◆ 문항카드9 (자연계열(오후2)_1번 문항)

[한양대학교 문항정보]

1. 일반 정보

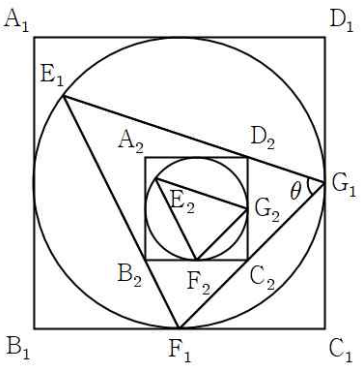
유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(오후2)(수학) / 문제 1번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학 I , 미적분, 기하
	핵심개념 및 용어	내분점, 점과 직선 사이의 거리, 경우의 수, 등비급수, 사인법칙, 삼각함수의 덧셈정리, 직선과 평면의 위치 관계, 정사영
예상 소요 시간	45분	

2. 문항 및 제시문

[문제 1] 다음 물음에 답하시오. (50점)

1. 좌표평면 위에 있는 5개의 점 $\mathrm{P}_1(-6,-3)$, $\mathrm{P}_2(-6,3)$, $\mathrm{P}_3(-3,6)$, $\mathrm{P}_4(6,3)$, $\mathrm{P}_5(6,-3)$ 중에서 서로 다른 3개를 선택하여 그 점들을 꼭짓점으로 하는 삼각형을 만들 때, 그 삼각형의 무게중심과 직선 $y=-2x+30$ 사이의 거리가 $6\sqrt{5}$ 이하가 되는 경우의 수를 구하시오.

2. 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1\mathrm{D}_1$에 대하여 선분 $\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$의 중점을 F_1, 선분 $\mathrm{C}_1\mathrm{D}_1$의 중점을 G_1이라 하자.



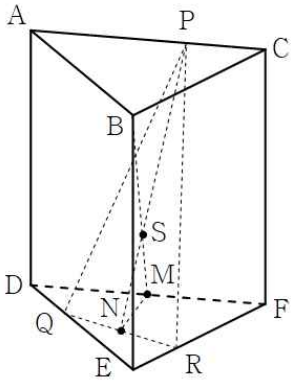
정사각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1\mathrm{D}_1$에 내접하는 원 위의 점 E_1에 대하여 $\theta=\angle \mathrm{E}_1\mathrm{G}_1\mathrm{F}_1$이라 할 때, $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$를 만족시킨다.

세 점 B_2, C_2, D_2는 각각 선분 $\mathrm{E}_1\mathrm{F}_1$, $\mathrm{F}_1\mathrm{G}_1$, $\mathrm{E}_1\mathrm{G}_1$ 위의 점이며, 두 직선 $\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$과 $\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2$가 서로 평행하고 두 직선 $\mathrm{C}_1\mathrm{D}_1$과 $\mathrm{C}_2\mathrm{D}_2$가 서로 평행하며, 사각형 $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2\mathrm{D}_2$는 정사각형이다. 정사각형 $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2\mathrm{D}_2$에도 같은 방법을 적용하여, 선분 $\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2$의 중점을 F_2, 선분 $\mathrm{C}_2\mathrm{D}_2$의 중점을 G_2라 하자. 정사각형 $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2\mathrm{D}_2$에 내접하는 원 위의 점 E_2는 $\angle \mathrm{E}_1\mathrm{G}_1\mathrm{F}_1=\angle \mathrm{E}_2\mathrm{G}_2\mathrm{F}_2$를 만족시킨다. 이와 같은 과정을 반복하여 정사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$과 세 점 E_n, F_n, G_n $(n\geq 3)$을 얻을 수 있다.

모든 자연수 n에 대하여 정사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$의 넓이를 S_n이라 하자.

$\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$일 때 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 합을 구하시오.

3. $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{DE} = \overline{EF} = 3$, $\angle ABC = \angle DEF = \frac{\pi}{2}$, $\overline{AD} = 6$인 삼각기둥 $ABC-DEF$가 있다. 점 P는 선분 AC를 $2:1$로 내분하는 점이고, 점 M은 선분 DF의 중점이다. 선분 DE 위의 점 Q는 $\overline{EQ} = t$ $(0 < t < 3)$, 선분 EF 위의 점 R은 $\overline{ER} = 3-t$를 만족시킨다.
직선 BM이 평면 PQR과 만나는 점을 S라 할 때, $\overline{BS} : \overline{SM} = 2:1$이다. 점 N은 직선 PS와 직선 QR의 교점이다. 직선 MN과 직선 QR이 서로 수직일 때, 평면 PQR이 평면 DEF와 이루는 예각의 크기 θ에 대하여 $\cos\theta$의 값을 구하시오.



