◆ 문항카드7 (자연계열(오후1)_1번 문항)

[한양대학교 문항정보]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(오후1)(수학) / 문제 1번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅰ, 미적분
	핵심개념 및 용어	지수함수, 로그함수, 수열의 귀납적 정의, 삼각함수의 덧셈정리, 함수의 그래프, 함수의 증가와 감소, 극대와 극소, 여러 가지 함수의 적분
예상 소요 시간	45분	

2. 문항 및 제시문

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

〈가〉 곡선 $y = 2^x$ 위에 x 좌표가 6 이상인 점 A_1이 있다. 자연수 n에 대하여 n이 홀수이면 점 A_{n+1}은 점 A_n에서 x 축에 내린 수선과 곡선 $y = 2^{x-3} + 35$가 만나는 점이고, n이 짝수이면 점 A_{n+1}은 점 A_n에서 y 축에 내린 수선과 곡선 $y = 2^x$이 만나는 점이다.
자연수 k에 대하여 점 A_{2k-1}의 y 좌표를 y_k라 하자.

〈나〉 $a^2 + b^2 = 1$인 두 실수 a, b에 대하여 함수
$f(x) = \int_0^x (a\sin t + b|sin(2t)|)\,dt$가
다음 조건을 만족시킨다.
(1) 함수 $f(x)$가 구간 $(0, \pi)$에서 증가하거나 구간 $(0, \pi)$에서 감소한다.
(2) 함수 $f(x)$가 구간 $(\pi, 2\pi)$에서 증가하거나 구간 $(\pi, 2\pi)$에서 감소한다.

1. $\overline{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3} = 1$일 때 두 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$, $\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$과 곡선 $y = 2^x$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

2. $y_5 = \dfrac{10725}{256}$일 때 y_1의 값을 구하시오.

3. 정적분 $\int_0^{2026\pi} |f'(x)|\,dx$의 값이 최소가 되도록 하는 모든 순서쌍 (a, b)와 그 최솟값을 구하시오.

3. 출제 의도

자연계열 오후(1)-1번 문제는 고교수학 과정인 수학Ⅰ, 수학Ⅱ, 미적분 교과의 지수함수와 로그함수, 수열, 미분, 적분 단원에서 배운 기본적인 내용을 바탕으로, 배운 지식을 적절히 활용하고 창의력을 발휘하여 논리적으로 문제가 요구하는 결론에 도달할 수 있는지를 묻고 있다. 3개의 소문항으로 구성되어 있으며, 소문항에 관한 출제 의도는 [5.문항 해설] 항목의 내용과 같다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책 8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	**학습내용 성취 기준**
문제 1-1	**수학Ⅰ-(1)지수함수와 로그함수-[2] 지수함수와 로그함수** [12수학Ⅰ01-07] 지수함수와 로그함수의 그래프를 그릴 수 있고, 그 성질을 이해한다. **미적분-(3)적분법-[1] 여러 가지 적분법** [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.
문제 1-2	**수학Ⅰ-(1)지수함수와 로그함수-[2] 지수함수와 로그함수** [12수학Ⅰ01-08] 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있다. **수학Ⅰ-(3)수열-[3] 수학적 귀납법** [12수학Ⅰ03-06] 수열의 귀납적 정의를 이해한다.
문제 1-3	**수학Ⅱ-(2)미분-[3] 도함수의 활용** [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. **미적분-(2)미분법-[1] 여러 가지 함수의 미분** [12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. **미적분-(2)미분법-[3] 도함수의 활용** [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. **미적분-(3)적분법-[1] 여러 가지 적분법** [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 I	황선욱 외 8인	미래앤	2021	41~48, 51~54, 155~156
	수학 I	이준열 외 9인	천재교육	2022	50~56, 157~160
	수학 II	황선욱 외 8인	미래앤	2020	90~93
	수학 II	이준열 외 9인	천재교육	2020	83~90, 91~96
	미적분	황선욱 외 8인	미래앤	2021	63~69, 110~117, 137~142
	미적분	류희찬 외 9인	천재교과서	2022	156~163
	미적분	홍성복 외 10인	지학사	2024	61~66

5. 문항 해설

문항 1. 수학I - 지수함수와 로그함수의 관계를 이용하여 주어진 두 점의 x좌표를 구하기
미적분 - 지수함수의 정적분을 이용해서 두 직선과 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하기.

