한양대학교 2025학년도 신입학전형 수시 논술고사

자 연 계

출제 의도 및 평가 지침

오후(1)-1번

1. 출제 의도 및 문제 해설

이 문제는 고등학교 교과과정을 성실히 이수한 학생이라면 충분히 해결할 수 있는 문제들로 구성되었으며, 모든 교과서에서 공통으로 다루는 내용을 바탕으로 출제되었다. 고교수학과정 중 “수학II - 적분” 단원의 정적분과 “수학 - 경우의 수” 단원의 경우의 수를 구하는 문제, “수학 - 경우의 수” 단원의 조합의 수를 구하는 문제, “수학 II”의 함수의 연속, 미분계수, “미적분”의 치환적분법과 같은 기본적이고 핵심적인 내용을 활용하는 방법을 묻고 있다. 아래 3개의 소문항으로 구성되어 있다.

문항 1. 다항식의 정적분의 값을 구하여 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구하는 것을 묻는다.
문항 2. 조합의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 최단거리로 가는 경우의 수를 묻는다.
문항 3. 함수의 형태를 잘 생각하여, 연속과 미분가능성을 이용하여 함수를 찾고, 간단한 치환적분법을 활용할 수 있는지를 묻는다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	30	정적분 $\int_1^2 (2x^3+3ax^2+bx)\,dx$ 을 구하였는가?	20
		조건을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구하였는가?	10
2	30	조건을 만족시키면서 최단거리로 가는 경우의 수 $f(n)$, $g(n)$을 조합의 수를 이용하여 구하였는가?	20
		$f(6)$와 $\sqrt{2\times g(32)}$ 의 값을 구하였는가?	10
3	40	미분가능성을 이용하여 함수를 잘 찾았는가?	20
		치환적분을 이용하여 적분을 잘 구하였는가?	20

3. 출제근거

문항 1. 교과서 수학II(비상 김원경 외 14인) - 적분 - 부정적분과 정적분 - 정적분 (p. 112 - 118)
교과서 수학II(좋은책 신사고 고성은 외 6인) - 다항함수의 적분법 - 정적분 - 정적분 (p. 119 - 122)
교과서 수학(금성출판사 배종숙 외 6인) - 경우의 수 - 경우의 수 - 경우의 수 (p. 263 - 267)
교과서 수학(좋은책 신사고 고성은 외 6인) - 순열과 조합 - 순열과 조합 - 경우의 수 (p. 249 - 252)

문항 2. 교과서 수학(금성출판사 배종숙 외 6인) - 경우의 수 - 경우의 수 - 조합 (p. 272 - 276)
교과서 수학(좋은책 신사고 고성은 외 6인) - 순열과 조합 - 순열과 조합 - 조합 (p. 257 - 260)

문항 3. 교과서 수학II (천재교육 이준열 외 9인) - 함수의 극한과 연속 - 함수의 연속 - 연속함수 (p.30 - 34)
교과서 수학II (천재교육 이준열 외 9인) - 미분 - 미분계수와 도함수 - 미분계수 (p. 53 - 59)
교과서 수학II (천재교육 이준열 외 9인) - 적분 - 부정적분과 정적분 - 정적분 (p. 121 - 127)
교과서 미적분 (천재교육 이준열 외 7인) - 미적분 - 적분법 - 여러 가지 적분법 - 치환적분법 (p. 147- 154)

한양대학교 2025학년도 신입학전형 수시 논술고사

자 연 계

출제 의도 및 평가 지침

오후(1)-2번

1. 출제 의도 및 문제 해설

자연계열 오후(1)-2번 문제는 고교 수학과정 중 “미적분 - 수열의 극한” 단원의 극한값의 계산, “미적분 - 도함수의 활용” 단원의 접선의 방정식, “기하 - 이차곡선” 단원의 포물선, 포물선과 직선, “기하 - 평면벡터” 단원의 평면벡터의 성분과 내적, “기하 - 공간도형” 단원의 직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면의 위치 관계와 정사영이 주요 내용이며, 아래 3개의 소문항으로 구성되어 있다.

