **+3점**
- $f(x)^2$과 $f(20-x)^2$에 대한 연립방정식을 풀어서 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{100-(x-10)^2}$을 얻으면 **+3점**
- 적분을 계산하기 위해 치환 적분을 이용하거나 원의 면적을 이용하면 **+3점**
- 계산을 수행하여 정답을 얻으면 **+6점**
- [보충 채점기준] 주어진 식의 대칭성을 파악하면 바로 $3f(x)^2=100-(x-10)^2$을 얻을 수도 있다. 이 경우는 감점하지 않는다. **+6점**

[문제 3-1] 예시답안

우선 점 P의 속력은 정의로부터 다음과 같다.

$$|v|=\sqrt{1+4(t^2-2t+2)(t-1)^2}$$

루트 내부의 식을 완전 제곱식으로 정리를 하면,

$$|v|=\sqrt{1+4((t-1)^2+1)(t-1)^2}=\sqrt{4(t-1)^4+4(t-1)^2+1}$$
$$=\sqrt{(2(t-1)^2+1)^2}=2(t-1)^2+1$$

이다. 따라서 속력이 최소인 시각 t_0은 1이다. 마지막으로 위에서 얻은 속력에 대한 식을 적분하여 점 P의 이동거리를 구한다.

$$\int_0^1 2(t-1)^2+1\,dt=\left(\frac{2}{3}(1-1)^3+1\right)-\left(\frac{2}{3}(0-1)^3+0\right)=\frac{5}{3}$$

채점기준

- $|v|=\sqrt{1+4(t^2-2t+2)(t-1)^2}$ 계산하면 **+3점**
- $|v|=2(t-1)^2+1$ 구하면 **+4점**
- 적분하여 $\frac{5}{3}$ 구하면 **+3점**

[문제 3-2] 예시답안

[방법 1]

교점 $B(x_0, y_0)$는 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$과 $y=(\tan 2\theta)x\left(\theta\neq\frac{\pi}{4}\right)$의 교점이다. 연립해서 풀면 $x_0^2=\frac{4}{4+\tan^2(2\theta)}$이다.

$B(x_0, y_0)$과 $y=(\tan\theta)x\left(\theta\neq\frac{\pi}{2}\right)$와의 거리는 $\frac{|x_0\tan\theta-y_0|}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\frac{|x_0\tan\theta-x_0\tan(2\theta)|}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$이다.

따라서, 삼각형 AOB의 넓이는 $\frac{1}{2}\frac{|\tan\theta-\tan(2\theta)|}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}|x|=\frac{|\tan\theta-\tan(2\theta)|}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}\frac{1}{\sqrt{4+\tan^2(2\theta)}}$이고

$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$를 이용하여 정리하면 $\frac{1}{2}\frac{\tan\theta\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\sqrt{(1-\tan^2\theta)^2+\tan^2\theta}}$이다.

이 공식에 $\theta=\frac{\pi}{4}$를 대입하면 $\frac{\sqrt{2}}{2}$값을 갖고 이것은 직접 구한 삼각형의 넓이와 같다.

삼각형 AOB의 넓이를 나타내는 함수 $f(\theta)$는 아래와 같다.

$$f(\theta)=\begin{cases}\frac{1}{2}\frac{\tan\theta\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\sqrt{(1-\tan^2\theta)^2+\tan^2\theta}} & \left(\theta\neq\frac{\pi}{2}\right)\\ \frac{1}{2} & \left(\theta=\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$

f^2의 최댓값을 구하면 된다. $s=\tan^2\theta\,(s\geq 0)$로 쓰면 $f^2=\frac{s(1+s)}{4\{(1-s)^2+s\}}=\frac{s^2+s}{4(s^2-s+1)}$이고 미분하면 $\frac{-2s^2+2s+1}{4(s^2-s+1)^2}$이다.

따라서 $s=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$에서 최댓값을 갖고 $M^2=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{3+2\sqrt{3}}{12}$이다.

[방법 2]

삼각형의 넓이를 구하는 다른 방법이다. $B(x_0, y_0)$에서 $x_0^2=\frac{4}{4+\tan^2(2\theta)}$이고 $y_0^2=\frac{4\tan^2(2\theta)}{4+\tan^2(2\theta)}$이므로 선분 OB의 길이는

$\frac{2\sqrt{1+\tan^2(2\theta)}}{\sqrt{4+\tan^2(2\theta)}}$이다. 따라서 삼각형 AOB의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{1+\tan^2(2\theta)}}{\sqrt{4+\tan^2(2\theta)}}\sin\theta$이다.

$\sin\theta=\frac{\tan\theta}{\sqrt{\tan^2\theta+1}}$와 $\tan(2\theta)=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$를 이용하여 정리하면 삼각형 AOB의 넓이는 $\frac{\tan\theta\sqrt{1+\tan^2\theta}}{2\sqrt{(1-\tan^2\theta)^2+\tan^2\theta}}$이다.

이 후 과정은 예시답안과 같다.

채점기준

- 교점 $B(x_0, y_0)$ $x_0=\frac{2}{\sqrt{4+\tan^2 2\theta}}$, $y_0=\frac{2\tan 2\theta}{\sqrt{4+\tan^2 2\theta}}$ 구하면 **+3점**
- 삼각형의 넓이 $\frac{1}{2}\frac{\tan\theta\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\sqrt{(1-\tan^2\theta)^2+\tan^2\theta}}$를 구하면 **+5점**
- $\tan^2\theta=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$에서 최댓값을 갖고 그 값이 $M^2=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{3+2\sqrt{3}}{12}$을 구하면 **+5+2=7점**
- $\theta=\theta/4$, $\theta=\pi/2$인 경우에 대하여 언급이 없으면 각각 **1점씩 감점**

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 1~2점의 부분 점수를 부여할 수 있음.