문항 2. 수학I - 지수함수와 로그함수의 관계를 이용하여 y_k, y_{k+1}사이의 관계식을 구하고, y_5의 값을 이용하여 y_1의 값을 구하기.

문항 3. 수학II, 미적분 - 주어진 함수의 그래프를 파악하고 삼각함수의 덧셈정리와 적분을 활용하여 주어진 정적분의 최솟값을 구하기.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점	
1	A_1과 A_2의 x좌표를 로그의 값으로 표현했는가?	15	30
	지수함수의 적분을 이용하여 두 직선과 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구했는가?	15	
2	두 항 y_k, y_{k+1}사이의 관계식을 구했는가?	15	30
	$y_5 = \frac{10725}{256}$ 이 되도록 하는 y_1의 값을 구했는가?	15	
3	$a \neq 0$일 때 조건 (1)의 필요충분조건이 $\lvert a \rvert \geq 2\lvert b \rvert$임을 구하였는가?	10	40
	a와 b의 부호에 따라 경우를 나누고, 각각의 경우에 주어진 정적분의 최솟값을 구하였는가?	20	
	정적분이 최소가 되도록 하는 순서쌍 (a, b)를 모두 구하고 그 최솟값을 구하였는가?	10	

7. 예시 답안 혹은 정답

1. A_1의 x좌표를 s_1, A_3의 x좌표를 s_2라 하자. 주어진 조건에 의해 $s_1 = s_2 + 1$이다.

A_2의 y좌표는 $2^{s_1-3}+35$이므로

$s_2 = \log_2(2^{s_1-3}+35)$이다. $s_2 = \log_2(2^{s_1-3}+35) = s_1 - 1$이므로 $2^{s_1-3}+35 = 2^{s_1-1}$이고,

$2^{s_1} = \frac{280}{3}$, $s_1 = \log_2\frac{280}{3}$이다.

그러므로 $s_2 = \log_2(\frac{280}{3}) - 1 = \log_2\frac{140}{3}$이다.

A_1에서 x축으로 내린 수선의 발을 점 B, A_3에서 x축으로 내린 수선의 발을 점 C라 하자.

곡선 $y = f(x)$와 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}$, 선분 BC, 선분 CA_3로 둘러싸인 영역의 넓이는 $\int_{s_2}^{s_1} 2^x\,dx = \left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_{s_2}^{s_1} = \frac{1}{\ln 2}(\frac{280}{3} - \frac{140}{3}) = \frac{140}{3\ln 2}$이다. 그러므로 구하고자 하는 영역의 넓이는 $\frac{140}{3\ln 2} - \frac{140}{3} = \frac{140}{3}(\frac{1}{\ln 2} - 1)$이다.

2. A_{2k-1}의 y좌표가 y_k이므로 A_{2k-1}의 x좌표는 $\log_2 y_k$ 이다.

그러므로 A_{2k+1}의 y좌표는 $y_{k+1} = 2^{\log_2 y_k - 3} + 35 = \frac{1}{8}y_k + 35$ 이다. 이를 이용하면

$y_2 = \frac{1}{8}y_1 + 35$,

$y_3 = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{8}y_1 + 35\right) + 35 = \frac{1}{8^2}y_1 + 35\left(1 + \frac{1}{8}\right)$,

$y_4 = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{8^2}y_1 + 35\left(1 + \frac{1}{8}\right)\right) + 35 = \frac{1}{8^3}y_1 + 35\left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8^2}\right)$,

$y_5 = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{8^3}y_1 + 35\left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8^2}\right)\right) + 35 = \frac{1}{8^4}y_1 + 35\left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{8^3}\right)$을 얻는다.