문항 1. 주어진 두 곡선의 교점과 그 교점에서의 접선을 구하고, 그 교점에서 각각의 곡선에 접하는 접선의 방정식을 이용하여 얻은 수열의 극한값을 계산할 수 있는지를 묻고 있다. 도함수를 활용하여 주어진 곡선의 한 점 위에서의 접선의 방정식을 구할 수 있는지와 수열의 극한에 대한 기본적인 이해를 평가하는 문제다.

문항 2. 포물선 위의 한 점에서 접하는 접선의 방정식을 이용하여 주어진 점의 좌표를 구하고, 내적을 활용하여 벡터 간 위치 관계를 파악할 수 있는지와 그 과정에서 포물선의 성질을 활용할 수 있는지를 묻고 있다. 포물선과 그 준선과의 관계, 포물선과 직선의 위치 관계에 대한 지식과 주어진 점의 좌표를 가지고 평면벡터로 표현하는 능력 및 벡터의 위치 관계를 내적을 이용하여 파악할 수 있는지를 평가하는 문제다.

문항 3. 공간에서 직선과 직선의 위치 관계, 도형의 넓이와 그 정사영의 넓이 사이의 관계를 이용하여 주어진 두 평면의 이면각을 구할 수 있는지 묻고 있다. 한 평면을 결정하는 두 직선의 위치 관계에 대한 이해도와 정사영을 이용하여 이면각의 크기를 계산하는 능력을 평가하는 문제다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	30	$y=\sin x$와 $y=\frac{n}{n+1}\tan x$의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?	10
		S_n을 정확히 구하고 n^2S_n의 극한값을 계산하였는가?	20
2	30	점 P′의 좌표를 x_1, y_1과 p에 대하여 나타낼 수 있는가?	10
		평면벡터의 내적을 이용하여 x_1을 p에 대한 식으로 표현하였는가?	20
3	40	선분 PQ와 CD가 평행함을 보였는가?	20
		선분 PQ의 길이를 구하였는가?	10
		삼각형 APC와 PEG의 크기로부터 $\cos\theta$를 정확히 구하였는가?	10

3. 출제 근거

이 문제는 고등학교에서 고교과정의 수학을 정상적으로 이수한 학생이라면 충분히 해결할 수 있는 문제들로 구성되었으며, 교과서 미적분, 기하의 주요 내용을 다루고 있다. 3개의 소문항은 아래에 주어진 교과서의 내용과 연계되며, 모든 교과서에서 공통으로 다루는 내용만으로 구성되어 있다.

교과서 미적분(천재교육 이준열 외 7인) - 수열의 극한 - 수열의 극한 - 극한값의 계산 (p.17 - 21)
교과서 미적분(지학사 홍성복 외 10인) - 미분법 - 도함수의 활용 - 접선의 방정식 (p.110 - 113)
교과서 기하(좋은책신사고 고성은 외 5인) - 이차곡선 - 포물선 - 포물선 (p.11 - 15)
교과서 기하(미래엔 황선욱 외 8인) - 이차곡선 - 이차곡선과 직선 - 포물선과 직선 (p.16 - 19)
교과서 기하(천재교육 이준열 외 7인) - 평면벡터 - 평면벡터의 성분과 내적 - 위치벡터와 평면벡터의 성분 (p.79 - 87)
교과서 기하(좋은책신사고 고성은 외 5인) - 벡터 - 평면벡터의 성분과 내적 - 평면벡터의 내적 (p.83 - 91)
교과서 기하(미래엔 황선욱 외 8인) - 공간도형과 공간좌표 - 공간도형 - 위치관계 (p.123 - 129)
교과서 기하(비상교육 김원경 외 14인) - 공간도형과 공간좌표 - 공간도형 - 정사영 (p.118 - 121)

한양대학교 2025학년도 신입학전형 수시

자 연 계

논 술 예 시 답 안

오후(1)-1번

1. $\int_1^2 (2x^3+3ax^2+bx)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^4+ax^3+\frac{1}{2}bx^2\right]_1^2 = \frac{1}{2}(2^4-1^4)+a(2^3-1^3)+\frac{1}{2}b(2^2-1^2) = 7a+\frac{3b+15}{2}$ 이다.