※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 -0.5~+0.5점을 부여할 수 있음.

1. 출전 및 출제의도

제시문 출전

[문제 4] 제시문

생명과학 I, 와이비엠(2020), 이용철 외 3인, p.65-68 / 생명과학 I, 미래엔(2020), 오현선 외 5인, p.70-76
생명과학 I, 교학사(2020), 권혁빈 외 5인, p.38-57, 60-67 / 생명과학 I, 지학사(2019), 전상학 외 7인, p.34-57, 60-67
생명과학 I, 천재교육(2019), 이준규 외 5인, p.38-51, 59-63 / 생명과학 II, 미래엔(2020), 오현선 외 5인, p.50-55
생명과학 II, 비상교육(2020), 심규철 외 5인, p.44-48, 56-62 / 생명과학 II, 지학사(2020), 전상학 외, p.46-51
생명과학 II, 교학사(2020), 권혁빈 외 5인, p.46-49, 52-58 / 생명과학 II, 천재교육(2018), 이준규 외, p.54-59

출제의도

[문제 4-1] 생체 내에서 다양한 기능을 하는 효소는 최적화된 온도, pH 등의 반응에 적절한 환경을 줬을 때 활성화된다. 문제 [4-1]은 이러한 효소의 반응을 이용하여 진단 키트를 만든 상황을 제시하고, 효소 반응 원리를 이해하여 환자의 발병원인을 찾아내는 과정을 논리적으로 추론할 수 있는지 평가하고자 하였다. 환자의 혈액이 산성, 염기성 조건에 따라 진단 키트 내에서 서로 다른 효소 반응이 이루어지고, 그 결과 다른 조건의 pH 상황에서 펩신, 트립신 효소가 작용하게 되어 서로 다른 색을 나타내도록 진단키트를 구성하였다. 또한 제시문을 읽고 진단 키트의 작용 원리와 사용 방법을 이해하며, 진단 키트의 생체 반응이 특정 농도 이상이 되어야 시작됨을 이해하여 포도당을 검출하기 위해서는 식사 직후 사용할 수 없음을 알아낼 수 있다. 더불어 본 문제를 통해 효소의 활성과 반응을 이용하여 생체 현상을 다양하고 통합적으로 이해할 수 있는지 통합 추론 능력을 확인하고자 하였다.

[문제 4-2] 작용하는 기전이 서로 다른 2가지 독소를 이용하여 세포를 구성하고 있는 세포막의 특성과 항상성을 유지하기 위한 신경 세포의 특성을 이해하고 있는 지를 묻는 문제이다. 세포막에는 출입하는 물질에 따라 단순 확산, 촉진 확산, 삼투나 능동 수송이 일어날 수 있으며, 건강한 세포의 경우 인지질 이중층으로 구성된 세포막에 여러 가지 막단백질을 가지고 있어 이온이나 극성을 띠는 물질의 출입을 통제하고 세포 밖과 안의 환경을 구분하고 있다. 이러한 특성을 이해하고 있으면 주어진 문제에서 독소 B에 의해 세포막의 촉진 확산 작용에 관여하는 막단백질이 기능하지 않음을 알 수 있고, 이를 통해 독소 B가 세포막의 선택적 투과성에 영향을 끼치는 것을 유추할 수 있다. 또한 신경 세포는 외부에서 들어온 자극을 축삭돌기에서 전위차를 발생시켜 축삭돌기 말단까지 전도하고 시냅스 틈으로 신경 전달 물질을 분비하여 다음 신경 세포로 자극을 전달한다. 이러한 원리를 통해 항상성이 유지되고 있으며, 이를 이해하고 있는 지를 두 번째 실험에서 묻고 있다. 독소 A의 경우 1번 신경 세포의 자극이 2번 신경 세포로 전달되었으나, 2번 신경 세포에서 3번 신경 세포로 자극의 전달이 되지 않았다. 이러한 실험 결과를 통해 독소 A의 작용 기전은 신경 세포에서 흥분의 전달을 방해하고 있음을 알 수 있는데, 주어진 실험의 결과를 통합적으로 해석함으로써 신경 세포의 흥분의 전도와 전달의 기전을 이해하고 있는 지를 평가하고자 한다.

2. 예시답안 및 채점기준

[문제 4-1] 예시답안

- 생체 반응 P는 요소가 존재하면 유레이스와 반응 후 암모니아를 생성하여 염기성 환경을 조성함을 알 수 있다. 생체 반응 Q는 포도당이 존재하면 젖산균에 의해 젖산을 생성하고 산성 환경을 조성함을 알 수 있다. 즉, 진단 키트를 이용하여 검사할 사람의 혈장 속에 요소가 많으면 염기성 환경이, 포도당이 많으면 산성 환경이 조성됨을 알 수 있다.