$y_5 = \frac{1}{8^4}y_1 + 35\left(1 + \frac{1}{8^1} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{8^3}\right) = \frac{10725}{256}$이고,

양변에 8^4을 곱하면

$y_1 + 35(8^4 + 8^3 + 8^2 + 8^1) = y_1 + 35\frac{8(8^4-1)}{8-1} = y_1 + 40\times 63\times 65 = 5\times 33\times 65\times 2^4$을 얻는다.

$y_1 = 40\times 65\times(2\times 33 - 63) = 7800$이므로 구하는 값은 7800이다.

3. 함수 $g(t)=a\sin t+b|\sin(2t)|$ 라 하자. $g(t)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$ 이므로 조건 (1)에 의하여 열린구간 $(0,\pi)$에서 $g(t)\geq 0$이거나 열린구간 $(0,\pi)$에서 $g(t)\leq 0$이고, 조건 (2)에 의하여 열린구간 $(\pi,2\pi)$에서 $g(t)\geq 0$이거나 열린구간 $(\pi,2\pi)$에서 $g(t)\leq 0$이다.

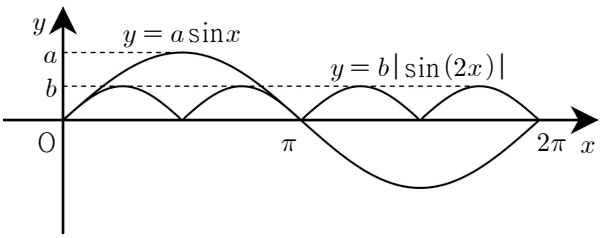
(i) $a=0$일 때

가능한 순서쌍 (a,b)는 $(0,1)$, $(0,-1)$이고 $|f'(x)|=|g(x)|=|\sin(2x)|\geq 0$이다.

함수 $|\sin(2x)|$의 주기가 $\frac{\pi}{2}$이므로

$\int_0^{2026\pi}|f'(x)|dx=4052\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin(2x)|dx=4052$이다.

(ii) $a\neq 0$일 때



① $a>0, b\geq 0$일 때

$g(\frac{3}{2}\pi)=-a<0$이므로 열린구간 $(\pi,2\pi)$에서 $g(t)\leq 0$이다.

즉,

$a\sin t\leq b\sin(2t)=2b\sin t\cos t$이다.

열린구간 $(\pi,2\pi)$에서 $\sin t<0$이므로 열린구간 $(\pi,2\pi)$에서 $a\geq 2b\cos t$이다.

열린구간 $(\pi,2\pi)$에서 $-1\leq cos\,t\leq 1$이므로 $a\geq 2b$이다.

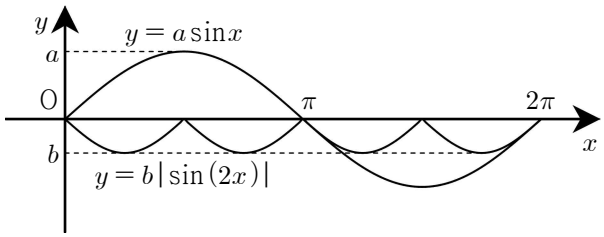
$a^2+b^2=1$이므로 $\frac{2}{\sqrt{5}}\leq a\leq 1$이다. 열린구간 $(0,\pi)$에서 $g(x)\geq 0$이고 열린구간 $(\pi,2\pi)$에서 $g(x)\leq 0$이므로 $\sin(x+\pi)=-\sin x$와 $\sin(2x)=\sin(2(x+\pi))$를 이용하면

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}|g(x)|dx&=\int_0^{\pi}g(x)dx+\int_{\pi}^{2\pi}(-g(x))dx\\&=\int_0^{\pi}(a\sin x+b|\sin(2x)|)dx-\int_{\pi}^{2\pi}(a\sin x+b|\sin(2x)|)dx\\&=2a\int_0^{\pi}\sin x\,dx\\&=4a\end{aligned}$$

함수 $|g(x)|$의 주기가 2π이므로 $\int_0^{2026\pi}|g(x)|dx=1013\int_0^{2\pi}|g(x)|dx=4052a$이다.

