◆ 문항카드5 (자연계열(오전)_1번 문항)

[한양대학교 문항정보]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(오전)(수학) / 문제 1번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학 I , 수학 II
	핵심개념 및 용어	사인법칙, 코사인법칙, 곱의 법칙, 사인함수, 정적분, $\sum_{k=1}^{n} a_k$, $\int_a^b f(x)\,dx$
예상 소요 시간	45분	

2. 문항 및 제시문

[문제 1] 다음 물음에 답하시오. (50점)

1. $\overline{\mathrm{AB}} = 5$, $\overline{\mathrm{AC}} = 3$ 이고 넓이가 $\sqrt{26}$ 인 삼각형 ABC 가 있다.
$\angle \mathrm{A}$ 가 예각일 때 삼각형 ABC 의 내접원의 반지름의 길이를 구하시오.

2. 자연수 n 에 대하여 집합 $X = \{a, b, c\}$ 에서
집합 $Y = \{y \mid y$**는** n **이하의 자연수**$\}$ 로의 함수 f 중에서
다음 조건을 만족시키는 것의 개수를 a_n 이라 하자.

> $f(a)$ 는 홀수 또는 $f(b)$ 는 짝수이다.

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 라 할 때 $\dfrac{S_9 - S_1}{S_{12}}$ 의 값을 구하시오.

3. $\int_{\frac{1}{2}}^{2} \left| (x+2)(x-1)^2 - 4\sin\dfrac{(2n-1)\pi}{6} \right| dx < 4$ 를 만족시키고
2026 보다 작은 자연수 n 의 개수를 구하시오.

3. 출제 의도

이 문제는 고교과정의 수학을 정상적으로 이수한 학생이라면 충분히 해결할 수 있는 문제들로 구성되었으며, 모든 교과서에서 공통으로 다루는 내용을 바탕으로 출제되었다. 고교수학과정 중 “수학Ⅰ-삼각함수” 단원에서 배운 사인법칙과 코사인법칙, “수학Ⅰ-수열” 단원에서 배운 여러 가지 수열의 합, “수학Ⅱ-적분” 단원에서 배운 정적분의 개념을 잘 이해하고 활용할 수 있는지를 묻고 있다. 아래 3개의 소문항으로 구성되어 있으며, 소문항에 관한 출제 의도는 [5.문항 해설] 항목의 내용과 같다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2020-236호 [별책8] ‘수학과 교육과정’
문항 및 제시문	**학습내용 성취 기준**
문제 1-1	**수학Ⅰ – (2) 삼각함수 – ① 삼각함수** [12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문제 1-2	**수학 – (5) 확률과 통계 – ① 경우의 수** [10수학05-01] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다. **수학Ⅰ – (3) 수열 – ② 수열의 합** [12수학03-05] 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
문제 1-3	**수학Ⅰ – (2) 삼각함수 – ① 삼각함수** [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. **수학Ⅱ – (3) 적분 – ② 정적분** [12수학Ⅱ03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	**도서명**	**저자**	**발행처**	**발행년도**	**쪽수**
고등학교 교과서	수학	배종숙 외	금성출판사	2020	263~265
	수학Ⅰ	배종숙 외	금성출판사	2020	83~86 98~109
	수학Ⅰ	권오남 외	교학사	2025	97~104 141~145
	수학Ⅱ	권오남 외	교학사	2024	134~136

5. 문항 해설

문항1. 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 문항에서 주어지지 않은 삼각형의 나머지 한 변의 길이를 구하고 최종적으로 삼각형의 내접원의 반지름의 길이를 구하는 문제이다.

문항2. 경우의 수를 이용하여 자연수 n에 따라 조건을 만족하는 함수의 개수를 구하고 자연수의 거듭제곱의 합을 이용해 $\frac{S_9 - S_1}{S_{12}}$을 구하는 문제이다.