- 진단 키트에 검사할 사람의 혈장을 넣고 반응시킨 후 첨가 시약 A를 넣으면, 산성 환경인 경우엔 펩신 효소가 활성화되어 펩신 기질을 분해하여 녹색을 나타낸다. 또한 염기성 환경인 경우엔 트립신 효소가 활성화되어 트립신 기질을 분해하고 빨간색을 나타낸다. 따라서 진단 결과 색 변화가 없는 선우는 정상이고, 철수는 녹색을 나타내어 포도당이 혈장 내에 많고, 민수는 빨간색을 나타내어 혈장 내에 요소가 많아서 생긴 대사 질환임을 예상할 수 있다.
- 이 진단 키트는 요소의 농도가 30 mg/mL 이상이고, 포도당의 농도가 125 mg/100mL일 때부터 반응이 시작되는데, <그림 2>를 통해 보면 정상인 경우에도 식사 후 혈중 포도당 농도가 125 mg/100mL를 넘어서므로, 이 진단 키트를 이용하여 포도당 농도를 정확하게 측정하기 위해서는 식사 전이나 식후 2~3시간 이후에 측정을 해야 할 것이다.

채점기준

1. 진단 키트의 원리를 이해하고 철수, 민수의 대사질환의 원인을 정확히 제시하면 **+4점**
2. 생체반응 P, Q가 각각 염기성, 산성 환경을 만들고 이를 이용하여 추가 시약을 넣으면 펩신, 트립신의 효소반응을 활성화시켜 색변화가 일어남을 논리적으로 제시하면 **+5점**
3. <그림 2>를 해석하여 요소 측정에는 문제가 없으나, 포도당 농도 측정을 정확히 하기 위해서는 식전이나, 식후 2~3시간 이후에 진단키트를 사용할 수 있다고 논리적으로 제시하면 **+6점**

※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 15점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

[문제 4-2] 예시답안

- 독소 A와 독소 B를 처리한 지 1시간 후 세포 안과 밖의 이온 농도를 측정한 표 1을 보면 독소 A를 처리한 세포 안과 밖의 이온 농도가 큰 차이를 두고 유지되고 있으나 독소 B를 처리한 경우 세포 안과 밖의 이온 농도 차가 없는 것으로 보인다. 제시문 (다)에서 이온과 같은 수용성 분자들이 세포막의 막단백질을 통해 이동하는 촉진 확산이 일어나고 있음을 알 수 있고, 이는 독소 B를 처리하게 되면 세포막의 막단백질이 기능하지 않아 이온의 이동을 조절하지 못함을 알 수 있다.
- 신경 세포를 이용한 실험을 나타낸 표에서 독소 A가 처리된 실험은 신경 세포 1과 신경 세포 2에서 정상적으로 활동 전위를 나타낸다. 그러나 신경 세포 3에서는 휴지 전위 상태를 계속 유지하고 있는 것으로 보아 신경 세포 2를 지나온 자극이 시냅스 틈을 지나 신경 세포 3으로 넘어올 때 문제가 생긴 것으로 보인다. 따라서 축삭 돌기를 따라 전달된 자극이 시냅스 틈에서 신경 전달 물질을 분비하여 다음 신경 세포로 전달하는 흥분의 전달 과정에 문제가 생겼음을 짐작할 수 있다.
- 반면 독소 B 처리 신경 세포에서는 막단백질 기능에 이상이 생겨 세포 안과 밖의 Na^+과 K^+ 이온의 선택적 이동(능동 수송)에 영향을 받았고, 결과적으로 세포 안과 밖의 이온 차가 없어졌음을 나타낸다. 따라서 서로 작용하는 기작이 다른 독소 중 독소 A는 신경 세포의 축삭 말단에서 분비되는 신경 전달 물질을 억제하여 흥분의 전달을 막는 독성을 나타내고, 독소 B는 세포막에 있는 막단백질의 기능을 떨어뜨려 세포 안과 밖의 Na^+과 K^+의 이동이 조절되지 않는 독성을 나타낸다고 추론할 수 있다.

채점기준

1. 독소 B에 의해 세포 안팎의 이온차가 없어진 것과, 세포막의 막단백질이 이온의 조절에 관여하는 것을 설명하면 **+4점**
2. 독소 A를 처리한 신경 세포 2번에서 흥분의 전도가 일어나고 있음을 설명하면 **+3점**
3. 독소 A를 처리한 신경 세포 2의 말단에서 흥분의 전달이 되지 않음을 설명하면 **+4점**
4. 독소 B를 처리한 신경 세포 2의 세포막에 있는 막단백질의 기능에 이상이 생겨 막전위가 0 mV인 것을 설명하면 **+4점**

※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 15점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

1. 출전 및 출제의도

제시문 출전

[문제 4] 제시문

물리학 I, 천재교육(2018), 강남화 외, p.67-68 / 물리학 I, 지학사(2019), 김성원 외, p.174-178
물리학 II, 지학사(2018), 김성원 외, p.178-181 / 물리학 II, 교학사(2018), 김영민 외, p.13-17
물리학 II, 교학사(2018), 김영민 외, p.159-165

출제의도

[문제 4] 파동과 빛의 성질은 고등학교 물리Ⅰ 단원Ⅲ 파동과 정보통신, 고등학교 물리Ⅱ 단원Ⅲ 파동과 물질의 성질 등에서 다루고 있는 물리학의 중요한 주제 중 하나이다. 본 문항 평가에서는 고교생들에게 익숙한 주제인 도플러 효과, 파동의 간섭, 벡터의 성분 분해 등 기본 물리 현상을 제시하고, 이를 기반으로 도플러 효과에 의한 파동의 진동수 변화, 파동의 시간 지연에 따른 간섭 신호 발생의 물리적 상황을 수리적으로 해석하는 문제를 출제하였다.

