한양대학교 2025학년도 신입학전형 수시 논술고사

자 연 계

출제 의도 및 평가 지침

오후(2)-1번

1. 출제 의도 및 문제 해설

자연계열 오후(2)-1번 문제는 고교수학 과정인 수학, 수학I, 수학II, 미적분 교과의 다항식, 이차함수, 삼각함수, 다항함수의 적분, 등비급수 단원에서 배운 기본적인 내용을 바탕으로, 배운 지식을 적절히 활용하고 창의력을 발휘하여 논리적으로 문제가 요구하는 결론에 도달할 수 있는지를 묻고 있다. 3개의 소문항으로 구성되어 있으며 평가요소는 다음과 같다.

문항 1. 수학-도형의 방정식 단원의 평행이동에 대한 지식을 이해하고 적절히 활용하기.
수학II-다항함수의 적분법 단원의 정적분을 이용해서 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하기.
문항 2. 수학-방정식과 부등식 단원의 이차함수에 대한 지식을 이용해 도형의 넓이의 최솟값을 구하기.
문항 3. 수학I-삼각함수 단원의 코사인법칙을 이용해서 삼각형의 한 변의 길이를 구하기.
미적분-수열의 극한 단원의 급수에 대한 지식을 활용해 주어진 등비급수를 분석하기.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	30	m과 n의 값을 구했는가?	15
		두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구했는가?	15
2	30	삼각형 PQR의 넓이를 x에 대한 식으로 나타내었는가?	15
		삼각형 PQR의 넓이가 최소가 되게 하는 x의 값을 구했는가?	15
3	40	삼각형 $\mathrm{A_1B_1C_1}$과 $\mathrm{A_2B_2C_2}$의 넓이의 비 r을 t에 대한 식으로 나타내었는가?	25
		급수 $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$의 합이 $3s_1$이 되도록 하는 t의 값을 구했는가?	15

3. 출제 근거

고등학교에서 고교과정의 수학을 정상적으로 이수한 학생이라면 충분히 해결할 수 있는 문제들로 구성되었으며, 교과서 수학, 수학I, 수학II, 미적분의 주요내용을 다루고 있다. 3개의 소문항은 교과서의 내용과 다음과 같이 연계되며, 모든 교과서에서 공통으로 다루는 내용만으로 구성되어 있다.

교과서 수학 (비상 김원경 외 14인) - 방정식과 부등식 - 이차함수의 최대, 최소 (p.63 - 66)
교과서 수학 (비상 김원경 외 14인) - 도형의 방정식 - 도형의 이동 - 평행이동 (p.141 - 143)
교과서 수학I (천재교과서 류희찬 외 9인) - 삼각함수 - 사인법칙과 코사인법칙 (p.97 - 110)
교과서 수학II (미래엔 황선욱 외 8인) - 다항함수의 적분법 - 적분법의 활용 - 넓이 (p.135 - 141)
교과서 미적분 (비상 김원경 외 14인) - 수열의 극한 - 급수 - 등비급수 (p.32 - 36)

한양대학교 2025학년도 신입학전형 수시 논술고사

자 연 계

출제 의도 및 평가 지침

오후(2)-2번

1. 출제 의도 및 문제 해설

자연계열 오후(2) [문제 2]는 고등학교 〈수학〉에서 다루는 역함수 및 고등학교 〈수학II, 미적분〉에서 다루는 미분법, 적분법에 대한 전반적인 지식에 대하여 평가하며, 모든 교과서에서 공통으로 다루는 내용을 바탕으로 출제되었다. 아래 3개의 소문항으로 구성되어 있다.

문항 1은 정적분으로 나타내어진 함수를 이용하여 함수 $f(x)$를 구하는 문제이다. 이계도함수, 삼각함수의 미분법 또는 적분법, 부분적분법에 대하여 잘 이해하였는지를 파악한다.

문항 2는 정적분으로 나타내어진 함수를 이용하여 사차함수 $p(x)$의 정적분을 구하는 문제이다. 이계도함수, 다항함수의 미분법 또는 적분법, 부분적분법에 대하여 잘 이해하였는지를 파악한다.