문항3. 사인함수의 성질을 이용해 자연수 n에 대해 $4\sin\frac{(2n-1)\pi}{6}$가 가질 수 있는 값을 파악하고 이를 바탕으로 정적분 $\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left|(x+2)(x-1)^2 - 4\sin\frac{(2n-1)\pi}{6}\right|dx$ 가 4보다 작도록 하는 2026보다 작은 n의 개수를 구하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점	
1	사인법칙을 이용해 $\sin\theta$와 $\cos\theta$값을 구할 수 있다.	15	30
	코사인법칙과 내접원의 성질을 이용해 선분 $\overline{BC}$의 길이와 내접원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	15	
2	경우의 수를 이용하여 a_n을 구할 수 있다.	15	30
	자연수의 거듭제곱의 합을 이용해 $\frac{S_9 - S_1}{S_{12}}$을 구할 수 있다.	15	
3	사인함수의 성질을 이용해 자연수 n에 대해 $4\sin\frac{(2n-1)\pi}{6}$가 가질 수 있는 값을 파악하고 이를 바탕으로 주어진 정적분을 계산할 수 있다.	30	40
	계산된 정적분 값이 문제에 제시된 조건을 만족하는지 파악하고 최종적으로 4보다 작도록 하는 2026보다 작은 n의 개수를 구할 수 있다.	10	

7. 예시 답안 혹은 정답

1. 삼각형 ABC의 세 변의 길이를 각각 $\overline{\mathrm{BC}} = a$, $\overline{\mathrm{AC}} = b$, $\overline{\mathrm{AB}} = c$, $\angle \mathrm{A}$의 크기를 θ라고 하자. 삼각형 ABC의 넓이를 S라고 하면,

$S = \frac{1}{2}bc\sin\theta$이므로 $\sin\theta = \frac{2S}{bc} = \frac{2\sqrt{26}}{3\times 5} = \frac{2\sqrt{26}}{15}$이다.

$\angle \mathrm{A}$가 예각이므로 $0 < \cos\theta < 1$이고, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$이므로

$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{26}}{15}\right)^2} = \sqrt{\frac{225-104}{225}} = \sqrt{\frac{121}{225}} = \frac{11}{15}$이다.

코사인법칙 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta$를 이용하면,

$a = \sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\theta} = \sqrt{3^2+5^2-2\times 3\times 5\times\frac{11}{15}} = 2\sqrt{3}$이다.

삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r이라 할 때, $S = \frac{1}{2}(a+b+c)r$이므로

$r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{2\sqrt{26}}{2\sqrt{3}+3+5} = \frac{\sqrt{26}}{4+\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{26}-\sqrt{78}}{13}$이다.

답 : $\frac{4\sqrt{26}-\sqrt{78}}{13}$

2. a_n은 (전체 f의 개수) $-$ ($f(a)$가 짝수이면서 $f(b)$가 홀수인 f의 개수)이다.

두 집합 X과 Y의 원소의 개수가 각각 $3, n$이므로 n이 주어졌을 때 전체 f의 개수는 n^3이다. 한편, $f(a)$가 짝수이면서 $f(b)$가 홀수인 f의 개수는 세 사건에 대한 곱의 법칙에 따라 (집합 Y에서 짝수인 원소의 개수)$\times$(집합 Y에서 홀수인 원소의 개수)$\times n$이다. 따라서 a_n은 자연수 k에 대해

$$a_n = \begin{cases} (2k-1)^3 - (k-1)k(2k-1) = 6k^3 - 9k^2 + 5k - 1 & (n = 2k-1) \\ (2k)^3 - k^2(2k) = 6k^3 & (n = 2k) \end{cases}$$