[문제 4-1] 도플러 효과는 파원과 관측자의 상대적인 움직임에 의해 파동의 파장이나 진동수가 실제와 다르게 관측되는 현상으로 고교 물리학의 파동 부분에서 다뤄지는 대표적인 주제이다.
제시문 (나)에서 도플러 효과가 관측자 방향으로의 음원의 속력에 의해 결정되므로, $h=0$인 상황에서는 주어진 식을 적용하여 진동수 변화를 간단히 계산할 수 있다. $h>0$인 경우 이동하는 비행기가 관측자와 이루는 각 θ를 이용하면 관측자 방향으로의 음원의 속력을 표현할 수 있다. 이 속력을 제시문 (나)에 있는 도플러 효과의 식에 적용하면 관측되는 소리의 진동수를 $\cos\theta$가 포함된 식으로 나타낼 수 있고, 비행기와 관측자, 진행 방향이 이루는 각도에 커짐에 따라 관측자 방향으로의 속도 성분이 줄어들게 되어 관측되는 진동수가 줄어들게 됨을 알 수 있다. 본 문제는 벡터의 분해, 파동의 진행, 도플러 효과 등 물리학 교과 내용에 대한 이해력과 응용력을 평가하며, 난이도 중 수준의 문제이다.

[문제 4-2] 마이컬슨·몰리 실험은 물리학의 역사에서 매우 중요한 실험으로서, 우주 공간에서 빠르게 움직이고 있는 지구에서 빛의 속도가 빛의 진행 방향에 무관하게 측정되는 결과를 보여주는 실험이며, 이를 통해 기존 물리학자들이 예상했던 에테르의 존재가 부정되고, 아인슈타인의 특수 상대성 이론이 제안되는 계기가 되었다.
본 문항은 마이컬슨·몰리 실험의 결과와 달리 만일 에테르가 존재하고 빛이 소리와 같이 에테르를 통해 전파되는 파동이라고 가정할 때 발생하는 일을 예상해 보는 문제이다. 제시문 (가)에서 설명된 벡터의 성분 분해를 빛의 속력에 적용하면, 임의의 회전 각도에서 에테르의 속력에 빛의 속력을 더하는 방식으로 두 거울을 진행하는 빛의 속력을 회전 각도의 함수로 구할 수 있다. 빛이 왕복하는 상황을 고려하여 거울까지의 거리 L을 각각의 빛의 속력으로 나누면 각 거울을 왕복하는데 소요되는 시간 차이를 구할 수 있고, 시간 차이가 (a) 상태에서 최대, (b) 상태에서 최소인 0이 되는 것을 알 수 있다. 제시문 (라)에 따라 보강 간섭은 거리로는 한 파장, 또는 시간으로는 빛의 진동 주기 간격으로 발생하므로 최대 시간 차이를 진동 주기로 나눈 값을 넘지 않는 최대 정수가 한 방향으로 회전할 때 발생하는 보강 간섭의 횟수가 된다. (b) 상태에서 시간 차이가 0으로 항상 보강 간섭이 되는 점을 고려하면 최대 정수의 두 배에 1을 추가한 값이 보강 간섭이 나타나는 전체 횟수가 된다. 본 문제는 벡터의 분해, 파동의 진행, 빛의 간섭 등 물리학 교과 내용에 대한 종합적인 이해력과 응용력을 평가하며, 난이도 중-상 수준의 문제이다.

2. 예시답안 및 채점기준

[문제 4-1] 예시답안

- 도플러 효과에 의한 주파수 변화는 제시문 (나)의 설명과 같이 관측자 방향으로의 파원의 속력에 의해 결정된다.
- $h=0$일 때 음속을 V_s라 하면 제시문 (나)의 도플러 효과 식을 적용하면 다음과 같다.

$$f'=\left(\frac{V_s}{V_s-\frac{V_s}{2}}\right)f_0=2f_0$$

- $h>0$일 때 비행기의 진행 방향과 관측자 방향의 사잇각을 θ라고 하면, 관측자 방향으로의 비행기 속도는 제시문 (가)에 의해 $V_{파원}=\frac{V_s}{2}\cos\theta$이다.
- $0<\theta\leq 90°$일 때, $1>\cos\theta\geq 0$이 되고, $\frac{V_s}{2}>V_{파원}\geq 0$이 된다.
- 제시문 (나)에 주어진 도플러 효과의 진동수 변화 식을 적용하면 다음과 같다.

$$f'=\left(\frac{V_s}{V_s-\frac{V_s}{2}\cos\theta}\right)f_0=\left(\frac{2}{2-\cos\theta}\right)f_0$$

- 따라서 $0<\theta\leq 90°$일 때 $2f_0>f'\geq f_0$에서 변화하며, θ가 증가함에 따라 f'가 감소하게 된다.

채점기준

- $h=0$일 때 도플러 공식을 이용하여 f'을 정확히 계산하면 **+5점**
- $h>0$일 때 벡터의 방향 성분을 고려하여 관측자 방향으로 비행기의 속력이 작아짐을 설명하면 **+3점**
- $h>0$일 때 도플러 효과의 진동수 식을 고려하여 진동수가 $2f_0$보다 작아짐을 설명하면 **+2점**
- $h>0$일 때 머리 위에서는 $f'=f_0$임을 설명하면 **+2점**
- $h>0$일 때 비행기의 위치에 따른 f'을 수식을 통해 정확히 계산하면 **+3점**

※ 논리 전개가 맞으면 계산이 틀려도 항목별 점수의 절반 이내에서 부분 점수를 부여할 수 있음.