문항 3은 정적분과 넓이 사이의 관계를 이용하여 $p(1)$의 값을 구하는 문제이다. 함수의 증가, 역함수의 개념을 잘 이해하였는지를 파악한다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	40	함수 $f'(x)$를 구하였는가?	20
		$f(0)$의 값을 구하였는가?	20
2	30	사차함수 $p(x)$의 x^3의 계수와 x의 계수가 0임을 확인하였는가?	10
		사차함수 $p(x)$의 x^2의 계수와 상수항 사이의 관계식을 구하였는가?	10
		$\int_0^3 p(x)dx$의 값을 구하였는가?	10
3	30	닫힌구간 $[0,1]$에서 함수 $y=p(x)$의 그래프의 개형을 파악하였는가?	10
		사차함수 $p(x)$의 x^2의 계수가 만족하는 방정식을 얻었는가?	10
		$p(1)$의 값을 구하였는가?	10

3. 출제 근거

문항 1: 고등학교 수학I (2022. 지학사 홍성복 외 9인) - III. 적분 - 2. 정적분 - 01. 정적분(125~130)
고등학교 미적분 (2020. 좋은책 신사고 고성은 외 5인) - II. 미분법 - 2. 여러 가지 미분법 - 6. 이계도함수(91~92)
고등학교 미적분 (2022. 비상교육 김원경 외 14인) - III. 적분법 - 1. 여러 가지 적분법 - 03. 부분적분법(131~133)
고등학교 미적분 (2021. 지학사 홍성복 외 9인) - III. 적분법 - 1. 여러 가지 적분법 - 01. 여러 가지 함수의 부정적분(139~143)

문항 2: 고등학교 수학I (2024. 교학사 권오남 외 14인) - II. 미분 - 2. 도함수 - 01. 함수 $y=x^n$의 도함수(68~70)
고등학교 수학I (2024. 교학사 권오남 외 14인) - III. 적분 - 2. 정적분 - 02. 다항함수의 정적분(134~136)
고등학교 미적분 (2020. 좋은책 신사고 고성은 외 5인) - II. 미분법 - 2. 여러 가지 미분법 - 6. 이계도함수(91~92)
고등학교 미적분 (2020. 천재교육 이준열 외 7인) - III. 적분법 - 1. 여러 가지 적분법 - 3. 부분적분법(155~160)

문항 3: 고등학교 수학 (2020. 비상교육 김원경 외 14인) - V. 함수 - 1. 함수 - 03. 역함수(212~216)
고등학교 수학I (2022. 지학사 홍성복 외 9인) - II. 미분 - 2. 도함수의 활용 - 3. 함수의 극대와 극소(83~89)
고등학교 미적분 (2020. 천재교과서 류희찬 외 9인) - IV. 여러 가지 적분법 - 5. 넓이와 부피(183~188)

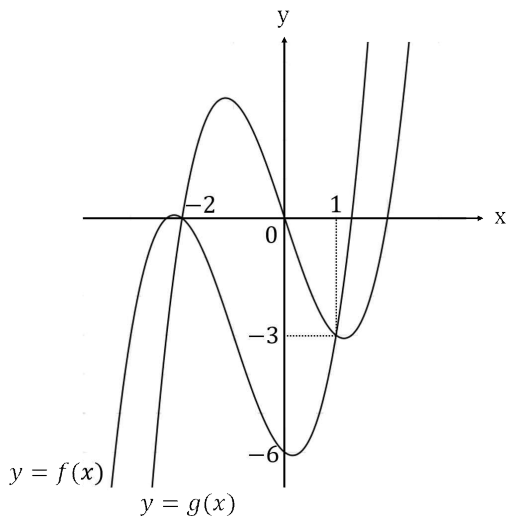
한양대학교 2024학년도 신입학전형 수시

자 연 계

논 술 예 시 답 안

오후(2)-1번

1. $f(x)=x^3+3x^2-x-6$이라 하면 $g(x)=f(x-m)+n$이다.
모든 x에 대해 $g(-x)=-g(x)$이므로, 정리하면
$3(m-1)x^2+m^3-3m^2-m+6-n=0$
이다. 이로부터 $m=1$, $n=3$이다.
이때, $g(x)=x^3-4x$ 이므로, 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점은 $(1,-3)$, $(-2,0)$
이다. 따라서 구하는 도형의 넓이는
$\int_{-2}^{1}|g(x)-f(x)|dx=-3\int_{-2}^{1}(x^2+x-2)dx=-3\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{-2}^{1}=\frac{27}{2}$이다.