$a=1$ 인 경우, $13 \le \frac{3b+15}{2} \le 23$을 만족할 필요충분조건은 $11 \le 3b \le 31$이므로 $b \in \{4,5\}$일 때 부등식을 만족한다.

$a=2$ 인 경우, $6 \le \frac{3b+15}{2} \le 16$을 만족할 필요충분조건은 $-3 \le 3b \le 17$이므로 $b \in \{1,2,3,4,5\}$일 때 부등식을 만족한다.

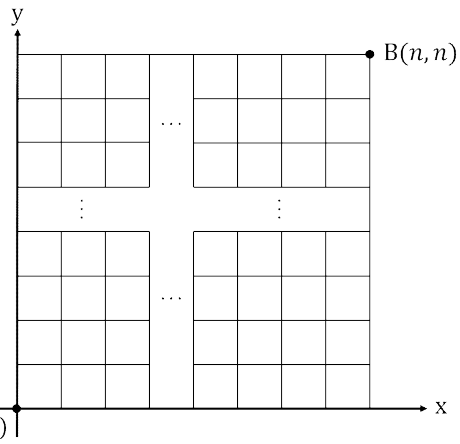
$a=3$ 인 경우, $-1 \le \frac{3b+15}{2} \le 9$을 만족할 필요충분조건은 $-17 \le 3b \le 3$이므로 $b \in \{1\}$일 때 부등식을 만족한다.

$a=4$ 인 경우 $28+\frac{3b+15}{2} > 30$ 이므로 주어진 부등식을 만족하지 않는다.

$a=5$ 인 경우 $35+\frac{3b+15}{2} > 30$ 이므로 주어진 부등식을 만족하지 않는다.

그러므로 부등식을 만족하는 경우는 8가지이다.

2. 주어진 도로망을 오른쪽 그림과 같이 좌표평면에 놓는 것을 고려하자.



방향이 바뀌는 지점이 정확히 4번일 때를 고려하자. 처음 오른쪽으로 움직이기 시작하면 오른쪽에서 위쪽으로 방향이 바뀌는 지점이 두 번 생기며 이 지점의 x좌표는 $0, n$을 제외한 서로 다른 두 수이다. 또한 위쪽에서 오른쪽으로 방향이 바뀌는 지점은 두 번 생기며, 이 지점의 y좌표는 하나는 n이고 다른 하나는 $0, n$을 제외한 수이다.

그러므로 경우의 수는

${}_{n-1}C_2 \times {}_{n-1}C_1 = \frac{(n-1)^2(n-2)}{2}$ 이다. 위쪽으로 움직이기 시작하는 경우의 수도 대칭으로 같으므로 방향이 바뀌는 지점이 정확히 4번인 총 경우의 수는 $f(n) = (n-1)^2(n-2)$ 이다.

방향이 바뀌는 지점이 정확히 7번일 때를 고려하자. 처음 오른쪽으로 움직이기 시작하면 오른쪽에서 위쪽으로 방향이 바뀌는 지점이 세 번 생기며 이 지점의 x좌표는 $0, n$을 제외한 서로 다른 세 수이다. 또한 위쪽에서 오른쪽으로 방향이 바뀌는 지점도 세 번 생기며, 이 지점의 y좌표는 $0, n$을 제외한 서로 다른 세 수이다. 그러므로 경우의 수는

${}_{n-1}C_3 \times {}_{n-1}C_3 = \frac{(n-1)^2(n-2)^2(n-3)^2}{36}$ 이다. 위쪽으로 움직이기 시작하는 경우의 수도 대칭으로 같으므로 방향이 바뀌는 지점이 정확히 7번인 총 경우의 수는 $g(n) = \frac{(n-1)^2(n-2)^2(n-3)^2}{18}$ 이다.

$f(6) = (6-1)^2(6-2) = 100$ 이고, $\sqrt{2 \times g(32)} = \sqrt{2 \times \frac{(32-1)^2(32-2)^2(32-3)^2}{18}} = \frac{31 \times 30 \times 29}{3} = 8990$이다.