※ 각 항목별 답안의 완성도에 따라 ±0.5점 부여할 수 있음 (최대 점수 이내).

[문제 4-2] 예시답안

- 실험계가 θ만큼 회전한 경우 빛이 M_1, M_2에서 반사되어 돌아오는 데 소요되는 시간을 각각 T_1, T_2, 그 시간 차이를 ΔT라고 하면, 에테르 속력의 방향 성분을 고려할 때 다음과 같이 계산된다.

$$T_1=\frac{L}{c+V\cos\theta}+\frac{L}{c-V\cos\theta},\ T_2=\frac{L}{c-V\sin\theta}+\frac{L}{c+V\sin\theta}$$

$$\Delta T=T_1-T_2=\frac{2cL}{c^2-V^2\cos^2\theta}-\frac{2cL}{c^2-V^2\sin^2\theta}$$

- $0\leq\theta\leq 45°$에서 $\cos\theta$, $\sin\theta$는 각각 감소, 증가하므로, ΔT는 $\theta=0$에서 최대인 $\Delta T_{max}=\frac{2LV^2}{c(c^2-V^2)}$, $\theta=45°$에서 최소인 $\Delta T_{min}=0$이 된다.
- $\theta=45°$에서 항상 보강 간섭하므로, $0\leq t\leq T$까지 보강 간섭이 나타나는 횟수는 'ΔT_{max}를 빛의 주기로 나눈 값을 넘지 않는 최대 정수+1'회이다.

$$\left[\frac{\Delta T_{max}}{\lambda/c}\right]+1=\left[\frac{2LV^2}{\lambda(c^2-V^2)}\right]+1\ ([A]는\ A를\ 넘지\ 않는\ 최대\ 정수)$$

- $\theta=0°$로 돌아오는 $T<t\leq 2T$에서 'ΔT_{max}를 빛의 주기로 나눈 값을 넘지 않는 최대 정수' 만큼의 횟수가 추가되므로 보강 간섭이 나타나는 전체 횟수는

$$N=2\times\left[\frac{2LV^2}{\lambda(c^2-V^2)}\right]+1\ (단,\ [A]는\ A를\ 넘지\ 않는\ 최대\ 정수)$$

채점기준

- 실험계가 θ만큼 회전한 상태에서 광경로나 시간차의 계산을 시도하면 **+2점**
- 실험계가 θ만큼 회전한 상태일 때 거울 경로의 소요 시간을 바르게 계산하면 **+2점** (속도의 식만 쓰면 절반 점수)
- 두 거울 경로 시간 차이의 최댓값과 최솟값을 바르게 계산하면 각각 **+2점**
- $\theta=45°$에서 항상 보강 간섭하는 것을 언급하면 **+2점**
- 두 거울 경로 시간 차이의 최댓값을 빛의 주기로 나눠 보강 간섭이 나타나는 횟수를 계산하면 **+2점**
- 제시한 최종 답안이 정확하면 **+3점**
- 계산된 출력 횟수에서 두 배 계산, 최대 정수 계산, +1 고려 등만 빠지면 각각 **-1점**

※ 논리 전개가 맞으면 계산이 틀려도 항목 별로 2-3점 수준의 부분 점수를 부여할 수 있음.

※ 답안의 완성도 수준에 따라 항목 별로 ±0.5점 부여할 수 있음 (최대 점수 이내).

화학

1. 출전 및 출제의도

제시문 출전

[문제 4] **제시문**

화학 I, ㈜미래엔(2020), 최미화 외 5인, p.36-41, 164-169 / 화학 I, ㈜천재교육(2020), 노태희 외 6인, p.30-36, 173-177
화학 I, ㈜교학사(2020), 홍훈기 외 6인, p.39-44, 161-168 / 화학 I, ㈜비상교육(2020), 박종석 외 7인, p.34-39, 159-161
화학 I, ㈜와이비엠(2020), 강대훈 외 3인, p.47-53, 185-187 / 화학 I, 동아출판㈜(2020), 황성용 외 3인, p.39-43, 175-178
화학 I, ㈜지학사(2019), 이상권 외 7인, p.34-39, 175-178 / 화학 I, ㈜금성출판사(2019), 하윤경 외 5인, p.34-38, 162-165
화학 II, ㈜교학사(2020), 홍훈기 외 6인, p.26-27, 136-142 / 화학 II, ㈜상상아카데미(2020), 장낙한 외 9인, p.27-30, 151-154
화학 II, ㈜천재교육(2019), 노태희 외 6인, p.21-22, 142-146 / 화학 II, ㈜지학사(2019), 이상권 외 7인, p.23-24, 150-153
화학 II, ㈜미래엔(2020), 최미화 외 5인, p.26-27, 144-147 / 화학 II, ㈜비상교육(2020), 박종석 외 7인, p.18-19, 123-125

출제의도

[문제 4] 본 논술고사에서는 고등학교 '화학 I'과 '화학 II' 교육과정에 포함된 기본 개념의 통합적인 이해도 및 과학적 사고력을 평가하기 위한 문제를 다루며 화학 반응에서의 양적 관계, 산·염기의 중화 반응, 혼합 기체의 부분 압력 법칙, 반응 속도 및 반감기 등 고교 화학 교과 과정에서 핵심적으로 다루어지고 있는 다양한 내용을 명확하게 이해하고 통합적으로 사고할 수 있는지 물어보고자 한다. 산·염기 중화 반응을 화학 반응식으로 나타낼 수 있고, 화학 반응에서의 양적 관계를 이용하여 중화 반응에서의 전체 이온의 변화량을 이해하여야 한다. 또한, 반응물과 생성물이 모두 기체이고 반감기가 주어진 1차 반응에서, 시간에 따른 반응물과 생성물의 양을 분석적으로 이해하고 혼합 기체의 부분 압력 법칙과 연계지어 화학 반응식을 완성할 수 있어야 한다.