이다. $S_1 = a_1 = 1$이고 자연수의 거듭제곱의 합을 이용해

$S_9 = \sum_{k=1}^{5}(a_{2k-1}+a_{2k}) - a_{10}$, $S_{12} = \sum_{k=1}^{6}(a_{2k-1}+a_{2k})$을 구하면

$$\begin{aligned} S_9 &= \sum_{k=1}^{5}(12k^3-9k^2+5k-1) - 6\times 5^3 \\ &= 12\times\left(\frac{5\times 6}{2}\right)^2 - 9\times\frac{5\times 6\times 11}{6} + 5\times\frac{5\times 6}{2} - 5 - 750 \\ &= 2700 - 495 + 75 - 5 - 750 \\ &= 1525 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{12} &= \sum_{k=1}^{6}(12k^3-9k^2+5k-1) \\ &= 12\times\left(\frac{6\times 7}{2}\right)^2 - 9\times\frac{6\times 7\times 13}{6} + 5\times\frac{6\times 7}{2} - 6 \\ &= 5292 - 819 + 105 - 6 \end{aligned}$$

$= 4572$

이다. 따라서 $\dfrac{S_9 - S_1}{S_{12}} = \dfrac{1525-1}{4572} = \dfrac{1}{3}$이다.

답 : $\dfrac{1}{3}$

3. 함수 $f(x), g(c)$를 각각 $f(x) = x^3 - 3x + 2$,

$g(c) = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \left| (x+2)(x-1)^2 - c \right| dx = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left| x^3 - 3x + 2 - c \right| dx$라 하자.

$f(x)$의 도함수는 $f'(x) = 3x^2 - 3$이며 $\dfrac{1}{2} \le x \le 2$에서 $f(x)$는 $x = \dfrac{1}{2}$에서

함숫값 $\dfrac{5}{8}$, $x = 1$에서 최솟값 0, $x = 2$에서 최댓값 4를 갖는다.

한편 $c = 4\sin\dfrac{(2n-1)\pi}{6}$의 값은 자연수 k에 대해 다음과 같이 나누어 구할 수 있다.

(i) $n = 6k-1$일 때 $c = 4\sin\dfrac{(12k-3)\pi}{6} = 4\sin\dfrac{3\pi}{2} = -4$

(ii) $n = 6k-2$일 때 $c = 4\sin\dfrac{(12k-5)\pi}{6} = 4\sin\dfrac{7\pi}{6} = -2$,

$n = 6k$일 때 $c = 4\sin\dfrac{(12k-1)\pi}{6} = 4\sin\dfrac{11\pi}{6} = -2$

(iii) $n = 6k-5$일 때 $c = 4\sin\dfrac{(12k-11)\pi}{6} = 4\sin\dfrac{\pi}{6} = 2$,

$n = 6k-3$일 때 $c = 4\sin\dfrac{(12k-7)\pi}{6} = 4\sin\dfrac{5\pi}{6} = 2$

(iv) $n = 6k-4$일 때 $c = 4\sin\dfrac{(12k-9)\pi}{6} = 4\sin\dfrac{\pi}{2} = 4$

즉, c는 $-4, -2, 2, 4$의 4개의 값만을 가진다. $g(c)$는 다음의 3가지 경우로 나누어 구할 수 있다.

(i) $c = -4$ 또는 $c = -2$인 경우 $c \le 0$이므로 $\dfrac{1}{2} \le x \le 2$에서 항상 $f(x) \ge c$이고

$g(c) = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} (x^3 - 3x + 2 - c)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + (2-c)x\right]_{\frac{1}{2}}^{2}$

$= -\dfrac{3}{2}c + 1 + \dfrac{23}{64} = -\dfrac{3}{2}c + \dfrac{87}{64}$

이다. 이때 $g(-4) = 7 + \dfrac{23}{64} = \dfrac{471}{64}$, $g(-2) = 4 + \dfrac{23}{64} = \dfrac{279}{64}$이다.

(ii) $c = 2$일 때는 $f(\sqrt{3}) = 2$이므로 $\dfrac{1}{2} \le x < \sqrt{3}$일 때는 $f(x) < c$이고

$\sqrt{3} \le x \le 2$일 때는 $f(x) \ge c$이다. 따라서

$g(c) = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{3}} (-x^3 + 3x)\,dx + \int_{\sqrt{3}}^{2} (x^3 - 3x)\,dx$

$$= \left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2\right]_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{3}} + \left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2\right]_{\sqrt{3}}^{2}$$

$$= \frac{5}{2}-\frac{23}{64}=\frac{137}{64}$$ 이다.