3. $a_1=0$, $a_2=3$, $a_3=5$, $a_4=\frac{19}{3}$, $a_5=\frac{65}{9}$ 이다. 구간 $[a_1,a_2)$와 $[a_2,a_3)$를 살펴보자.

$g(x)=ax(x-x_0)(x-3)$이라 하자.

함수 $f(x)$는 $0\le x<3$에서 $f(x)=ax(x-x_0)(x-3)$이고

$$3\le x<5\text{에서 } f(x)=\frac{2}{3}f\left(\frac{3}{2}(x-5)+3\right)=\frac{2}{3}f\left(\frac{3}{2}(x-3)\right)=\frac{2}{3}\times a\times\frac{3}{2}(x-3)\left(\frac{3}{2}(x-3)-x_0\right)\left(\frac{3}{2}(x-3)-3\right)$$
$$=\frac{3a}{4}(x-3)(3x-9-2x_0)(x-5)$$

이다. f가 닫힌구간 $[a_1,a_5]$에서 연속이려면 $\lim_{x\to3-}f(x)=f(3)$이고, 열린구간 (a_1,a_5)에서 미분가능하려면

$\lim_{x\to3-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to3+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$ 이어야 한다. 위 식에서 $\lim_{x\to3-}f(x)=f(3)=0$은 확인할 수 있다.

$\lim_{x\to3-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to3-}ax(x-x_0)=3a(3-x_0)$, $\lim_{x\to3+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to3+}\frac{3a}{4}(3x-9-2x_0)(x-5)=3ax_0$이므로 $x_0=\frac{3}{2}$이고,

$g'(0)g'(3)=9$와 $g'(0)>0$를 이용하면 $a=\frac{2}{3}$이다. 다시 정리하면,

$0\le x<3$에서 $f(x)=\frac{2}{3}x(x-\frac{3}{2})(x-3)$이고, $3\le x<5$에서 $f(x)=\frac{3}{2}(x-3)(x-4)(x-5)$가 된다.

이와 같은 방법으로 $x=a_3$, $x=a_4$에서 함수 $f(x)$가 연속이고 미분가능함을 확인할 수 있다.

$f(x)$는 닫힌구간 $[a_1,a_5]$에서 연속이므로, $f(a_5)=0$이다.

$\int_{a_1}^{a_5}|f(x)|\,dx=\sum_{k=1}^{4}\int_{a_k}^{a_{k+1}}|f(x)|\,dx$을 구하면 된다.

$$\int_0^3\left|\frac{2}{3}x(x-\frac{3}{2})(x-3)\right|dx=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{3}{2}}x(x-\frac{3}{2})(x-3)\,dx=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{3}{2}}\left(x^3-\frac{9}{2}x^2+\frac{9}{2}x\right)dx=\frac{4}{3}\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^3+\frac{9}{4}x^2\right]_0^{\frac{3}{2}}=\frac{27}{16}$$

$\int_{a_2}^{a_3}|f(x)|dx=\int_{a_2}^{a_3}\frac{2}{3}\left|f\left(\frac{3}{2}(x-a_3)+3\right)\right|dx$를 적분하기 위해서 $y=\frac{3}{2}(x-a_3)+3$이라 치환하자. $\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}$이고,

적분구간을 확인하면 $\frac{3}{2}(a_3-a_3)+3=3$이고 $\frac{3}{2}(a_2-a_3)+3=0$이므로

$$\int_{a_2}^{a_3}|f(x)|dx=\int_{a_2}^{a_3}\frac{2}{3}\left|f\left(\frac{3}{2}(x-a_3)+3\right)\right|dx=\int_0^3\frac{4}{9}|f(y)|\,dy=\frac{4}{9}\int_0^3|f(x)|\,dx$$