[문제 4-1] 산과 염기의 중화 반응에서 물이 생성된다는 것을 알고, 중화 반응에서의 양적 관계를 이용하여 전체 이온의 양이 어떻게 변화할지 분석하고 이해하는지 물어보는 문제이다. 강산에 강염기를 조금씩 넣어주는 경우, 중화점 전과 후로 넣어준 염기의 부피에 따른 전체 이온의 양이 변화하는 정도가 달라진다는 것을 이해하여 중화점을 찾아내어야 한다. 그리고 중화점에서 수소 이온의 농도와 수산화 이온의 농도가 같다는 것을 알고, 이를 바탕으로 산과 염기의 농도를 계산할 수 있어야 한다.

[문제 4-2] 1차 반응이면서 반응물과 생성물이 모두 기체인 화학 반응에서, 1차 반응의 반응 속도와 혼합 기체의 부분 압력 법칙을 연계지어 통합적으로 사고할 수 있는지 물어보는 문제이다. 1차 반응의 경우 반감기가 지날 때마다 반응물이 반씩 줄어든다는 것을 알고, 이를 이용하여 시간에 따른 반응물과 생성물의 양적 관계를 도출해 낼 수 있어야 한다. 또한, 반응물을 반응 도중 첨가한 경우에 반응물과 생성물의 양이 각각 어떻게 변화하는지 반감기와 화학 반응의 양적 관계를 이용하여 구해보고, 이를 부분 압력 법칙으로 구한 생성물의 몰 분율과 연계지어 문제에서 주어진 화학 반응식을 완성할 수 있어야 한다.

2. 예시답안 및 채점기준

[문제 4-1] 예시답안

- $HCl(aq)$과 $X(OH)_n(aq)$의 중화 반응에 대한 화학 반응식은 다음과 같다.

$$nHCl(aq) + X(OH)_n(aq) \rightarrow nH_2O(l) + X^{n+}(aq) + nCl^-(aq)$$

- 중화점 전에는 넣어준 $X(OH)_n$ 하나당 1개의 X^{n+}과 n개의 OH^-이 생기고, n개의 H_2O이 생성되면서 n개의 H^+과 n개의 OH^-이 사라진다. 따라서 넣어준 $X(OH)_n$ 하나당 총 이온 수의 변화량($\triangle N_{전}$)은 $(1+n)-(n+n)=\underline{1-n}$이다.
  반면, 중화점 후에는 넣어준 $X(OH)_n$ 하나당 1개의 X^{n+}과 n개의 OH^-이 생기고, H_2O이 더 이상 생성되지 않기 때문에 사라지는 이온은 없다. 따라서 넣어준 $X(OH)_n$ 하나당 총 이온 수의 변화량($\triangle N_{후}$)은 $(1+n)-0=\underline{1+n}$이다.

- 문제에서 주어진 그래프로부터 중화점 전과 후에서 넣어준 $X(OH)_n$ 1몰당 총 이온 수의 변화량은 다음과 같다.

  전: 넣어준 $X(OH)_n$ 1몰당 총 이온 수의 변화량$=\dfrac{-a\,\text{몰}}{[X(OH)_n]\times 0.475\,\text{L}}$

  후: 넣어준 $X(OH)_n$ 1몰당 총 이온 수의 변화량$=\dfrac{6a\,\text{몰}}{[X(OH)_n]\times(1.425-0.475)\,\text{L}}$

  $=\dfrac{3a\,\text{몰}}{[X(OH)_n]\times 0.475\,\text{L}}$

  즉, 같은 몰수의 $X(OH)_n$이 추가될 때 중화점 전에는 총 이온 수가 감소하고, 중화점 후에는 총 이온 수가 증가하는데 그 변화량이 중화점 후가 중화점 전에 비교하여 3배 크다는 것을 알 수 있다.

  따라서 $\dfrac{\triangle N_{후}}{\triangle N_{전}}=\dfrac{1+N}{1-N}=-3$이고, 이 식을 풀면 $n=2$임을 알 수 있으므로 넣어준 $\underline{\text{강염기의 화학식은 } X(OH)_2}$이다.

- P 지점에서의 pH가 13이므로 $[H^+]=10^{-13}\,\text{mol/L}$이고, $[OH^-]=\dfrac{10^{-14}}{[H^+]}=0.1\,\text{mol/L}$이다.

  P 지점에서의 용액의 부피는 $V_p=V_{HCl}+V_{X(OH)_2}=50\,\text{mL}+950\,\text{mL}=1000\,\text{mL}$이므로, 이때 OH^-의 몰수는 다음과 같다.

$$n_{OH^-}=[OH^-]\times V_p=0.1\,\text{mol/L}\times 1\,\text{L}=0.1\,\text{mol}$$

  중화점까지 추가된 OH^-은 중화 반응으로 사라지기 때문에, 중화점에서부터 P 지점까지 추가된 OH^-의 몰수가 0.1 mol이라고 할 수 있다. 이때 들어간 $X(OH)_2(aq)$의 부피는 $950-475=475\,\text{mL}$이므로 $X(OH)_2(aq)$에는 부피 475 mL당 0.1 mol의 OH^-이 존재한다.