$\frac{2}{\sqrt{5}}\leq a\leq 1$이므로 $\int_0^{2026\pi}|f'(x)|dx$의 최솟값은 $\frac{8104}{\sqrt{5}}$이고 이때의 순서쌍 (a,b)는 $\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$이다.

② $a>0,\ b<0$일 때



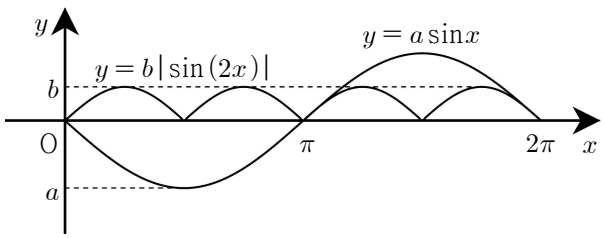
$g(\frac{\pi}{2})=a>0$이고 열린구간 $(\pi,\,2\pi)$에서 $\sin t<0$이므로 ①과 같은 방법으로 $a\geq 2b$이고 $\frac{2}{\sqrt{5}}\leq a\leq 1$이다. 열린구간 $(0,\pi)$에서 $g(x)\geq 0$이고 열린구간 $(\pi,\,2\pi)$에서 $g(x)\leq 0$이므로 ①과 같이

$\int_0^{2\pi}|g(x)|dx=\int_0^{\pi}g(x)dx+\int_{\pi}^{2\pi}(-g(x))dx=4a$이며

$\int_0^{2026\pi}|g(x)|dx=4052a$이다.

따라서 $\int_0^{2026\pi}|f'(x)|dx$의 최솟값은 $\frac{8104}{\sqrt{5}}$이고, 이때의 순서쌍 $(a,\,b)$는 $\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\,-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$이다.

③ $a<0,\ b\geq 0$일 때



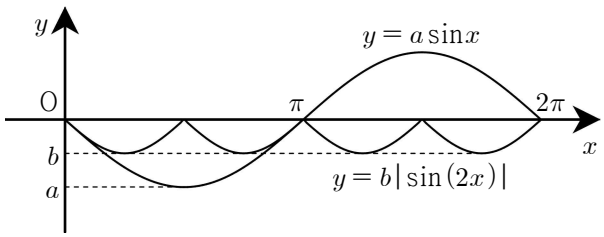
$g(\frac{\pi}{2})=a<0$이고 열린구간 $(0,\pi)$에서 $\sin t>0$이므로 ①과 같은 방법으로 $-a\geq 2b$이고 $\frac{2}{\sqrt{5}}\leq -a\leq 1$이다. 열린구간 $(0,\pi)$에서 $g(x)\leq 0$이고 열린구간 $(\pi,2\pi)$에서 $g(x)\geq 0$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}|g(x)|dx&=\int_0^{\pi}(-g(x))dx+\int_{\pi}^{2\pi}g(x)dx\\&=\int_0^{\pi}(-a\sin x-b|\sin(2x)|)\,dx+\int_{\pi}^{2\pi}(a\sin x+b|\sin(2x)|)\,dx\\&=-2a\int_0^{\pi}\sin x\,dx\\&=-4a\end{aligned}$$

따라서 $\int_0^{2026\pi}|g(x)|dx=-4052a$이고 $\int_0^{2026\pi}|f'(x)|dx$의 최솟값은 $\frac{8104}{\sqrt{5}}$이다.

이때의 순서쌍 $(a,\,b)$는 $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\,\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$이다.

④ $a<0,\ b<0$일 때



$g(\frac{3}{2}\pi)=-a>0$이고 열린구간 $(\pi,\,2\pi)$에서 $\sin t>0$이므로 ①과 같은 방법으로 $-a\geq -2b$이고

$\frac{2}{\sqrt{5}} \le -a \le 1$이다. 열린구간 $(0,\pi)$에서 $g(x) \le 0$이고 열린구간 $(\pi,2\pi)$에서 $g(x) \ge 0$이므로 ③과 같이 $\int_0^{2\pi} |g(x)|dx = \int_0^{\pi} (-g(x))dx + \int_{\pi}^{2\pi} g(x)dx = -4a$이며 $\int_0^{2026\pi} |g(x)|\,dx = -4052a$이다.