3. 출제 의도

자연계열 오후(2)의 [문제 1]은 고교수학 과정 중 "수학 - 도형의 방정식" 단원의 점과 직선 사이의 거리, "수학 - 경우의 수" 단원의 경우의 수, "미적분 - 수열의 극한" 단원의 등비급수, "미적분 - 미분법" 단원의 삼각함수의 덧셈정리, "기하 - 공간도형" 단원의 직선과 평면의 위치 관계와 정사영이 주요 내용이며, 고교과정 동안 학습한 내용을 토대로 논리적 사고를 통해 문제가 요구하는 답을 구할 수 있는지 묻고 있다. 하위 문항에 대한 출제 의도는 [5. 문항 해설] 항목의 내용과 같다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	**학습내용 성취 기준**
문제 1-1	**수학 - (2) 기하 - ① 평면좌표** [10수학02-02] 선분의 내분과 외분을 이해하고, 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있다. **수학 - (2) 기하 - ② 직선의 방정식** [10수학02-05] 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다. **수학 - (5) 확률과 통계 - ① 경우의 수** [10수학05-01] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.
문제 1-2	**수학 I - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수** [12수학 I 02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. **미적분 - (2) 미분법 - ① 여러 가지 함수의 미분** [12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. **미적분 - (1) 수열의 극한 - ② 급수** [12미적01-06] 등비급수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.
문제 1-3	**수학 I - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수** [12수학 I 02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. **기하 - (3) 공간도형과 공간좌표 - ① 공간도형** [12기하03-01] 직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면의 위치 관계에 대한 간단한 증명을 할 수 있다. [12기하03-03] 정사영의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	배종숙 외	금성출판사	2020	135~138
	수학	이준열 외	천재교육	2024	113~118, 263~266
	수학 I	권오남 외	교학사	2025	97~104
	미적분	고성은 외	좋은책 신사고	2021	32~36
	미적분	홍성복 외	지학사	2024	61~66
	기하	황선욱 외	미래엔	2021	123~129
	기하	권오남 외	교학사	2021	132~135

5. 문항 해설

문항 1은 점과 직선 사이의 거리 공식을 이용하여 조건을 만족하는 경우의 수를 셀 수 있는지 묻는다.

문항 2는 삼각형의 닮음 성질과 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 주어진 등비급수의 공비를 계산하고 이를 이용해 등비급수의 합을 구할 수 있는지 묻는다.

문항 3은 공간에서 직선과 평면의 위치 관계, 도형의 넓이와 그 정사영의 넓이 사이의 관계를 이용하여 주어진 두 평면의 이면각의 크기를 구할 수 있는지 묻는다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점	
1	삼각형을 구성하는 세 점의 무게중심의 좌표를 모두 구하였는가?	10	20
	조건에 맞는 경우의 수를 모두 구하였는가?	10	
2	삼각형 $\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2\mathrm{F}_1$와 $\mathrm{G}_1\mathrm{C}_2\mathrm{D}_2$이 닮음을 보였는가?	15	40
	정사각형 $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2\mathrm{D}_2$의 한 변의 길이와 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 합을 구하였는가?	25	
3	조건을 만족하는 t의 값을 구하였는가?	20	40
	$\cos\theta$의 값을 구하였는가?	20	

7. 예시 답안 혹은 정답

1. 삼각형의 무게중심이 (a, b)일 때, 점 (a, b)에서 직선 $2x + y - 30 = 0$ 까지의 거리는 $\frac{|2a+b-30|}{\sqrt{2^2+1^2}}$이다. $\frac{|2a+b-30|}{\sqrt{2^2+1^2}} \leq 6\sqrt{5}$일 필요충분조건은 $|2a+b-30| \leq 30$이다.

선택된 세 점 A, B, C와 이 점들로 만들어진 삼각형의 무게중심 (a, b)와 $|2a+b-30|$의 값은 다음과 같다.

