한양대학교 2024학년도 신입학전형 수시 논술고사

자 연 계

출제 의도 및 평가 지침

오후(1)-1번

1. 출제 의도 및 문제 해설

자연계열 오후(1) [문제 1]은 고등학교에서 고교과정의 수학을 정상적으로 이수한 학생이라면 충분히 해결할 수 있는 문제들로 구성되었으며, 모든 교과서에서 공통으로 다루는 내용을 바탕으로 출제되었다. 아래 3개의 소문항으로 구성되어 있다.

문항 1은 같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 최단거리로 가는 경우의 수를 구할 수 있는 지를 묻는 문제이다.

문항 2는 삼차 방정식의 세 근을 이용하여 그에 따른 경우의 수를 찾고 확률분포의 기댓값을 구하는 문제이다.

문항 3은 삼각함수의 부정적분에 대한 이해를 바탕으로 정적분을 구하고, 함수의 극한을 구하는 문제이다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	30	같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 색칠된 정육면체의 꼭짓점을 지나지 않고 P에서 Q와 연결된 직육면체의 꼭짓점 R까지 최단거리로 가는 경우의 수를 구했는가?	10
		이를 이용하여 색칠된 정육면체의 꼭짓점을 지나지 않고 P에서 Q까지 최단거리로 가는 총 경우의 수를 구했는가?	20
2	40	곡선이 x축과 만나는 점 사이의 거리를 잘 비교하여 경우의 수를 구하였는가?	20
		확률분포를 찾고 기댓값을 정확히 구하였는가?	20
3	30	함수 $f(x)$를 적분하여 함수 $g(x)$와 $h(x)$를 구하였는가?	20
		주어진 함수를 이용하여 극한값을 구하였는가?	10

3. 출제 근거

이 문제들은 고등학교 수학과 교과과정을 정상적으로 이수한 학생들은 큰 어려움 없이 해결할 수 있는 문제들로 구성되어 있다. 교과서 수학II, 확률과 통계, 미적분의 주요 내용을 다루고 있다. 3개의 소문항은 다음과 같은 교과서 내용과 연계되며, 모든 교과서에 공통으로 다루는 내용으로 구성되어 있다.

교과서 수학II(비상교육 김원경 외 14인) - 함수의 극한과 연속 - 함수의 극한 p. 11 - 24
교과서 수학II(지학사 홍석복 외 10인) - I. 함수의 극한과 연속 - 함수의 극한 p. 11 - 25
교과서 미적분(비상교육 김원경 외 14인) - 적분법 - 여러 가지 적분법 p. 121-137
교과서 미적분(천재교육 이준열 외 7인) - III. 적분법 - 여러 가지 적분법 p. 139-153
교과서 확률과 통계(좋은책 신사고 고성은 외 5인) - 1. 순열과 조합(p. 11-17)
교과서 확률과 통계(좋은책 신사고 고성은 외 5인) - 통계 - 확률분포 p. 79-103
교과서 확률과 통계(미래엔 황선욱 외 9인)-I. 경우의 수 - 1. 순열과 조합(p. 11-16)
교과서 확률과 통계(미래엔 황선욱 외 9인)-III. 통계 - 1. 확률분포 (p. 86-91)

한양대학교 2024학년도 신입학전형 수시 논술고사

자 연 계

출제 의도 및 평가 지침

오후(1)-2번

1. 출제 의도 및 문제 해설

자연계열 오후(1)-2번 문제는 고교수학과정 중 “미적분 - 여러 가지 함수의 미분” 단원의 삼각함수의 덧셈정리와 삼각함수의 미분, “미적분 - 도함수의 활용” 단원의 함수의 그래프, “기하 - 공간도형” 단원의 정사영을 주요 내용으로 하고 있다. 도형의 성질을 잘 이해하고 응용하기 위한 중요한 도구인 삼각함수의 덧셈정리 및 미분법의 지식을 적절히 활용해서 평면도형이 갖고 있는 성질들을 분석하고, 정사영의 성질을 적절하게 이용해서 공간도형에 대한 원하는 결과를 도출할 수 있는지를 묻고 있다. 다음 3개의 소문항으로 구성되어 있다.