(iii) $c=4$인 경우 $\frac{1}{2}\le x\le 2$에서 항상 $f(x)\le c$이고

$$g(4)=\int_{\frac{1}{2}}^{2}(-x^3+3x+2)\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{\frac{1}{2}}^{2} = \frac{3}{2}\times 4-1-\frac{23}{64}$$

$$= \frac{3}{2}\times 4-1-\frac{23}{64}=5-\frac{23}{64}=\frac{297}{64}$$ 이다.

$4=\frac{256}{64}$이므로 $c=2$일 때만 문제의 조건인 $g(c)<4$를 만족시키며,

이는 어떤 자연수 k에 대해 $n=6k-5$ 또는 $n=6k-3$인 경우이다.

$2025=6\times 338-3$이므로 $g(c)<4$를 만족시키는 2026보다 작은 자연수 n의 개수는 총 $2\times 338=676$개다.

답 : 676

◆ 문항카드6 (자연계열(오전)_2번 문항)

[한양대학교(서울) 문항정보]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(오전)(수학) / 문제 2번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학Ⅰ, 수학Ⅱ, 미적분
	핵심개념 및 용어	사인함수, 미분가능, 도함수, 정적분, e^x, $\sin x$, $\cos x$, 극한값, 우극한, 이계도함수, 속력, 가속도
예상 소요 시간	45분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2] 다음 물음에 답하시오. (50점)

1. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(1) $f(x)=\begin{cases} -(e^x-\cos x)^{2026}\sin x & (0 \le x \le 2\pi) \\ x-2\pi & (x>2\pi) \end{cases}$

(2) $x<0$일 때 $f(x)=-f(-x)$

함수 $g(x)=\left|\int_a^x f(t)\,dt\right|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 실수 a의 값을 모두 구하시오.

2. 원 $x^2+y^2=1$과 직선 $y=a(x-1)$ $(a>1)$이 서로 다른 두 점 P, Q에서 만나고, 원 $x^2+y^2=1$과 직선 $y=a(x-1)+k$ (k는 양의 실수)가 서로 다른 두 점 R, S에서 만난다. 두 선분 PQ, RS와 길이가 π보다 작은 두 호 PR, QS로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(k)$라 하자. 극한값 $\lim_{k\to 0+}\frac{S(k)}{k}$를 구하시오.

(단, 점 P의 x좌표는 점 Q의 x좌표보다 크고, 점 R의 x좌표는 점 S의 x좌표보다 크다.)

3. 모든 실수 t에 대하여 함수 $g(t)$가 $g(t) \geq 0$이고 이계도함수를 갖는다.

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(0 \leq t \leq 4)$에서의 위치를 $(t, g(t))$라 하자.

점 P, 함수 $f(x)$와 함수 $h(t) = f(g(t))$ $(0 \leq t \leq 4)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(1) $t = \frac{1}{4}$일 때 점 P는 x축 위에 있고 가속도는 $(0, 1)$이다.

(2) $t = 1$일 때 점 P의 속력이 최대가 되고, 이때 속력은 $\sqrt{2}$이다.

(3) 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고,

$x \geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) > 0$이다.

(4) $h\left(\frac{1}{4}\right) = 0$, $h'(1) = \frac{9}{4}$, $h''\left(\frac{1}{4}\right) = 4$, $h''(1) = -2$

$f(3)$의 값을 구하시오.