이와 같은 과정을 반복하여

$$\int_{a_3}^{a_4}|f(x)|dx=\int_{a_3}^{a_4}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left|f\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2(x-a_4)+3\right)\right|dx=\int_0^3\left(\frac{4}{9}\right)^2|f(y)|\,dy=\left(\frac{4}{9}\right)^2\int_0^3|f(x)|\,dx$$

$$\int_{a_4}^{a_5}|f(x)|dx=\int_{a_4}^{a_5}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left|f\left(\left(\frac{3}{2}\right)^3(x-a_5)+3\right)\right|dx=\int_0^3\left(\frac{4}{9}\right)^3|f(y)|\,dy=\left(\frac{4}{9}\right)^3\int_0^3|f(x)|\,dx$$

를 얻는다. 따라서

$$\int_{a_1}^{a_5}|f(x)|\,dx=\sum_{k=1}^{4}\int_{a_k}^{a_{k+1}}|f(x)|\,dx=\int_0^3|f(x)|\,dx\sum_{k=1}^{4}(\frac{4}{9})^{k-1}=\frac{27}{16}\sum_{k=1}^{4}(\frac{4}{9})^{k-1}$$
$$=\frac{27}{16}\times\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^4}{1-\frac{4}{9}}=\frac{27}{16}\times\frac{9^4-4^4}{9^4-4\times9^3}=\frac{3^3(6561-256)}{2^4\times3^6\times5}=\frac{1261}{2^4\times3^3}=\frac{97\times13}{2^4\times3^3}=\frac{1261}{432}$$

이다.

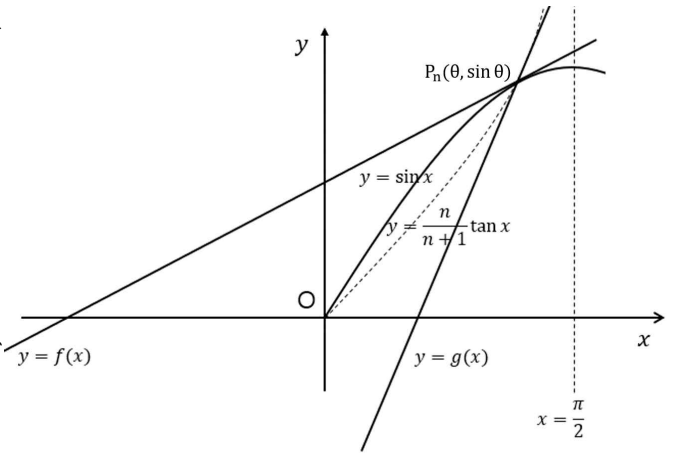
한양대학교 2025학년도 신입학전형 수시

자 연 계

논 술 예 시 답 안

오후(1)-2번

1. 점 P_n의 x좌표를 θ라 하면 $\sin\theta=\frac{n}{n+1}\tan\theta$이므로 $\cos\theta=\frac{n}{n+1}$이다. 직선 l_1, l_2의 방정식을 각각 $y=f(x)$, $y=g(x)$라고 하면



$f(x)=(\cos\theta)(x-\theta)+\sin\theta$,

$g(x)=\frac{n}{n+1}(\sec^2\theta)(x-\theta)+\sin\theta=\sec\theta(x-\theta)+\sin\theta$이다.

그러므로 두 직선 l_1, l_2와 x축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이 S_n은

$S_n=\frac{1}{2}\sin\theta\times$(직선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 x절편 사이의 거리) 임을 알 수 있다.

이때, $f(x)=0 \Leftrightarrow x=\theta-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $g(x)=0 \Leftrightarrow x=\theta-\sin\theta cos\theta$이므로

$S_n=\frac{1}{2}\sin^2\theta\times\left(\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta\right)=\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\right)\left(\frac{n+1}{n}-\frac{n}{n+1}\right)=\frac{(2n+1)^2}{2n(n+1)^3}$이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty} n^2 S_n=2$이다.