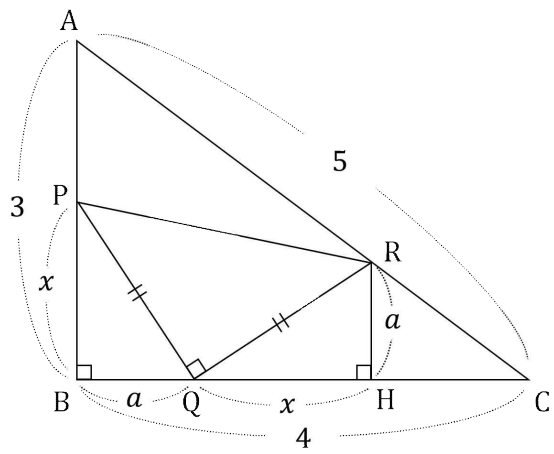
2. 점 R에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 PBQ와 삼각형 QHR은 합동이다. $\overline{HR}=\overline{BQ}=a$라 하면, $\overline{HC}=4-(x+a)$이고, $\frac{\overline{RH}}{\overline{HC}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{3}{4}$로부터

$\frac{a}{4-(x+a)}=\frac{3}{4}$이고, 따라서

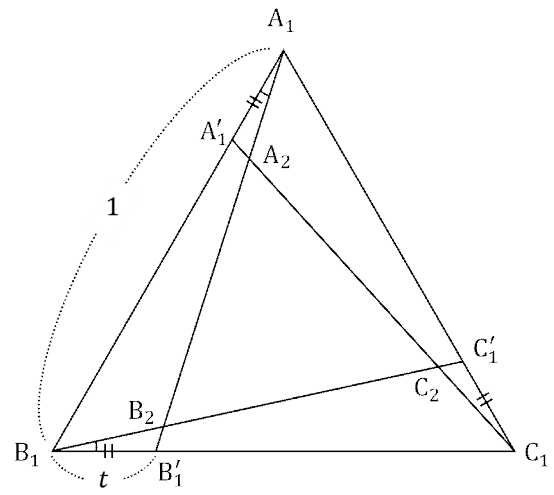
$a=\frac{12-3x}{7}$이다. 이로부터

삼각형 PQR의 넓이 = 사다리꼴 PBHR의 넓이
$-$(삼각형 PBQ의 넓이 + 삼각형 QHR의 넓이)
$=\frac{1}{2}\left(x+\frac{12-3x}{7}\right)^2-2\times\frac{1}{2}x\times\frac{12-3x}{7}$
$=\frac{1}{49}(29x^2-36x+72)$

이고, $0\le x\le 3$ 이므로, $\frac{1}{49}(29x^2-36x+72)=\frac{29}{49}\left(x-\frac{18}{29}\right)^2+\frac{36}{29}$는
$x=\frac{18}{29}$일 때, 넓이의 최솟값 $\frac{36}{29}$을 갖는다. 따라서 구하는 x의 값은 $\frac{18}{29}$이다.



3. 두 정삼각형의 넓이의 비 r을 구하는 것이므로 정삼각형 $A_1B_1C_1$의 한 변의 길이를 1이라 가정해도 좋다. 그러면 $s_1=\frac{\sqrt{3}}{4}$이고 $\overline{A_1B_1}=1$, $\overline{B_1B_1'}=t$이다.
코사인법칙에 의해
$\overline{A_1B_1'}^{\,2}=1^2+t^2-2\times1\times t\times\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$이고, 정리하면 $\overline{A_1B_1'}=\sqrt{1-t+t^2}$이다.
삼각형 $A_1B_1B_1'$과 $B_1B_2B_1'$은 닮은 삼각형이므로,
$\frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{B_1B_1'}}=\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_1B_1'}}$, 즉 $\frac{\overline{B_1B_2}}{t}=\frac{1}{\sqrt{1-t+t^2}}$이고 정리하면 $\overline{B_1B_2}=\frac{t}{\sqrt{1-t+t^2}}$.
$\frac{\overline{B_1'B_2}}{\overline{B_1B_1'}}=\frac{\overline{B_1B_1'}}{\overline{A_1B_1'}}$, 즉 $\frac{\overline{B_1'B_2}}{t}=\frac{t}{\sqrt{1-t+t^2}}$이고 정리하면 $\overline{B_1'B_2}=\frac{t^2}{\sqrt{1-t+t^2}}$.
삼각형 $A_1A_1'A_2'$과 $B_1B_1'B_2$는 합동이므로 $\overline{A_1A_2}=\overline{B_1B_2}=\frac{t}{\sqrt{1-t+t^2}}$이고