따라서 $\int_0^{2026\pi} |f'(x)|\,dx$의 최솟값은 $\frac{8104}{\sqrt{5}}$이고, 이때의 순서쌍 (a, b)는 $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$이다.

(i), (ii)에 의해 $\int_0^{2026\pi} |f'(x)|\,dx$의 최솟값은 $\frac{8104}{\sqrt{5}}$이고,

이때의 순서쌍 (a, b)는 $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$이다.

◆ 문항카드8 (자연계열(오후1)_2번 문항)

[한양대학교(서울) 문항정보]

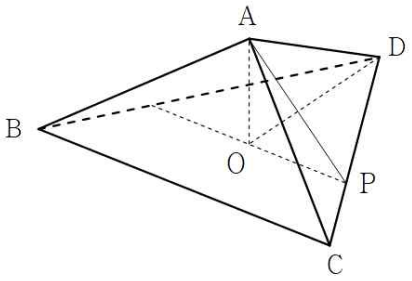
1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(오후1)(수학) / 문제 2번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	기하
	핵심개념 및 용어	공간도형과 공간좌표, 삼수선의 정리, 정사영
예상 소요 시간	45분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

〈가〉오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = a$ 이고 $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DB} = 6$ 인 사면체 ABCD 가 있다. 점 A 에서 삼각형 BCD 에 내린 수선의 발을 O , 점 O 를 지나고 직선 BC 에 평행한 직선이 선분 CD 와 만나는 점을 P 라 하자. (단, $a > 2\sqrt{3}$)

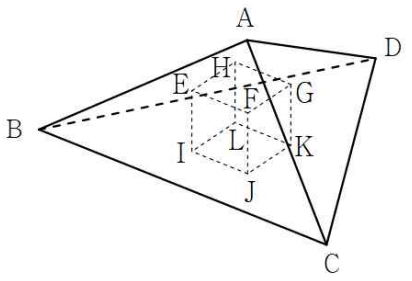


〈나〉제시문 〈가〉에서 주어진 사면체 ABCD 에 대하여 정육면체 EFGH－IJKL 은 다음 조건을 만족시킨다.

(1) 정사각형 IJKL 은 면 BCD 에 포함되고, 직선 IJ 와 직선 BC 는 서로 평행하다.

(2) 선분 EF 는 면 ABC 에 포함된다.

(3) 점 G 는 면 ACD 에, 점 H 는 면 ABD 에 포함된다.



1. 네 삼각형 DOP, AOD, AOP, APD의 넓이의 곱을 a에 관한 식으로 표현하시오.

2. 평면 ACD가 평면 EFGH와 이루는 예각의 크기를 θ_1,
   평면 ACD가 평면 FJKG와 이루는 예각의 크기를 θ_2,
   평면 ACD가 평면 EIJF와 이루는 예각의 크기를 θ_3이라 하자.
   θ_1, θ_2, θ_3 중 가장 작은 것을 θ라 할 때, $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$이 되도록 하는 a의 값을 모두 구하시오.

3. $a = 4$일 때 정사각형 EIJF의 평면 ACD 위로의 정사영의 넓이를 구하시오.

3. 출제 의도

이 문제는 고등학교에서 고교과정의 수학을 정상적으로 이수한 학생이라면 충분히 해결할 수 있는 문제들로 구성되었으며, 교과서 기하의 주요 내용을 다루고 있다. 3개의 문항은 모든 교과서에서 공통으로 다루는 내용만으로 구성되어 있다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	**학습내용 성취 기준**
문제 2-1	**기하 - (3) 공간도형과 공간좌표 - ① 공간도형** [12기하03-01] 직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면의 위치 관계에 대한 간단한 증명을 할 수 있다. [12기하03-02] 삼수선의 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문제 2-2	**기하 - (3) 공간도형과 공간좌표 - ① 공간도형** [12기하03-01] 직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면의 위치 관계에 대한 간단한 증명을 할 수 있다. [12기하03-03] 정사영의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
문제 2-3	**기하 - (3) 공간도형과 공간좌표 - ① 공간도형** [12기하03-01] 직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면의 위치 관계에 대한 간단한 증명을 할 수 있다. [12기하03-02] 삼수선의 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12기하03-03] 정사영의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	기하	권오남 외 14인	㈜교학사	2021	118~128, 132~137, 129~131
	기하	이준열 외 7인	천재교육	2021	114~120, 121~124, 125~132
	기하	홍성복 외 10인	지학사	2025	117~127, 128~130, 131~140
	기하	고성은 외 5인	좋은책 신사고	2021	109~113, 114~117, 118~127