  한편, 중화점까지 $X(OH)_2(aq)$는 475 mL가 들어갔기 때문에 중화된 OH^-의 몰수가 0.1 mol이라는 것을 알 수 있다. 이는 초기에 존재한 H^+의 몰수와 같다. 따라서 $HCl(aq)$의 초기 몰 농도를 xM이라고 할 때, 다음의 식이 성립한다.

$$x\text{M}\times 0.05\,\text{L}=0.1\,\text{mol}$$

  위 식을 풀면 $x=2$라는 것을 알 수 있으므로 $\underline{HCl(aq)\text{의 초기 농도는 } 2\text{M}}$이다.

- $X(OH)_2(aq)$의 몰 농도를 yM이라고 할 때 중화점에서 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$n_{HCl}M_{HCl}V_{HCl}=n_{X(OH)_2}M_{X(OH)_2}V_{X(OH)_2}$$

$$1\times 2\,\text{M}\times 0.05\,\text{L}=2\times y\text{M}\times 0.475\,\text{L} \qquad \therefore y=\frac{2}{19}$$

  따라서 넣어준 $\underline{X(OH)_2(aq)\text{의 농도는 } \frac{2}{19}\text{M}}$이다.

채점기준

1. 중화점 전후의 전체 이온 수의 변화량을 고려하여 $n=2$임을 보이면 **+7점**
2. 염산의 초기 농도가 2 M임을 바르게 구하면 **+4점**
3. 넣어준 염기의 농도가 $\frac{2}{19}$ M임을 바르게 구하면 **+4점**

※ 계산을 잘못하면 -1점

※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 15점 이내에서 ±2점 추가 점수 부여 가능함

[문제 4-2] 예시답안

▶ 풀이 과정의 편의를 위해 주어진 반응식을 아래와 같이 변형한다.

$a\,\mathrm{A}(g) + b\,\mathrm{B}(g) \rightarrow c\,\mathrm{C}(g)$

$\mathrm{A}(g) + b'\,(\mathrm{B})(g) \rightarrow c'\,\mathrm{C}(g) \quad (b'=\frac{b}{a},\ c'=\frac{c}{a})$

▶ 각 실험에서 시간에 따라 변화하는 A, B, C의 몰 농도와 A의 몰 분율은 다음과 같다.

		$\mathrm{A}(g)$	+	$b'\,\mathrm{B}(g)$	⟶	$c'\,\mathrm{C}(g)$	A의 몰분율
실험 I	반응 전 (M)	8		30		0	
	변화량 (M)	-4		$-4b'$		$+4c'$	
	10초 후 (M)	4		$30-4b'$		$4c'$	$\frac{4}{34-4b'+4c'}$
실험 II	반응 전 (M)	16		30		0	
	변화량 (M)	-8		$-8b'$		$+8c'$	
	10초 후 (M)	8		$30-8b'$		$8c'$	$\frac{8}{38-8b'+8c'}$

실험 I, II에서 10초가 지난 후 A의 몰 분율은 각각 $\frac{2}{15}$, $\frac{4}{15}$이다. 이를 이용하면 모든 실험에서 $b'-1=c'$ (혹은 $b-a=c$)의 관계식이 얻어지는 것을 알 수 있다.

▶ 새로운 식 $\mathrm{A}(g) + b'\mathrm{B}(g) \rightarrow (b'-1)C(g)$를 이용해 문제에서 묻고 있는 실험 I의 진행 상황에 따라 반응물과 생성물의 농도 변화를 표시하면 다음과 같다.

	$\mathrm{A}(g)$	+	$b'\,\mathrm{B}(g)$	⟶	$(b'-1)\mathrm{C}(g)$
반응 전 (M)	8		30		0
변화량 (M)	-4		$-4b'$		$+4(b'-1)$
10초 후 (M)	4		$30-4b'$		$4(b'-1)$
변화량 (M)	-2		$-2b'$		$+2(b'-1)$
20초 후 (M)	2		$30-6b'$		$6(b'-1)$
A, B, x mol씩 첨가 (M)	$+2x$		$+2x$		
첨가 후 (M)	$2(1+x)$		$30-6b'+2x$		$6(b'-1)$
변화량 (M)	$-(1+x)$		$-b'(1+x)$		$+(b'-1)(1+x)$
30초 후 (M)	$(1+x)$		$30-6b'+2x-b'(1+x)$		$6(b'-1)+(b'-1)(1+x)$

반응을 시작한지 10초가 되었을 때 A의 농도는 4 M이고, 이때 A의 몰분율은 $\frac{2}{15}$이므로 전체 농도는 30 M이 된다.

반응을 시작한지 30초가 되었을 때 A, B, C의 전체 농도는 다음과 같다.

$$(1+x)+\{30-6b'+2x-b'(1+x)\}+\{6(b'-1)+(b'-1)(1+x)\}=24+2x$$

10초에서의 전체 압력과 30초에서의 전체 압력이 같다고 했기 때문에 일정 온도에서 10초에서의 전체 농도와 30초에서의 전체 농도가 같다고 할 수 있다. 즉, $30=24+2x$가 된다.

따라서 20초에 첨가해 준 몰수 x는 3 mol이다.

▶ $x=3$을 넣어 30초에서의 반응물과 생성물의 양을 정리하면 다음과 같다.