점 A	$(-6, -3)$	$(-6, -3)$	$(-6, -3)$	$(-6, -3)$	$(-6, -3)$	$(-6, -3)$
점 B	$(-6, 3)$	$(-6, 3)$	$(-6, 3)$	$(-3, 6)$	$(-3, 6)$	$(6, -3)$
점 C	$(-3, 6)$	$(6, -3)$	$(6, 3)$	$(6, -3)$	$(6, 3)$	$(6, 3)$
무게중심 (a, b)	$(-5, 2)$	$(-2, -1)$	$(-2, 1)$	$(-1, 0)$	$(-1, 2)$	$(2, -1)$
$\|2a+b-30\|$	38	35	33	32	30	27

점 A	$(-6, 3)$	$(-6, 3)$	$(-6, 3)$	$(-3, 6)$
점 B	$(-3, 6)$	$(-3, 6)$	$(6, -3)$	$(6, -3)$
점 C	$(6, -3)$	$(6, 3)$	$(6, 3)$	$(6, 3)$
무게중심 (a, b)	$(-1, 2)$	$(-1, 4)$	$(2, 1)$	$(3, 2)$
$\|2a+b-30\|$	30	28	25	22

그러므로 $|2a+b-30| \leq 30$를 만족하는 총 경우의 수는 6이다.

답: 6

2. 각 $\mathrm{F_1E_1G_1}$은 호 $\mathrm{F_1G_1}$에 대한 원주각이므로 $\angle \mathrm{F_1E_1G_1} = \frac{\pi}{4}$이다.

삼각형 $\mathrm{E_1F_1G_1}$에서 $\angle \mathrm{E_1F_1G_1} = \frac{3\pi}{4} - \theta$이고 삼각형 $\mathrm{C_1F_1G_1}$에서 $\overline{\mathrm{C_1F_1}} = \overline{\mathrm{C_1G_1}}$

이므로 $\angle \mathrm{C_1F_1G_1} = \frac{\pi}{4}$이다. 그러므로 $\angle \mathrm{B_1F_1E_1} = \theta$이다.

두 직선 $\mathrm{B_1C_1}$과 $\mathrm{B_2C_2}$가 평행하므로 $\angle \mathrm{C_2B_2F_1} = \angle \mathrm{B_1F_1E_1} = \theta$,

$\angle \mathrm{B_2C_2F_1} = \angle \mathrm{C_1F_1C_2} = \frac{\pi}{4}$이다.

또한, 두 직선 $\mathrm{C_1D_1}$과 $\mathrm{C_2D_2}$가 평행하므로 $\angle \mathrm{D_2C_2G_1} = \angle \mathrm{C_1G_1C_2} = \frac{\pi}{4}$이다.

그러므로 두 삼각형 $\mathrm{B_2C_2F_1}$과 $\mathrm{G_1C_2D_2}$는 서로 닮음이다.

$\overline{\mathrm{C_2F_1}} = a$라 하면 $\overline{\mathrm{C_2G_1}} = \sqrt{2} - a$이고, 정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$의 한 변의 길이를 r이라 하면 두 삼각형 $\mathrm{B_2C_2F_1}$과 $\mathrm{G_1C_2D_2}$는 서로 닮음이므로

$\overline{\mathrm{C_2D_2}} : \overline{\mathrm{C_2G_1}} = \overline{\mathrm{C_2F_1}} : \overline{\mathrm{C_2B_2}} \Leftrightarrow r : (\sqrt{2} - a) = a : r \Leftrightarrow r^2 = a(\sqrt{2} - a)$이다.

삼각형 $\mathrm{B_2C_2F_1}$에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{C_2F_1}}}{\sin\angle \mathrm{C_2B_2F_1}} = \frac{\overline{\mathrm{B_2C_2}}}{\sin\angle \mathrm{B_2F_1C_2}} \Leftrightarrow \frac{a}{\sin\theta} = \frac{r}{\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \theta\right)}$$ 이다.

사인함수의 덧셈정리에 의하여 $r = a\dfrac{\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin\theta} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a(1+\cot\theta)$이다.

a와 r이 만족시키는 두 식으로부터 $a = \dfrac{2\sqrt{2}}{(1+\cot\theta)^2+2}$, $r = \dfrac{2(1+\cot\theta)}{(1+\cot\theta)^2+2}$이다.

$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$이므로 $\cot\theta = \dfrac{1}{2}$, $r = \dfrac{12}{17}$이고,

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$은 첫째항이 4, 공비가 $\dfrac{r^2}{4}$인 등비급수이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \dfrac{4}{1-\dfrac{r^2}{4}} = \dfrac{1156}{253}$이다.