3. 출제 의도

이 문제는 고등학교 수학 과정에서 배운 내용을 바탕으로, 배운 지식을 적절히 활용하여 논리적으로 문제가 요구하는 결론에 도달할 수 있는지를 묻고 있다. 3개의 소문항으로 구성되어 있으며 소문항에 관한 출제 의도는 [5.문항 해설] 항목의 내용과 같다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	**학습내용 성취 기준**
문제 2-1	**수학 I – (2) 삼각함수 – ① 삼각함수** [12수학 I 02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. **수학II – (2) 미분 – ① 미분계수** [12수학II 02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다. **수학II – (2) 미분 – ③ 도함수의 활용** [12수학II 02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. **수학II – (3) 적분 – ② 정적분** [12수학II 03-03] 정적분의 뜻을 안다. **미적분 – (2) 미분법 – ③ 도함수의 활용** [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. **미적분 – (3) 적분법 – ① 여러 가지 적분법** [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	**학습내용 성취 기준**
문제 2-2	**수학 – (1) 문자와 식 – 6 여러 가지 방정식과 부등식** [10수학01-13] 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀 수 있다. **수학 – (2) 기하 – 2 직선의 방정식** [10수학02-05] 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다. **수학II – (1) 함수의 극한과 연속 – 1 함수의 극한** [12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.
문제 2-3	**수학 – (1) 문자와 식 – 6 여러 가지 방정식과 부등식** [10수학01-13] 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀 수 있다. **수학II – (2) 미분 – 2 도함수** [12수학Ⅱ02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다. **미적분 – (2) 미분법 – 2 여러 가지 미분법** [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다. **미적분 – (2) 미분법 – 2 여러 가지 미분법** [12미적02-10] 이계도함수를 구할 수 있다. **미적분 – (2) 미분법 – 3 도함수의 활용** [12미적02-14] 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	이준열 외	천재교육	2024	80-81, 133-135
	수학Ⅰ	박교식 외	동아출판	2024	72-85
	수학Ⅱ	이준열 외	천재교육	2020	53-59, 121-127
	수학Ⅱ	권오남 외	교학사	2024	96-99
	수학Ⅱ	황선욱 외	미래엔	2020	18-24
	수학Ⅱ	배종숙 외	금성출판사	2023	64-68
	미적분	김원경 외	비상	2022	99-103
	미적분	홍성복 외	지학사	2024	125-127, 144-147
	미적분	황선욱 외	미래엔	2021	86-89
	미적분	고성은 외	좋은책 신사고	2021	91-92

5. 문항 해설

문항 1. 지수함수와 삼각함수의 미분과 삼각함수의 성질을 활용하여 함수 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$의 그래프의 개형을 파악하고 문제의 조건을 만족시키는 실수 a의 값을 모두 구할 수 있는지를 물었다.

문항 2. 원과 직선의 위치 관계를 이해하고 직선과 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하는 문제이다. 함수의 극한 및 함수의 극한에 대하여 성립하는 대소 관계 개념을 잘 이해하였는지를 파악한다.

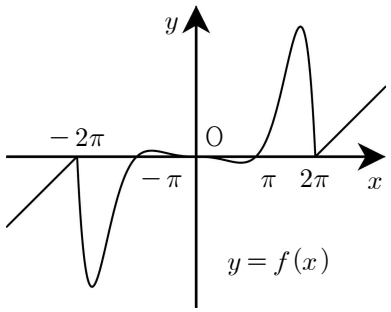
문항 3. 합성함수의 미분법, 이계도함수, 속도와 가속도와 같은 미분법의 개념을 활용하여 문제를 해결할 수 있는지를 물었다. 주어진 조건으로부터 함수 $g(x)$, $h(x)$의 그래프의 개형을 파악하고 이로부터 삼차함수 $f(x)$를 찾고 $f(3)$의 값을 계산할 수 있는지를 물었다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점	
1	함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 파악하였는가?	10	30
	함수 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$의 그래프의 개형을 파악하고 조건을 만족하는 실수 a의 값을 모두 구하였는가?	20	
2	점 $\mathrm{P},\mathrm{Q},\mathrm{R},\mathrm{S}$의 좌표를 구하였는가?	10	30
	극한값 $\lim_{k\to 0+}\frac{S(k)}{k}$을 구하였는가?	20	
3	주어진 조건을 이용하여 함수 $g(x)$에 대한 식을 얻고 삼차함수 $f(x)$를 구하였는가?	30	40
	$f(3)$의 값을 구하였는가?	10	