5. 문항 해설

1번 문제에서는 삼수선의 정리를 이용하여 주어진 공간도형을 이해할 수 있는지를 묻는다.

2번 문제에서는 공간에서 두 평면이 이루는 각의 크기를 계산할 수 있는지를 묻는다.

3번 문제에서는 주어진 정사각형의 넓이와 그 정사각형의 정사영의 넓이를 구할 수 있는지를 묻는다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점	
1	삼수선의 정리를 이용하여 주어진 공간도형을 이해하였는가?	10	30
	삼각형 DOP, AOD, AOP, APD의 넓이의 곱을 구하였는가?	20	
2	$\cos\theta_1$, $\cos\theta_2$, $\cos\theta_3$을 구하였는가?	15	30
	a의 값을 모두 구하였는가?	15	
3	정사각형 EIJF의 넓이를 구하였는가?	20	40
	정사각형 EIJF의 평면 ACD 위로의 정사영의 넓이를 구하였는가?	20	

7. 예시 답안 혹은 정답

1. 점 O에서 점 B, C, D까지의 거리가 모두 같으므로 점 O는 삼각형 BCD의 외심이고, 삼각형 BCD는 정삼각형이므로 점 O는 삼각형 BCD의 무게중심이다. 점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 M이라 하면 직선 AO와 직선 DM은 서로 수직이고 점 O에서 만난다. 삼수선의 정리에 의해 직선 AM과 직선 BC는 서로 수직이다.

$\overline{\mathrm{DM}} = \sqrt{\overline{\mathrm{CD}}^2 - \overline{\mathrm{MC}}^2} = 3\sqrt{3}$ 이고, $\overline{\mathrm{DM}} : \overline{\mathrm{DO}} = \overline{\mathrm{DC}} : \overline{\mathrm{DP}} = \overline{\mathrm{MC}} : \overline{\mathrm{OP}} = 3 : 2$ 이므로 $\overline{\mathrm{DO}} = 2\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{DP}} = 4$, $\overline{\mathrm{OP}} = 2$ 이다. 또한, $\overline{\mathrm{OM}} = \overline{\mathrm{DM}} - \overline{\mathrm{DO}} = \sqrt{3}$ 이고 $\overline{\mathrm{AM}} = \sqrt{\overline{\mathrm{AC}}^2 - \overline{\mathrm{MC}}^2} = \sqrt{a^2 - 9}$ 이므로 $\overline{\mathrm{AO}} = \sqrt{\overline{\mathrm{AM}}^2 - \overline{\mathrm{OM}}^2} = \sqrt{a^2 - 12}$ 이다.

따라서, $\triangle \mathrm{DOP} = \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{DO}} \times \overline{\mathrm{OP}} = 2\sqrt{3}$,

$\triangle \mathrm{AOD} = \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{DO}} \times \overline{\mathrm{AO}} = \sqrt{3(a^2-12)}$,

$\triangle \mathrm{AOP} = \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AO}} \times \overline{\mathrm{OP}} = \sqrt{a^2-12}$,

$\triangle \mathrm{APD} = \frac{2}{3} \triangle \mathrm{ACD} = \frac{2}{3} \triangle \mathrm{ABC} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AM}} \times \overline{\mathrm{BC}} = 2\sqrt{a^2-9}$

이고, 삼각형 DOP , AOD , AOP , APD 의 넓이의 곱은 $12(a^2-12)\sqrt{a^2-9}$ 이다.