답: $\dfrac{1156}{253}$

3. 두 직선 BM과 PN은 점 S에서 만나므로 두 직선은 하나의 평면을 결정한다.
두 직선 BP와 MN은 한 평면 위에 있으면서 서로 평행한 두 평면 ABC와 DEF에 각각 포함되어 있으므로, 이 두 직선은 서로 평행하다. 점 P에서 평면 DEF에 내린 수선의 발을 P′이라 하면 두 직선 EP′과 MN도 서로 평행하며 두 직선 EP′과 QR은 서로 수직이다.
그러므로 점 P′에서 선분 EF에 내린 수선의 발을 H라 하면,
두 삼각형 P′EH와 RQE는 서로 닮음임을 알 수 있다.
점 P′은 선분 DF를 2 : 1로 내분하므로 $\overline{\mathrm{P'F}} = \sqrt{2}$이며 $\overline{\mathrm{P'H}} = \overline{\mathrm{HF}} = 1$이고
따라서 $\overline{\mathrm{EH}} = 2$이다.
그러므로 $\overline{\mathrm{EQ}}:\overline{\mathrm{ER}} = \overline{\mathrm{EH}}:\overline{\mathrm{P'H}} \Leftrightarrow t:(3-t) = 2:1$이고 $t = 2$이다.
$\overline{\mathrm{ER}} = 1$이므로 $\overline{\mathrm{RH}} = 1$, $\overline{\mathrm{P'R}} = \sqrt{2}$이고 $\overline{\mathrm{PR}} = \sqrt{\overline{\mathrm{PP'}}^2 + \overline{\mathrm{P'R}}^2} = \sqrt{38}$이다.
점 P′에서 선분 EQ에 내린 수선의 발은 선분 EQ의 중점이 되므로
$\overline{\mathrm{P'Q}} = \overline{\mathrm{P'E}} = \sqrt{5}$이고 $\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{\overline{\mathrm{PP'}}^2 + \overline{\mathrm{P'Q}}^2} = \sqrt{41}$이다.
삼각형 PQR에서 코사인법칙에 의하여 $\cos\angle\mathrm{QPR} = \dfrac{41+38-5}{2\sqrt{41}\times\sqrt{38}} = \dfrac{37}{\sqrt{1558}}$이므로

$\sin\angle\mathrm{QPR} = \dfrac{3\sqrt{21}}{\sqrt{1558}}$이다.

즉, 삼각형 PQR의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{PR}}\times\sin\angle\mathrm{QPR} = \dfrac{3\sqrt{21}}{2}$이다.
삼각형 PQR의 평면 DEF 위로의 정사영은 삼각형 P′QR이고 삼각형 P′QR의 넓이는 (삼각형 DEF의 넓이)−(삼각형 DQP′의 넓이)−(삼각형 QER의 넓이)−(삼각형 P′RF의 넓이)
$= \dfrac{9}{2} - 1 - 1 - 1 = \dfrac{3}{2}$이다. 따라서 $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{21}}{21}$이다.

답: $\dfrac{\sqrt{21}}{21}$

◆ 문항카드10 (자연계열(오후2)_2번 문항)

[한양대학교 문항정보]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(오후2)(수학) / 문제 2번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학 I , 수학II, 미적분, 기하
	핵심개념 및 용어	삼차방정식, 평행이동, 대칭이동, $\sum_{k=1}^{n} a_k$, 연속, 불연속, 닫힌구간, 열린구간, $[a, b]$, (a, b), 미분가능, $f'(x)$, 증가, 감소, 평면벡터, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, 위치벡터, 벡터의 성분
예상 소요 시간	45분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2] 다음 물음에 답하시오. (50점)

1. 자연수 n $(n \geq 3)$에 대하여 닫힌구간 $[0, 1]$에서 정의된 함수

$f(x) = \dfrac{(1+x)^n + (1-x)^n}{1+x^n}$ 의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

2. $k > 1$인 실수 k에 대하여 함수 $f(x) = -x^3 + \left(\dfrac{1}{k} + 1\right)x^2 - \left(\dfrac{1}{k} + 1\right)x$ 가 있고,

$0 \leq s \leq 1$인 실수 s에 대하여

두 점 $\mathrm{A}(\sqrt[8]{1-s^8}, s)$와 $\mathrm{B}(\sqrt[8]{1-(f(s))^8}, f(s))$가 있다.