문항 1. 반원의 호 위에 있는 점들이 만족시키는 조건을 적절이 활용해서 주어진 삼각함수의 값을 구하기.
문항 2. 미분법을 효과적으로 이용해서 주어진 선분의 길이의 최댓값을 구하기.
문항 3. 공간도형이 만족시키는 조건을 활용해서 주어진 도형의 정사영의 넓이를 구하기.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	40	$\cos\theta$와 $\sin\theta$가 만족시키는 등식을 구했는가?	20
		$\cos\theta$와 $\sin\theta$의 값을 구했는가?	20
2	30	선분 ST의 길이를 한 문자에 대한 식으로 나타내었는가?	20
		선분 ST의 길이의 최댓값을 구했는가?	10
3	30	평면 α와 평면 β가 이루는 각 a에 대하여 $\cos a$의 값을 구했는가?	20
		원 C의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 구했는가?	10

3. 출제 근거

이 문제는 고등학교에서 고교과정의 수학을 정상적으로 이수한 학생이라면 충분히 해결할 수 있는 문제들로 구성되었으며, 교과서 미적분, 기하의 주요내용을 다루고 있다. 3개의 소문항은 교과서의 내용과 다음과 같이 연계되며, 모든 교과서에서 공통으로 다루는 내용만으로 구성되어 있다.

교과서 미적분 (좋은책신사고 고성은 외 6인) - 미분법 - 여러 가지 함수의 미분 - 삼각함수의 덧셈정리 (p.58 - 65)
교과서 미적분 (천재교과서 류희찬 외 9인) - 여러 가지 미분법 - 함수의 그래프 (p.128 - 134)
교과서 기하 (천재교육 이준열 외 7인) - 공간도형과 공간좌표 - 공간도형 - 정사영 (p.125 - 132)
교과서 기하 (좋은책 신사고 고성은 외 5인) - 공간도형 - 공간도형 - 정사영 (p.118 - 124)

한양대학교 2024학년도 신입학전형 수시

자 연 계

논 술 예 시 답 안

오후(1)-1번

1. 전체 직육면체에서 꼭짓점 P를 포함하고 정사각형 25개로 이루어진 면을 면 X, 꼭짓점 Q를 포함하고 정사각형 25개로 이루어진 면을 면 Y라고 하자. 꼭짓점 P에서 꼭짓점 Q까지 최단거리로 가려면 가로, 세로 방향으로 정육면체의 모서리를 5개씩 지나고 면 X와 면 Y를 동시에 만나는 정육면체의 모서리를 1개 지난다. 면 X 또는 면 Y에 포함된 정사각형에서 가로 방향으로 이동하는 것을 d, 세로 방향으로 이동하는 것을 e, 면 X와 면 Y를 동시에 만나는 정육면체의 모서리를 따라 이동하는 것을 f라고 하자.
꼭짓점 Q와 모서리로 연결된 면 X의 꼭짓점을 꼭짓점 R라고 하자. P에서 R까지 최단거리로 이동하는 총 경우의 수는 10개의 문자 d,d,d,d,d,e,e,e,e,e를 일렬로 나열한 경우의 수로 $\frac{10!}{5!\times 5!}=252$이다. 이 중 색칠된 정육면체의 꼭짓점을 지나서 가는 경우의 수는 $1+5^2=26$이다. 그러므로 색칠된 정육면체의 꼭짓점을 지나지 않고 P에서 R까지 최단거리로 이동하는 총 경우의 수는 $252-26=226$이다.
색칠된 정육면체의 꼭짓점을 지나지 않고 P에서 Q까지 최단거리로 이동하는 경우의 수는 d,d,d,d,d,e,e,e,e,e,f를 나열하는 경우의 수와 같다. 이러한 나열은 색칠된 정육면체의 꼭짓점을 지나지 않고 P에서 R까지 최단거리로 이동하는 경우인 d,d,d,d,d,e,e,e,e,e 문자의 나열에 f를 하나 넣어서 얻어진다. 각 d,d,d,d,d,e,e,e,e,e문자의 나열에 f를 넣는 방법의 수는 11이므로 총 경우의 수는 $226\times 11=2486$이다.