	$\mathrm{A}(g)$	+	$b'\,\mathrm{B}(g)$	⟶	$(b'-1)\mathrm{C}(g)$
30초 후 (M)	$1+3=4$		$30-6b'+2\times3-b'(1+3)=36-10b'$		$6(b'-1)+(b'-1)(1+3)=10b'-10$

30초에서의 전체 농도가 30 M이기 때문에, C의 몰 분율은 $\frac{10b'-10}{30}=\frac{b'-1}{3}$이다.

이때 전체 압력은 $P=\frac{n}{V}RT=30\,\mathrm{M}\times 0.08\,\mathrm{atm}\cdot\mathrm{L}/(\mathrm{mol}\cdot\mathrm{K})\times 300\,\mathrm{K}=720\,\mathrm{atm}$이고, C의 압력이 120 atm으로 주어졌기 때문에 부분 압력 법칙을 이용하여 C의 몰 분율을 구하면 다음과 같다.

$$X_C=\frac{P_C}{P}=\frac{120\,\mathrm{atm}}{720\,\mathrm{atm}}=\frac{1}{6}$$

따라서 $\frac{b'-1}{3}=\frac{1}{6}$의 관계가 성립하므로 $b'=1.5$가 얻어지고, $c'=b'-1$이므로 $c'=0.5$가 얻어진다.

따라서 문제에서 주어진 화학 반응식을 완성하면 다음과 같다.

$$\mathrm{A}(g)\ +\ b'\,\mathrm{B}(g)\ \rightarrow\ c'\,\mathrm{C}(g)$$
$$\mathrm{A}(g)\ +\ 1.5\,\mathrm{B}(g)\ \rightarrow\ 0.5\,\mathrm{C}(g)$$
$$2\,\mathrm{A}(g)\ +\ 3\,\mathrm{B}(g)\ \rightarrow\ \mathrm{C}(g)$$

채점기준

1. 1차 반응의 시간에 따른 농도 변화를 이해하여 반응 계수 a, b, c 간의 관계를 바르게 제시하면 **+5점** (실험 Ⅰ, Ⅱ 중 하나만 사용해도 무방함)
2. 1차 반응의 양적 관계를 이해하여 첨가해준 몰수 x를 바르게 계산하면 **+6점**
3. 부분 압력 법칙으로 구한 C의 몰 분율을 이용하여 화학 반응식을 바르게 완성하면 **+4점**

※ 계산을 잘못하면 -1점.

※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 15점 이내에서 ±2점 추가 점수 부여 가능함.

자연계열 Ⅲ(3교시) 문제

수학

[문제 1] 주사위를 네 번 던지는 실험을 할 때, 처음으로 6의 눈이 나올 때까지 던졌던 횟수를 확률변수 X로 정의한다. 만약 네 번 던지는 동안 6의 눈이 나오지 않는 경우는, $X=5$로 정의한다. 예를 들어, 주사위의 눈이 순서대로 4, 1, 6, 2로 나오면 $X=3$이 된다. 주사위를 두 번째 던졌을 때 처음으로 5의 눈이 나왔다고 하자. 이때 X의 기댓값을 구하시오. [20점]

[문제 2] 다음을 읽고 문제에 답하시오.

- 함수 $f(x)$가 $x=c$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(c, f(c))$에서의 접선의 방정식은 $y-f(c)=f'(c)(x-c)$이다.
- 직선 $y=mx+n$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라고 하면 $\tan\theta=m$이다.
- 각 α와 β에 대하여 다음 식이 성립한다.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

- 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고 극값을 가지면 $f'(a)=0$이다.

[문제 2-1] 좌표평면 위의 원 $(x-1)^2+y^2=1$과 원 $x^2+y^2=t^2$의 교점 중 $y\geq 0$인 점을 $\mathrm{P}(t)$라고 하자. 점 $\mathrm{P}(t)$에서 두 원의 접선이 이루는 각을 $\theta(t)$라고 할 때, 정적분의 $\int_{\sqrt{2}}^{2}\{\tan\theta(t)\}^2dt$값을 구하시오. (단, $\sqrt{2}\leq t\leq 2$이고 $0\leq\theta(t)\leq\frac{\pi}{2}$이다.) [10점]

[문제 2-2] 반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 이등변 삼각형 ABC가 있다. $\overline{\mathrm{BC}}=x$이고 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}=y$라 할 때, x^3e^{-2y}의 최댓값을 구하시오. [15점]

[문제 3] 다음을 읽고 문제에 답하시오.

- 함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(x) \geq 0$이면, 정적분 $\int_a^b f(x)dx$는 곡선 $y=f(x)$, 직선 $x=a$, 직선 $x=b$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 나타낸다.

- 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $x=g(t)$로 놓으면, 다음 식이 성립한다.

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$$

- 수열 $\{a_k\}$, $\{b_k\}$와 상수 c에 대하여, 다음 식이 성립한다.

$$\sum_{k=0}^{n}(ca_k + b_k) = c\sum_{k=0}^{n}a_k + \sum_{k=0}^{n}b_k$$

[문제 3-1] 두 곡선 $y=x^4$과 $y=\frac{2}{1+x^2}$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오. [10점]

[문제 3-2] $a_0=3$이고 자연수 k에 대하여 $a_k=3-k$인 수열이 있다. 음이 아닌 정수 n에 대하여 $b_n=\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}a_k$라 할 때, b_n의 최솟값을 구하시오. [15점]