$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}})$인 점 $\mathrm{M}(g(s), h(s))$가

$(g(s))^8 + (h(s))^8 \geq 1 - \dfrac{1}{k^8}$을 만족시킬 때,

$\left\{\sqrt[8]{1-s^8} - \sqrt[8]{1-(f(s))^8}\right\}^8 + \{s - f(s)\}^8$의 최댓값을 구하시오.

(단, O는 원점이다.)

3. 자연수 n에 대하여 함수 $g(x)$는 $g(x) = \begin{cases} x^2 + 2nx + n^2 + 2 & (x \leq 0) \\ x^2 - 6nx + n^2 + 2 & (x > 0) \end{cases}$이다.

다음 조건을 만족시키는 양수 k를 a_n이라 하자.

> 실수 s에 대하여 곡선 $y = |g(x) + k|$와 직선 $y = s$의 교점의 개수를 $h(s)$라 하자.
> 함수 $h(s)$가 $s = p$에서 불연속이 되도록 하는 실수 p의 개수는 2이다.

$\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값을 구하시오.

3. 출제 의도

자연계열(오후2)의 [문제 2]는 고등학교 〈수학〉에서 다루는 이차방정식과 이차함수, 여러 가지 방정식 그리고 도형의 이동, 고등학교 〈수학I〉에서 다루는 수열의 합, 고등학교 〈수학II〉, 〈미적분〉에서 다루는 함수의 연속, 도함수의 활용 그리고 여러 가지 미분법 및 고등학교 〈기하〉에서 다루는 위치벡터 그리고 평면벡터의 성분에 대한 전반적인 지식에 대하여 평가하며, 모든 교과서에서 공통으로 다루는 내용을 바탕으로 출제하였다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	**학습내용 성취 기준**
문제 2-1	**수학II – (1) 함수의 극한과 연속 – 2 함수의 연속** [12수학II01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. **수학II – (2) 미분 – 3 도함수의 활용** [12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. **미적분 – (2) 미분법 – 2 여러 가지 미분법** [12미적02-06] 함수의 몫을 미분할 수 있다. [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다.
문제 2-2	**수학 – (1) 문자와 식 – 5 이차방정식과 이차함수** [10수학01-09] 이차방정식과 이차함수의 관계를 이해한다. **수학 – (1) 문자와 식 – 6 여러 가지 방정식과 부등식** [10수학01-12] 간단한 삼차방정식과 사차방정식을 풀 수 있다. **수학II – (2) 미분 – 2 도함수** [12수학II02-04] 함수 $y=x^n$(n은 양의 정수)의 도함수를 구할 수 있다. [12수학II02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다. **수학II – (2) 미분 – 3 도함수의 활용** [12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. **기하 – (2) 평면벡터 – 2 평면벡터의 성분과 내적** [12기하02-03] 위치벡터의 뜻을 알고, 평면벡터와 좌표의 대응을 이해한다.
문제 2-3	**수학 – (1) 문자와 식 – 5 이차방정식과 이차함수** [10수학01-11] 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다. **수학 – (2) 기하 – 4 도형의 이동** [10수학02-08] 평행이동의 의미를 이해한다. [10수학02-09] 원점, x축, y축, 직선 $y=x$에 대한 대칭이동의 의미를 이해한다. **수학I – (3) 수열 – 2 수열의 합** [12수학I03-05] 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. **수학II – (1) 함수의 극한과 연속 – 2 함수의 연속** [12수학II01-03] 함수의 연속의 뜻을 안다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	권오남 외	교학사	2025	144~148
	수학	이준열 외	천재교육	2024	63~66, 67~70
	수학	황선욱 외	미래엔	2020	83~85
	수학 I	류희찬 외	천재교과서	2023	140~145
	수학II	배종숙 외	금성출판사	2023	33~36
	수학II	고성은 외	좋은책신사고	2020	80~86
	수학II	권오남 외	교학사	2024	37~41, 68~70, 71~74,
	미적분	김원경 외	비상교육	2022	75~78, 79~84
	기하	황선욱 외	미래엔	2021	87~90, 91~95

5. 문항 해설

문항 1은 함수 $f(x)$가 열린구간 $(0,1)$에서 미분가능하고 그 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 닫힌구간 $[0,1]$에서 증가한다는 사실을 이용하여 함수 $f(x)$의 최솟값과 최댓값을 구하는 문제이다.