$\overline{A_2B_2}=\overline{A_1B_1'}-\overline{A_1A_2}-\overline{B_2B_1'}=\sqrt{1-t+t^2}-\frac{t}{\sqrt{1-t+t^2}}-\frac{t^2}{\sqrt{1-t+t^2}}=\frac{1-2t}{\sqrt{1-t+t^2}}$이다.
$s_2=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1-2t}{\sqrt{1-t+t^2}}\right)^2=\frac{(1-2t)^2}{1-t+t^2}\times\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{(1-2t)^2}{1-t+t^2}s_1$이므로 구하는 r은 $\frac{(1-2t)^2}{t^2-t+1}$이다.
모든 자연수 n에 대하여 $s_{n+1}=rs_n$이 성립한다. 따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}s_n$은 공비가 r인 등비급수이고 ($0<t<\frac{1}{2}$일 때, $0<r<1$임을 확인할 수 있다), $\sum_{n=1}^{\infty}s_n=\frac{s_1}{1-r}=\frac{1-t+t^2}{3t(1-t)}s_1=3s_1$을 만족시키는 t의 값은 $\frac{5-\sqrt{15}}{10}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{15}}{10}$이다.

한양대학교 2025학년도 신입학전형 수시

자 연 계

논 술 예 시 답 안

오후(2)-2번

1. 부분적분법을 이용하면

$$\int_0^x f''(t)(x-t)dt = [(-t+x)f'(t)]_{t=0}^{t=x} + \int_0^x f'(t)dt$$
$$= -(-0+x)f'(0) + f(x) - f(0)$$
$$= -f'(0)x + f(x) - f(0)$$

제시문 <가>의 조건으로부터

$$f(x) = e^x(3\sin x - \cos x) + 2(-f'(0)x + f(x) - f(0)) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t f''(t)\,dt$$

이므로

$$f(x) = -e^x(3\sin x - \cos x) + 2f'(0)x + 2f(0) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t f''(t)\,dt$$

$a = 2f'(0)$, $b = 2f(0) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t f''(t)\,dt$ 라 하면

$$f(x) = -e^x(3\sin x - \cos x) + ax + b \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

양변을 미분하면 $f'(x) = -e^x(4\sin x + 2\cos x) + a$ …… ㉡

다시 한번 미분하면 $f''(x) = -2e^x(\sin x + 3\cos x)$

㉠에 $x=0$을 대입하면 $f(0) = 1 + b$

㉡에 $x=0$을 대입하면 $f'(0) = -2 + a$이므로 $a = 2f'(0) = -4 + 2a$

따라서 $a = 4$

부분적분법을 이용하여 함수 $h(x) = (\sin x + 3\cos x)e^{2x}$의 부정적분을 구하면

$$\int h(x)dx = \frac{1}{2}(\sin x + 3\cos x)e^{2x} + \frac{1}{2}\int(-\cos x + 3\sin x)e^{2x}dx$$
$$= \frac{1}{2}(\sin x + 3\cos x)e^{2x}$$
$$+ \frac{1}{4}\left\{(-\cos x + 3\sin x)e^{2x} - \int h(x)dx\right\}$$

따라서 $\int h(x)dx = e^{2x}(\sin x + \cos x) + C$ (단, C는 상수) …… ㉢

$e^x f''(x) = -2h(x)$이므로 ㉢에 의하여

$$b = 2f(0) + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(t)\,dt = 2(1+b) + 2(e^\pi - 1) = 2b + 2e^\pi$$

따라서 $b = -2e^\pi$이고 $f(0) = 1 - 2e^\pi$

[별해] $\int_0^x f''(x)(x-t)dt = x\int_0^x f''(t)dt - \int_0^x tf''(t)dt$이므로 곱의 미분법을 이용하면

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f''(x)(x-t)dt = \int_0^x f''(t)dt = f'(x) - f'(0)$$

따라서 제시문 <가>의 조건으로부터

$f'(x) = e^x(4\sin x + 2\cos x) + 2f'(x) - 2f'(0)$, 즉,

$f'(x) = -e^x(4\sin x + 2\cos x) + 2f'(0)$ …… ㉡'