2. $c=ab$, $d=\frac{a}{2}-6$라 하자. 순서쌍 (a,b)가 가질 수 있는 값이 $(4,0),(4,1),(6,0),(6,1),(8,0),(8,1)$이므로 순서쌍 (c,d)가 가질 수 있는 값은 $(0,-4),(4,-4),(0,-3),(6,-3),(0,-2),(8,-2)$이다. $(ab)^2-4(\frac{a}{2}-6)=c^2-4d\geq 8>0$이다. 따라서
$(x+7)(x^2-abx+\frac{a}{2}-6)=(x+7)(x^2-cx+d)=0$은 세 근 $x_1=-7$, $x_2=\frac{c-\sqrt{c^2-4d}}{2}$, $x_3=\frac{c+\sqrt{c^2-4d}}{2}$을 가진다.

(c,d)	$(0,-4)$	$(4,-4)$	$(0,-3)$	$(6,-3)$	$(0,-2)$	$(8,-2)$
x_2	-2	$2-2\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}$	$3-2\sqrt{3}$	$-\sqrt{2}$	$4-3\sqrt{2}$

$x_1<-2\leq x_2$이므로 $x_1<x_2<x_3$이다. 세 점 중에서 가장 가까운 두 점 사이의 거리는 $x_2-x_1=\frac{c-\sqrt{c^2-4d}}{2}+7$,
$x_3-x_2=\sqrt{c^2-4d}$를 비교하면 된다.

$x_2-x_1<x_3-x_2 \Leftrightarrow \frac{c-\sqrt{c^2-4d}}{2}+7<\sqrt{c^2-4d} \Leftrightarrow c+14<3\sqrt{c^2-4d}$이므로
$\Leftrightarrow c^2+28c+196<9(c^2-4d) \Leftrightarrow 9d+49<c(2c-7)$
순서쌍 (c,d)가 가질 수 있는 값은 $(6,-3),(8,-2)$, 즉, 순서쌍 (a,b)가 가질 수 있는 값은 $(6,1),(8,1)$이다.
한편, $x_2-x_1>x_3-x_2 \Leftrightarrow 9d+49>c(2c-7)$이고, 순서쌍 (c,d)가 가질 수 있는 값은 $(0,-4),(4,-4),(0,-3),(0,-2)$이므로, 순서쌍 (a,b)가 가질 수 있는 값은 $(4,0),(4,1),(6,0),(8,0)$이다.

a	4		6		8	
b	0	1	0	1	0	1
(c,d)	$(0,-4)$	$(4,-4)$	$(0,-3)$	$(6,-3)$	$(0,-2)$	$(8,-2)$
X	4	$4\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}$	$10-2\sqrt{3}$	$2\sqrt{2}$	$11-3\sqrt{2}$
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{6}\times\frac{6}{10}=\frac{3}{10}$	$\frac{3}{6}\times\frac{4}{10}=\frac{1}{5}$	$\frac{2}{6}\times\frac{6}{10}=\frac{1}{5}$	$\frac{2}{6}\times\frac{4}{10}=\frac{2}{15}$	$\frac{1}{6}\times\frac{6}{10}=\frac{1}{10}$	$\frac{1}{6}\times\frac{4}{10}=\frac{1}{15}$

확률변수 X의 기댓값은 $\mathrm{E}(X)=4\times\frac{3}{10}+4\sqrt{2}\times\frac{1}{5}+2\sqrt{3}\times\frac{1}{5}+(10-2\sqrt{3})\times\frac{2}{15}+2\sqrt{2}\times\frac{1}{10}+(11-3\sqrt{2})\times\frac{1}{15}$
$=\frac{49}{15}+\frac{4}{5}\sqrt{2}+\frac{2}{15}\sqrt{3}$

3. 함수 $p(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$ 에 대해서 $p'(x)=\frac{d}{dx}\frac{\cos x}{\sin x}=-\frac{1}{\sin^2 x}$ 이다. $\frac{d}{dx}p(2x)=2p'(2x)=-2\frac{1}{\sin^2 2x}$ 을 이용하면

$g(x)=\int_{\frac{\pi}{6}}^{x} f(t)\,dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{x}\frac{1}{\sin^2 2t}dt=\left[-\frac{1}{2}p(2t)\right]_{\frac{\pi}{6}}^{x}=-\frac{\cos 2x}{2\sin 2x}+\frac{\cos\frac{\pi}{3}}{2\sin\frac{\pi}{3}}=-\frac{1}{2}\frac{\cos 2x}{\sin 2x}+\frac{1}{2\sqrt{3}}$ 을 얻는다.