문항 2는 합성함수로 주어진 함수의 최댓값을 구하는 문제이다. 주어진 함수 $f(x)$의 도함수를 구하고, $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[0,1]$에서 감소한다는 사실을 이용하여, 〈기하〉에서 다루는 주어진 위치벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$를 잘 이해하였는지를 파악한다.

문항 3은 〈수학〉에서 다루는 이차함수, 평행이동, 대칭이동, 합성함수, 그리고 〈수학II〉에서 다루는 함수의 연속을 이용하여 조건을 만족시키는 a_n을 구하고 〈수학I〉에서 다루는 수열의 합을 구하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점	
1	함수 $f'(x)$를 구하였는가?	10	30
	닫힌 구간에서 함수 $f(x)$가 증가함을 파악하고 $f(x)$의 최솟값과 최댓값을 구하였는가?	20	
2	닫힌 구간 $[0,1]$에서 함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 파악하였는가?	20	40
	문항 1로부터 얻어지는 부등식을 이용하여 주어진 함수의 최댓값을 찾았는가?	20	
3	k의 값을 기준으로 경우를 나누어 $h(s)$가 불연속인 s의 값을 찾았는가?	20	30
	여러 가지 수열의 합을 구하였는가?	10	

7. 예시 답안 혹은 정답

1. $f(x)=\dfrac{(1+x)^n+(1-x)^n}{1+x^n}$ 에서

$$f'(x)=n\cdot\frac{\big((1+x)^{n-1}-(1-x)^{x-1}\big)(1+x^n)-x^{n-1}\big((1+x)^n+(1-x)^n\big)}{(1+x^n)^2}$$

$$=n\cdot\frac{(1+x)^{n-1}\big((1+x^n)-x^{n-1}(1+x)\big)-(1-x)^{n-1}\big((1+x^n)+(1-x)x^{n-1}\big)}{(1+x^n)^2}$$

$$=n\cdot\frac{(1+x)^{n-1}(1-x^{n-1})-(1-x)^{n-1}(1+x^{n-1})}{(1+x^n)^2}\quad\cdots(*)$$

$0<x<1$이면 $x^{n-1}<x$이므로 $\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{n-1}\geq\dfrac{1+x}{1-x}>\dfrac{1+x^{n-1}}{1-x^{n-1}}$

그러므로 $(1+x)^{n-1}(1-x^{n-1})>(1+x^{n-1})(1-x)^{n-1}$

즉, $(*)$의 분자의 값이 양수이다.

열린구간 $(0,1)$에서 $f'(x)>0$이므로, 닫힌구간 $[0,1]$에서 함수 $f(x)$는 증가한다.

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(1)=2^{n-1}$이고, 최솟값은 $f(0)=2$이다.

2. 문제 (1)로부터, $0\leq x\leq 1$에 대하여 $F(x)=\dfrac{(1+x)^8+(1-x)^8}{1+x^8}\geq 2$이다.

실수 a, b에 대하여

(i) $a,b>0$이면서 $a\geq b>0$인 경우, $1\geq\dfrac{b}{a}>0$이므로 $F\left(\dfrac{b}{a}\right)\geq 2$이다.

(ii) $a,b>0$이면서 $b\geq a>0$인 경우, 마찬가지로 $F\left(\dfrac{a}{b}\right)\geq 2$이다.

따라서, (i)과 (ii)에 의하여, $a,b>0$이면 $(a+b)^8+(a-b)^8\geq 2\left(a^8+b^8\right)\ \cdots$ ㉠

(iii) $a>0,\ -b>0$인 경우, $-a>0,\ b>0$인 경우, $-a>0,\ -b>0$인 경우 모두 ㉠에 의하여 $(a+b)^8+(a-b)^8\geq 2\left(a^8+b^8\right)$이다.

또한, $a=0$ 또는 $b=0$인 경우, $(a+b)^8+(a-b)^8\geq 2\left(a^8+b^8\right)$이다.

따라서, 실수 a, b에 대하여 $(a+b)^8+(a-b)^8\geq 2\left(a^8+b^8\right)\ \cdots$ ㉡

함수 $F(x)$는 $x=0$에서 최솟값을 가지므로

부등식 $(a+b)^8+(a-b)^8\geq 2\left(a^8+b^8\right)$의 등호가 성립하는 경우는 $a=0$ 또는 $b=0$이다. $\cdots(*)$

한편, $0\leq s\leq 1$에 대하여 $f(s)=-s^3+\left(\dfrac{1}{k}+1\right)s^2-\left(\dfrac{1}{k}+1\right)s=-s(s-1)\left(s-\dfrac{1}{k}\right)-s$는

$f(0)=0$, $f(1)=-1$이다.