2. 포물선 $y^2=4px$위의 점 $P(x_1, y_1)$에서의 접선은 $y_1y=2p(x+x_1)$이므로 이 직선이 직선 $x=-p$와 만나는 점의 좌표는 $\left(-p, \frac{2p(x_1-p)}{y_1}\right)$이다. 점 P′의 x좌표를 x_2라 하면 주어진 조건에 의하여 $\left(\frac{2p(x_1-p)}{y_1}\right)^2=4px_2$를 만족시키고, $y_1^2=4px_1$이므로 $x_2=\frac{(x_1-p)^2}{4x_1}$을 얻는다. 따라서 점 P′의 좌표는 $\left(\frac{(x_1-p)^2}{4x_1}, \frac{2p(x_1-p)}{y_1}\right)$이다.

초점 F의 좌표는 $(p, 0)$이므로, $\overrightarrow{FP}=(x_1-p, y_1)$, $\overrightarrow{FP'}=\left(\frac{(x_1-p)^2}{4x_1}-p, \frac{2p(x_1-p)}{y_1}\right)$ 이다. 이때 두 벡터가 이루는 각의 크기가 θ이므로 $\cos\theta=\frac{\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FP'}}{|\overrightarrow{FP}||\overrightarrow{FP'}|}$이다. 직선 $x=-p$는 포물선의 준선이므로 포물선의 성질에 의해

$|\overrightarrow{FP}|=$(점 P에서 $x=-p$에 이르는 거리)$=x_1+p$이고 마찬가지로

$|\overrightarrow{FP'}|=x_2+p=\frac{(x_1-p)^2}{4x_1}+p$이다.

$\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FP'}=\frac{(x_1-p)^3}{4x_1}+p(x_1-p)$ 이므로, $\cos\theta=\frac{x_1-p}{x_1+p}$를 얻는다. $\cos\theta=\frac{1}{5}$ 이므로 $x_1=\frac{3p}{2}$이다.

3. 직선 CP와 직선 DQ가 한 점에서 만나므로, 이 두 직선은 하나의 평면을 결정한다.

즉, 직선 CD와 직선 PQ는 한 평면 위에 있다. 이 두 직선은 평행한 두 평면 ABCD와 EFGH에 각각 포함되어 있으므로, 직선 CD와 직선 PQ는 평행함을 알 수 있다.

또한, 직선 CD는 직선 GH와 평행하므로, 직선 PQ와 직선 GH는 평행하다. 그러므로

점 R에서 평면 EFGH에 내린 수선의 발을 R′이라 하면, 삼각형 R′PQ와 R′GH는 서로 닮은 삼각형임을 알 수 있다.

한편, 직선 RR′과 직선 DH는 평행하므로, 삼각형 QRR′과 삼각형 QDH는 서로 닮은 삼각형이다. 그러므로 $\overline{DR}:\overline{RQ}=4:3$으로부터 $\overline{HR'}:\overline{R'Q}=4:3$임을 알 수 있고 따라서 $\overline{PQ}:\overline{GH}=3:4$이다. $\overline{GH}=4$이므로 $\overline{PQ}=\overline{FQ}=3$이고,

그러므로 $\overline{PG}=\sqrt{\overline{PQ}^2+\overline{QG}^2}=\sqrt{10}$이다. 그러므로 $\overline{CP}=\sqrt{\overline{PG}^2+\overline{CG}^2}=\sqrt{26}$이다.

여기서 삼각형 APC를 보면 이는 $\overline{AP}=\overline{PC}=\sqrt{26}$, $\overline{AC}=4\sqrt{2}$인 이등변삼각형이다.

점 P에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H′라 하면 $\overline{PH'}=\sqrt{\overline{AP}^2-\overline{AH'}^2}=3\sqrt{2}$이므로

삼각형 APC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{PH'}\times\overline{AC}=12$이다.

이때 삼각형 APC의 면 EFGH 위로의 정사영은 삼각형 PEG이고 이는 $\overline{PE}=\overline{PG}=\sqrt{10}$, $\overline{EG}=4\sqrt{2}$인 이등변삼각형이다. 비슷하게 점 P에서 선분 EG에 내린 수선의 발을 H″라 하면, $\overline{PH''}=\sqrt{\overline{PE}^2-\overline{EH''}^2}=\sqrt{2}$이므로 삼각형 PEG의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{PH''}\times\overline{EG}=4$이다.

따라서 $\cos\theta=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$이다.