한편, $\frac{d}{dx}\ln|q(2x)|=\frac{2q'(2x)}{q(2x)}$ 를 이용하면

$h(x)=\int_{\frac{\pi}{6}}^{x} g(t)\,dt=-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{x}\left(\frac{\cos 2t}{\sin 2t}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)dt=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\ln|sin 2t|-\frac{1}{\sqrt{3}}t\right]_{\frac{\pi}{6}}^{x}=-\frac{1}{4}\ln|sin 2x|+\frac{1}{4}\ln\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2\sqrt{3}}x-\frac{\pi}{12\sqrt{3}}$

$\lim_{x\to 0+}\frac{\{g(x)\}^2}{f(x)}=\lim_{x\to 0+}\frac{\left(-\frac{1}{2}\frac{\cos 2x}{\sin 2x}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2}{\frac{1}{\sin^2 2x}}=\lim_{x\to 0+}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2\sqrt{3}}\sin 2x\right)^2=\frac{1}{4}$ 이고

$\lim_{x\to 0+}\frac{h(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 0+}\left(-\frac{1}{4}\sin^2 2x\ln|sin 2x|+\frac{1}{4}\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sin^2 2x+\frac{1}{2\sqrt{3}}x\sin^2 2x-\frac{\pi}{12\sqrt{3}}\sin^2 2x\right)=\lim_{t\to 0+}-\frac{1}{4}t^2\ln|t|=0$ 이므로

$\lim_{x\to 0+}\frac{h(x)+\{g(x)\}^2}{f(x)}=\lim_{x\to 0+}\frac{h(x)}{f(x)}+\lim_{x\to 0+}\frac{\{g(x)\}^2}{f(x)}=\frac{1}{4}$ 이다.

한양대학교 2024학년도 신입학전형 수시

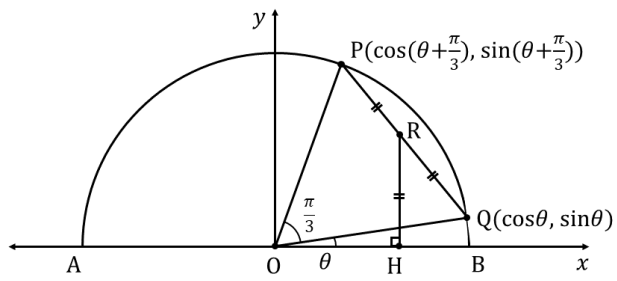
자 연 계

논 술 예 시 답 안

오후(1)-2번

1. 그림과 같이 반원을 좌표평면 위에 두면 Q의 좌표는 $(\cos\theta, \sin\theta)$이고,

P의 좌표는 $\left(\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right), \sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right)$이다. 선분PQ의 중점을 R이라 하면,



선분 RH는 선분 PQ가 지름인 반원의 반지름이므로 $\overline{\mathrm{RH}} = \frac{1}{2}$이다.

따라서 $\frac{1}{2} = \overline{\mathrm{RH}} = \frac{1}{2}\left(\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\theta\right)$이고,

삼각함수의 덧셈정리를 사용해서 정리하면 $3\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta = 2$이다.

$\sin^2\theta+\cos^2\theta = 1$이므로, 두 식으로부터 $\cos\theta = \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$, $\sin\theta = \frac{3-\sqrt{6}}{6}$을 얻는다 $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$.