7. 예시 답안 혹은 정답

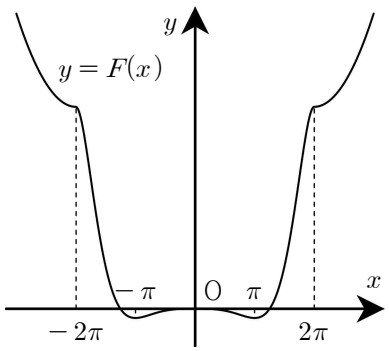
1. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$라 하자. 함수 $s(t)=e^t-\cos t$에 대하여, 열린구간 $(0,2\pi)$에서 $s(t)\geq 0$이고 $s'(t)=e^t+\sin t>0$이다. 따라서 열린구간 $(0,2\pi)$에서 함수 $(s(t))^{2026}$이 증가한다. $(0,\pi)$에서 $(s(t+\pi))^{2026}>(s(t))^{2026}$이고 $\sin(t+\pi)=-\sin t$이므로

$F(2\pi)=\int_0^{2\pi} f(t)\,dt=\int_\pi^{2\pi} f(t)\,dt+\int_0^{\pi} f(t)\,dt=\int_0^{\pi}[(s(t+\pi))^{2026}-(s(t))^{2026}]\sin t\,dt>0=F(0)$이다. $x<0$일 때, $F(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^{-x}\{-f(-s)\}ds=\int_0^{-x} f(s)ds=F(-x)$이다.

따라서 함수 $y=F(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$h(x)=\int_a^x f(t)\,dt$라 하면, $h(x)=F(x)+\int_a^0 f(t)\,dt$이고 $h(a)=0$이다. 즉, 함수 $h(x)$의 그래프는 함수 $F(x)$의 그래프의 y축 방향으로의 평행이동이며 $h(a)=0$이다. 따라서 함수 $g(x)=|h(x)|$가 실수 전체에서 미분가능하려면 곡선 $y=F(x)$와 직선 $y=F(a)$의 모든 교점에서 함수 $F(x)$의 미분계수가 0이 되어야 한다. 함수 $y=F(x)$의 그래프에 의하면 이를 만족하는 a는 $-2\pi, -\pi, \pi, 2\pi$이다.

2. 연립방정식 $\begin{cases} y=a(x-1) \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$을 풀면, 점 P, Q의 좌표는 $\mathrm{P}=(1,0)$, $\mathrm{Q}=\left(\frac{a^2-1}{a^2+1}, -\frac{2a}{a^2+1}\right)$

연립방정식 $\begin{cases} y=a(x-1)+k \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$를 풀면, 점 R의 x좌표는 $\frac{a^2-ak+\sqrt{1+a^2-(a-k)^2}}{1+a^2}$이고 점 S의 x좌표는 $\frac{a^2-ak-\sqrt{1+a^2-(a-k)^2}}{1+a^2}$이다.

직선 $y=a(x-1)$을 L, 직선 $y=a(x-1)+k$를 L'이라 하자.
점 P, Q에서 직선 L'에 내린 수선의 발을 각각 점 B, C라 하고, 점 R, S에서 직선 L에 내린 수선의 발을 각각 점 A, D라 하자.

점 P와 직선 L' 사이의 거리는 $\frac{k}{\sqrt{a^2+1}}$이므로, 직사각형 PBCQ의 넓이는

$\frac{k}{\sqrt{a^2+1}}\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{2k}{a^2+1}$이다.

두 점 R, S의 x좌표의 차를 $d=\frac{2\sqrt{1+a^2-(a-k)^2}}{1+a^2}$라 할 때,

$\overline{\mathrm{RS}}=d\sqrt{1+a^2}=\frac{2\sqrt{1+a^2-(a-k)^2}}{\sqrt{1+a^2}}$이므로 직사각형 ARSD의 넓이는

$\frac{k}{\sqrt{a^2+1}}\overline{\mathrm{RS}}=\mathrm{k}\cdot\frac{2\sqrt{1+\mathrm{a}^2-(\mathrm{a}-\mathrm{k})^2}}{1+\mathrm{a}^2}$이다.