그리고 $f'(s)=-3s^2+2\left(\dfrac{1}{k}+1\right)s-\left(\dfrac{1}{k}+1\right)$의 이차항의 계수가 음수이고,

$k>1$ 에서 판별식 $\left(\dfrac{1}{k}+1\right)^2-3\left(\dfrac{1}{k}+1\right)=\left(\dfrac{1}{k}-2\right)\left(\dfrac{1}{k}+1\right)<0$이므로 $f'(s)<0$이다. 따라서 $-1\leq f(s)\leq 0$을 만족시킨다.

$a=\dfrac{\sqrt[8]{1-s^8}+\sqrt[8]{1-(f(s))^8}}{2}$, $b=\dfrac{\sqrt[8]{1-s^8}-\sqrt[8]{1-(f(s))^8}}{2}$ 이면,

$a+b=\sqrt[8]{1-s^8}$, $a-b=\sqrt[8]{1-(f(s))^8}$.

㉡에 $a+b$, $a-b$를 대입하면

$$(1-s^8)+(1-(f(s))^8)\geq 2\left(\left(\frac{\sqrt[8]{1-s^8}+\sqrt[8]{1-(f(s))^8}}{2}\right)^8+\left(\frac{\sqrt[8]{1-s^8}-\sqrt[8]{1-(f(s))^8}}{2}\right)^8\right)$$

$\cdots$ ㉢

한편, ㉡에 $a=\frac{s+f(s)}{2}$, $b=\frac{s-f(s)}{2}$을 대입하면

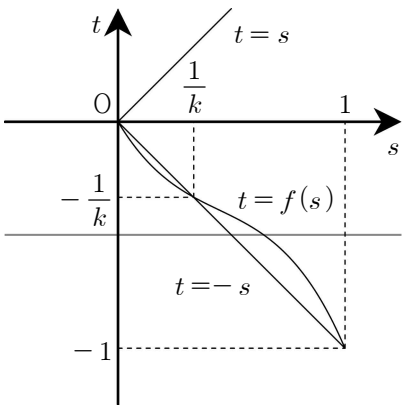
$$s^8+(f(s))^8\geq 2\left(\left(\frac{s+f(s)}{2}\right)^8+\left(\frac{s-f(s)}{2}\right)^8\right)\ \cdots\ ㉣$$

㉢과 ㉣를 더하면

$$\begin{aligned}2&=(1-s^8)+(1-(f(s))^8)+s^8+(f(s))^8\\&\geq 2\left(\left(\frac{\sqrt[8]{1-s^8}+\sqrt[8]{1-(f(s))^8}}{2}\right)^8+\left(\frac{\sqrt[8]{1-s^8}-\sqrt[8]{1-(f(s))^8}}{2}\right)^8\right.\\&\qquad\left.+\left(\frac{s+f(s)}{2}\right)^8+\left(\frac{s-f(s)}{2}\right)^8\right)\\&=2\left((g(s))^8+\left(\frac{\sqrt[8]{1-s^8}-\sqrt[8]{1-(f(s))^8}}{2}\right)^8+(h(s))^8+\left(\frac{s-f(s)}{2}\right)^8\right)\\&\qquad\left(\because\frac{\sqrt[8]{1-s^8}+\sqrt[8]{1-(f(s))^8}}{2}=g(s),\ \frac{s+f(s)}{2}=h(s)\right)\\&\geq 2\left(1-\left(\frac{1}{k}\right)^8+\left(\frac{\sqrt[8]{1-s^8}-\sqrt[8]{1-(f(s))^8}}{2}\right)^8+\left(\frac{s-f(s)}{2}\right)^8\right)\\&\qquad\left(\because(g(s))^8+(h(s))^8\geq 1-\frac{1}{k^8}\right)\end{aligned}$$

즉 $\left(\frac{\sqrt[8]{1-s^8}-\sqrt[8]{1-(f(s))^8}}{2}\right)^8+\left(\frac{s-f(s)}{2}\right)^8\leq\left(\frac{1}{k}\right)^8\ \cdots$ ㉤

따라서, $(*)$에 의하여 ㉤의 등호가 성립하기 위해서는 $s=f(s)$ 혹은 $s=-f(s)$이므로, 이 경우를 만족시키는 s의 값은 $0, 1, \frac{1}{k}$이다.