2. 호 PQ 위의 점 S의 좌표는 $(\cos(\theta+t), \sin(\theta+t))$라 할 수 있다 $\left(0 \le t \le \frac{\pi}{3}\right)$. (아래 왼쪽 그림)

선분 PQ의 중점 R의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}\left(\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\theta\right), \frac{1}{2}\left(\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\theta\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 이므로

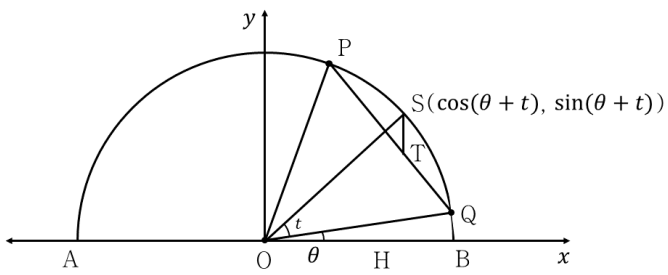
직선 OR의 기울기는 $\frac{1}{\sqrt{2}}$이고, 직선 PQ는 직선 OR과 수직이므로 직선 PQ의 기울기는 $-\sqrt{2}$이다.

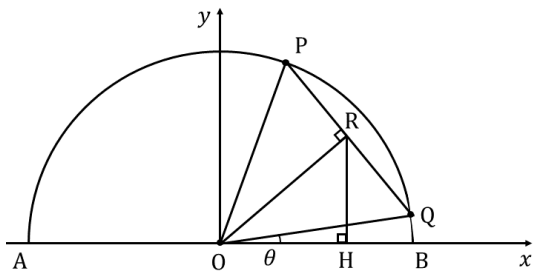
따라서 직선 PQ의 방정식은 $y-\frac{1}{2} = -\sqrt{2}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 이 되고 정리하면 $y = -\sqrt{2}\,x+\frac{3}{2}$ 이다. (아래 가운데 그림)

이로부터 T의 좌표는 $\left(\cos(\theta+t),\ -\sqrt{2}\cos(\theta+t)+\frac{3}{2}\right)$이고,

따라서 $\overline{\mathrm{ST}} = f(t) = \sin(\theta+t)-\left(-\sqrt{2}\cos(\theta+t)+\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\cos t+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t-\frac{3}{2}$이다.

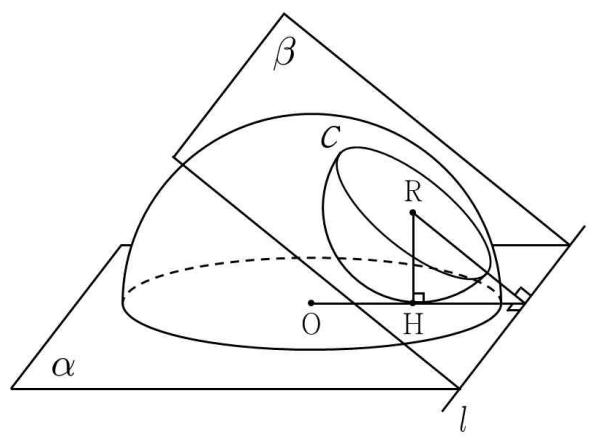
$f'(t) = -\frac{3}{2}\sin t+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t$이므로, 아래 오른쪽 증가와 감소를 나타내는 표에 따라 $\overline{\mathrm{ST}}$의 최댓값은 $\sqrt{3}-\frac{3}{2}$이다.





t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$	0	↗	$\sqrt{3}-\frac{3}{2}$	↘	0

3. 오른쪽 그림에서 직선 l과 수직이고 원의 중심 O를 포함하는 평면을 생각하면,
지름이 2인 반구와 지름이 1인 반구가 이 평면과 만나서 생기는 도형은 각각
오른쪽 아래 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=2$인 선분 AB를 지름으로 하는 지름이 2인 반구와
$\overline{\mathrm{PQ}}=1$인 선분 PQ를 지름으로 하는 반구이다.
평면 α와 평면 β가 이루는 각을 a라 하면,



그림에서 $a = \angle\mathrm{RBH} = \angle\mathrm{ORH}$이므로 $\cos a = \frac{\overline{\mathrm{RH}}}{\overline{\mathrm{OR}}}$이다.

$\overline{\mathrm{RH}} = \frac{1}{2}$이고, $\overline{\mathrm{OR}}$은 한 변의 길이가 1인 정삼각형OPQ의 높이이므로

$\overline{\mathrm{OR}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$이다. 따라서 $\cos a = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$이다.

원 C의 넓이는 $\frac{\pi}{4}$이므로, 구하는 정사영의 넓이는 $\frac{\pi}{4}\cos a = \frac{\pi}{4\sqrt{3}}$이다.