실수 $0<k\le a$에 대하여 직선 L'과 직선 L, 그리고 호 PR, 호 QS로 둘러싸인 영역은 직사각형 ARSD의 내부에 있고 직사각형 PBCQ를 포함하므로,

$$\frac{2k}{a^2+1}\le S(k)\le k\cdot\frac{2\sqrt{1+a^2-(a-k)^2}}{1+a^2}$$

$$\frac{2}{a^2+1}\le\frac{S(k)}{k}\le\frac{2\sqrt{1+a^2-(a-k)^2}}{1+a^2}$$

$$\frac{2}{a^2+1}\le\lim_{k\to0+}\frac{S(k)}{k}\le\lim_{k\to0+}\frac{2\sqrt{1+a^2-(a-k)^2}}{1+a^2}\quad\cdots\ ㉠$$

이때 $\lim_{k\to0+}\frac{2\sqrt{1+a^2-(a-k)^2}}{1+a^2}=\frac{2}{1+a^2}$이므로 ㉠에 의하여 $\lim_{k\to0+}\frac{S(k)}{k}=\frac{2}{1+a^2}$이다.

*참고: 점 R과 점 S의 x좌표를 직접 구하지 않고, 근과 계수와의 관계를 통해 이차방정식 $x^2+(ax-a+k)^2=1$의 두 근의 차를 구하여 직사각형 ARSD의 넓이를 쉽게 구할 수 있다.

3. 등식 $f(g(t))=h(t)$의 양변을 미분하면

$f'(g(t))g'(t)=h'(t)$, $f''(g(t))\{g'(t)\}^2+f'(g(t))g''(t)=h''(t)$ …… ㉠

조건 (2)에 의하여 $t=1$일 때 점 P의 속력 $\sqrt{1+\{g'(t)\}^2}$이 최대가 되므로 $\{g'(t)\}^2$의 값도 최대가 된다. 따라서 $2g'(1)g''(1)=0$

또한 $\sqrt{1+\{g'(1)\}^2}=\sqrt{2}$에서 $g'(1)=1$ 또는 -1. 조건 (3), (4)에 의하여

$f'(g(1))g'(1)=h'(1)=\frac{9}{4}$이고 $f'(g(1))>0$이므로 $g'(1)>0$

따라서 $g'(1)=1$이고 $g''(1)=0$. ㉠에서

$f'(g(1))=h'(1)=\frac{9}{4}$, $f''(g(1))=h''(1)=-2$ …… ㉡

조건 (1)에 의하여 $g\left(\frac{1}{4}\right)=0$, $g''\left(\frac{1}{4}\right)=1$. 따라서 $f(0)=f\left(g\left(\frac{1}{4}\right)\right)=h\left(\frac{1}{4}\right)=0$ …… ㉢

또한 $g(t)\ge0=g\left(\frac{1}{4}\right)$이므로 $g'\left(\frac{1}{4}\right)=0$이고 ㉠에서

$f'(0)=f'\left(g\left(\frac{1}{4}\right)\right)=f'\left(g\left(\frac{1}{4}\right)\right)g''\left(\frac{1}{4}\right)=h''\left(\frac{1}{4}\right)=4$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $f(x)=x^3+ax^2+4x$ (a는 실수)

$g(1)=b\geq 0$라 하면 ㉡에서 $3b^2+2ab+\frac{7}{4}=0$, $3b+a=-1$. 연립하면 $a=\frac{5}{2}$, $b=-\frac{7}{6}<0$ 또는

$a=-\frac{5}{2}$, $b=\frac{1}{2}\geq 0$

따라서 $a=-\frac{5}{2}$이고 $f(x)=x^3-\frac{5}{2}x^2+4x$. 그러므로 $f(3)=\frac{33}{2}$