답: $12(a^2-12)\sqrt{a^2-9}$

2. θ_1 , θ_2 , θ_3 중 가장 작은 것이 θ 이므로 $\cos\theta$ 는 $\cos\theta_1$, $\cos\theta_2$, $\cos\theta_3$ 중 가장 큰 것이다.

$\cos\theta_1 = \frac{\triangle \mathrm{DOP}}{\triangle \mathrm{APD}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a^2-9}}$,

$\cos\theta_2 = \frac{\triangle \mathrm{AOD}}{\triangle \mathrm{APD}} = \frac{\sqrt{3(a^2-12)}}{2\sqrt{a^2-9}}$,

$\cos\theta_3 = \frac{\triangle \mathrm{AOP}}{\triangle \mathrm{APD}} = \frac{\sqrt{a^2-12}}{2\sqrt{a^2-9}}$

이므로 $\cos\theta_2 > \cos\theta_3$ 이다.

한편, $\cos\theta_1 > \cos\theta_2 \Leftrightarrow 2 > \sqrt{a^2-12} \Leftrightarrow 4 > a^2-12 \Leftrightarrow a < 4$ 이다.

(i) $2\sqrt{3} < a < 4$ 일 때, $\frac{\sqrt{6}}{3} = \cos\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a^2-9}}$ 이므로 $a^2-9 = \frac{9}{2}$ 이고 $a = \frac{3\sqrt{6}}{2}$ 이다.

(ii) $a \geq 4$ 일 때, $\frac{\sqrt{6}}{3} = \cos\theta_2 = \frac{\sqrt{3(a^2-12)}}{2\sqrt{a^2-9}}$ 이므로 $24(a^2-9) = 27(a^2-12)$ 이고 $a = 6$ 이다.

따라서 $a = \frac{3\sqrt{6}}{2}$ 또는 $a = 6$ 이다.

답: $a = \frac{3\sqrt{6}}{2}$, $a = 6$

3. 평면 EFGH 가 선분 AB , 선분 AC , 선분 AD 와 만나는 점을 각각 B′ , C′ , D′ 이라 하고, 선분 AM 과 선분 B′C′ 이 만나는 점을 M′ 이라 하자. 정육면체 EFGH − IJKL 의 한 변의 길이를 x 라 하면 삼각형 B′C′D′ 이 정삼각형이므로 $\overline{\mathrm{M'D'}} = \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x$ 이다.

한편, 점 M′ 에서 선분 DM 에 내린 수선의 발을 N 이라 하면 삼수선의 정리에 의하여 직선 MN 과 직선 BC 는 서로 수직이므로 점 N 은 선분 MO 위의 점이다. 두 삼각형 AMO 와 M′MN 은 닮음이므로 $\overline{\mathrm{M'M}} : \overline{\mathrm{M'N}} = \overline{\mathrm{AM}} : \overline{\mathrm{AO}} = \sqrt{7} : 2$ 로부터 $\overline{\mathrm{M'M}} = \frac{\sqrt{7}}{2}x$ 를 얻는다.

따라서 $\overline{\mathrm{AM'}} = \overline{\mathrm{AM}} - \overline{\mathrm{M'M}} = \sqrt{7}\left(1-\frac{x}{2}\right)$이다.

또한 두 삼각형 AMD와 $\mathrm{AM'D'}$는 닮음이므로

$\sqrt{7}\left(1-\frac{x}{2}\right) : \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x = \overline{\mathrm{AM'}} : \overline{\mathrm{M'D'}} = \overline{\mathrm{AM}} : \overline{\mathrm{MD}} = \sqrt{7} : 3\sqrt{3}$ 이다.

즉, $\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x = 3\sqrt{3}\left(1-\frac{x}{2}\right)$이고 이를 정리하면 $x = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+1} = \frac{18-3\sqrt{3}}{11}$ 이다.

따라서, 정사각형 EIJF의 평면 ACD 위로의 정사영의 넓이는

$x^2\cos\theta_3 = \left(\frac{18-3\sqrt{3}}{11}\right)^2 \times \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{351\sqrt{7}-108\sqrt{21}}{847}$ 이다.

답: $\frac{351\sqrt{7}-108\sqrt{21}}{847}$