㉡'에 $x=0$을 대입하면 $f'(0) = 2$이므로

$f'(x) = -e^x(4\sin x + 2\cos x) + 4$

부분적분법을 이용하여 양변을 적분하면

$f(x) = -e^x(3\sin x - \cos x) + 4x + b$

이므로

$$1 + b = f(0) = -1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t f''(t)dt = -1 - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(t)dt$$
$$= -1 - 2(e^\pi - 1) = 1 - 2e^\pi$$

따라서 $b = -2e^\pi$이고 $f(0) = 1 - 2e^\pi$

답: $1 - 2e^\pi$

2. 부분적분법을 이용하면

$$\int_0^x p''(t)(3x-5t)dt = [(-5t+3x)p'(t)]_{t=0}^{t=x} + 5\int_0^x p'(t)dt$$
$$= -(2p'(x) + 3p'(0))x + 5p(x) - 5p(0)$$

제시문 <나>의 조건 (ㄴ)으로부터

$$4p(x) = -4x^4 + (2p'(x) + 3p'(0))x + 5p(0) - \frac{3}{2}\int_0^2 tp(t)dt \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$$p(0) = \frac{3}{2}\int_0^2 tp(t)\,dt$$

제시문 <나>의 조건 (ㄱ)에 의하여 함수 $p(x)$는 사차함수이다.

$p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + k$ $(a \neq 0)$라 하면

$p'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$, $p''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$ …… ㉡

㉠의 양변을 미분하면

$2p'(x) = -16x^3 + 2p''(x)x + 3p'(0)$ …… ㉢

$x=0$을 대입하면 $2p'(0) = 3p'(0)$이므로 $d = p'(0) = 0$

㉢에 ㉡을 대입하면

$$8ax^3 + 6bx^2 + 4cx = -16x^3 + 2(12ax^2 + 6bx + 2c)x$$
$$= (-16 + 24a)x^3 + 12bx^2 + 4cx$$

따라서 $8a = -16 + 24a$, $6b = 12b$, 즉, $a = 1$, $b = 0$

$p(x) = x^4 + cx^2 + k$를 $k = \frac{3}{2}\int_0^2 p(t)\,t\,dt$에 대입하면

$$k = \frac{3}{2}\int_0^2 (t^5 + ct^3 + kt)\,dt = \frac{3}{2}\left[\frac{1}{6}t^6 + \frac{c}{4}t^4 + \frac{k}{2}t^2\right]_0^2 = 16 + 6c + 3k$$

이므로 $k = -(3c+8)$

정리하면 $p(x) = x^4 + cx^2 - (3c+8)$ (c는 상수)

$$\int_0^3 p(x)dx = \int_0^3 (x^4 + cx^2 - (3c+8))dx$$
$$= \left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{c}{3}x^3 - (3c+8)x\right]_0^3$$
$$= \frac{243}{5} + 9c - (9c+24) = \frac{243-120}{5} = \frac{123}{5}$$

답: $\frac{123}{5}$

3. $p(x) = x^4 + cx^2 - (3c+8)$에 $x=0$ 또는 1을 대입하면

$p(0) = -(3c+8)$, $p(1) = -(2c+7)$

제시문 <나>의 조건 (ㄷ)으로부터

$-3c - 8 = p(0) < p(1) = -2c - 7$

따라서 $c > -1$이고, $0 < x < 1$이면

$p(0) < p(x) < p(1) = -2c - 7 < -5 < 0$ …… ㉠

㉠과 제시문 <나>의 조건 (ㄹ), 역함수의 그래프는 직선 $y = x$에 대칭인 성질에 의하여 x축, y축, 직선 $x=1$과 곡선 $y = q(x) = p(x)$ $(0 \le x \le 1)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\frac{159}{5}$이고

$$\int_0^1 p(x)dx = -\frac{159}{5}$$

한편, $\int_0^1 p(x)dx = \int_0^1 (x^4 + cx^2 - (3c+8))dx = -\frac{39}{5} - \frac{8c}{3}$

따라서 $\frac{8c}{3} + \frac{39}{5} = \frac{159}{5}$

즉, $c = 9$이고 $p(x) = x^4 + 9x^2 - 35$, $p(1) = -25$

답: -25