① $s=0$인 경우, $f(0)=0$이므로,
㉤의 좌변이 0이다.

② $s=1$인 경우, $f(1)=-1$이므로,
$(g(s), h(s))=(0,0)$.
따라서, $(g(s))^8+(h(s))^8\geq 1-\frac{1}{k^8}$라는 조건을 만족시키지 않는다.

③ $s=\frac{1}{k}$인 경우, $f\left(\frac{1}{k}\right)=-\frac{1}{k}$이므로, ㉤의 좌변이 $\left(\frac{1}{k}\right)^8$이다.
따라서, ㉤의 등호가 성립한다. 또한, $\left(g\left(\frac{1}{k}\right)\right)^8+\left(h\left(\frac{1}{k}\right)\right)^8=1-\frac{1}{k^8}$이다.

그러므로, ①과 ③에 의하여 $\left(\sqrt[8]{1-s^8}-\sqrt[8]{1-(f(s))^8}\right)^8+(s-f(s))^8$의 최댓값은 $\frac{256}{k^8}$이다.

* 참고: 함수 $F(x)$의 최댓값이 2^7임을 이용하여 부등식 ㉡을 증명할 수 있다.
양수 $a>b>0$에 대하여, $u=\frac{a+b}{2}$, $v=\frac{a-b}{2}$라 하면 $u>v>0$. $F\left(\frac{v}{u}\right)\le 2^7$
이므로, $(a+b)^8+(a-b)^8 \ge 2\left(a^8+b^8\right)$.

3. k의 값을 기준으로 경우를 나누면 다음과 같다.

(i) $k \ge 8n^2-2$일 때, 함수 $h(s)$는 $s=k+n^2+2$, $k+2$, $k-8n^2+2$에서 불연속이다.

(ii) $4n^2-2<k<8n^2-2$일 때, 함수 $h(s)$는 $s=k+n^2+2$, $k+2$, $-k+8n^2-2$, 0에서 불연속이다.

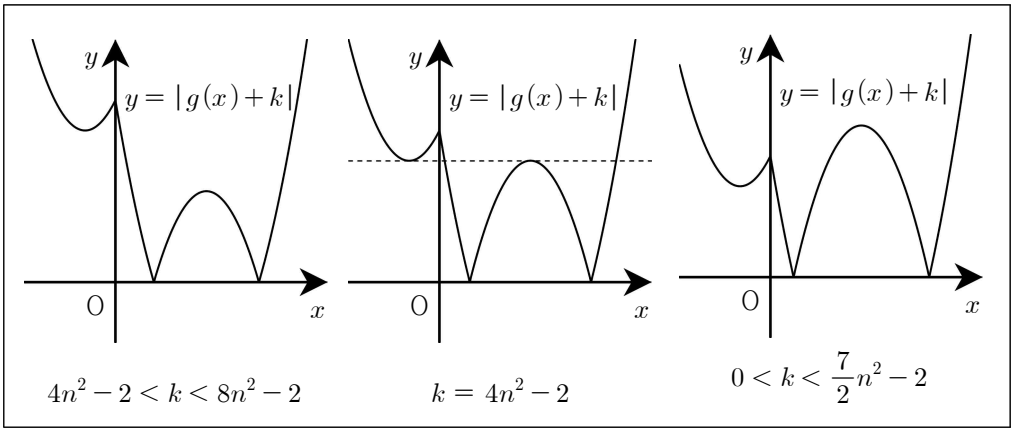
(iii) $k=4n^2-2$일 때, 함수 $h(s)$는 $s=k+n^2+2$, 0에서 불연속이다.

(iv) $\frac{7}{2}n^2-2<k<4n^2-2$일 때, 함수 $h(s)$는 $s=k+n^2+2$, $-k+8n^2-2$, $k+2$, 0에서 불연속이다.

(v) $k=\frac{7}{2}n^2-2$일 때, 함수 $h(s)$는 $s=k+n^2+2$, $k+2$, 0에서 불연속이다.

(vi) $0<k<\frac{7}{2}n^2-2$일 때, 함수 $h(s)$는 $s=-k+8n^2-2$, $k+n^2+2$, $k+2$,0에서 불연속이다.

(ii), (iii), (vi)의 경우 함수 $|g(x)+k|$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 $a_n=4n^2-2$이고 $\sum_{n=1}^{10} a_n = 4\times\frac{10\times11\times21}{6}-2\times10=1520$이다.