한양대학교 2025학년도 신입학전형 수시 논술고사

자 연 계

출제 의도 및 평가 지침

오전-1번

1. 출제 의도 및 문제 해설

이 문제는 고교과정의 수학을 정상적으로 이수한 학생이라면 충분히 해결할 수 있는 문제들로 구성되었으며, 모든 교과서에서 공통으로 다루는 내용을 바탕으로 출제되었다. 고교수학과정 중 “수학Ⅰ-수열” 단원에서 배운 수열의 합, “확률과 통계-확률분포” 단원에서 배운 이산확률변수의 기댓값과 분산의 개념을 잘 이해하고 활용할 수 있는지를 묻고 있다. 아래 3개의 소문항으로 구성되어 있다.

문항1. A_n의 원소의 개수를 n에 대한 식으로 추측하여 주어진 조건을 만족하는 상자 안에 들어있는 카드의 개수 r을 구하는 문제이다.

문항2. 확률의 정의를 이용해 이산확률변수 X의 확률분포를 구하고 최종적으로 X의 분산을 구하는 문제이다.

문항3. $\sum_{n=1}^{20} a_n$을 자연수의 거듭제곱의 합으로 표현될 수 있음을 파악하고 이 값을 구하는 문제이다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	30	A_n의 원소의 개수를 n에 대한 식으로 표현할 수 있음을 파악하고 상자에 들어있는 10^5보다 크고 10^9보다 작은 수가 적혀 있는 카드의 최대 개수를 구할 수 있는가?	15
		문제의 주어진 확률을 만족하는 카드의 개수 r을 모두 구하고 그 중 문제의 조건에 맞는 r을 찾을 수 있는가?	15
2	40	이산확률변수 X의 확률분포를 정확히 구하였는가?	20
		$\mathrm{V}(X)$를 정확히 구하였는가?	20
3	30	a_n을 자연수의 거듭제곱 형태로 표현할 수 있음을 파악할 수 있는가?	20
		$\sum_{n=1}^{20} a_n$을 정확히 구하였는가?	10

3. 출제 근거

문항 1. 교과서 수학Ⅰ (천재교과서 류희찬 외 10인) - 지수함수와 로그함수 - 상용로그 - 상용로그의 뜻 (p.36~37)

문항 1. 교과서 수학Ⅰ (천재교과서 류희찬 외 10인) - 수열 - 수열의 뜻 - 수열의 일반항 (p.121~122)

문항 1. 교과서 확률과 통계 (미래앤 황선욱 외 9인) - 확률 - 확률의 뜻과 활용 - 수학적 확률 (p.45~46)

문항 2. 교과서 확률과 통계 (미래앤 황선욱 외 9인) - 통계 - 확률분포 - 이산확률변수의 확률분포 (p.81~82)

문항 2. 교과서 확률과 통계 (미래앤 황선욱 외 9인) - 통계 - 확률분포 - 이산확률변수의 기댓값과 표준편차 - 이산확률변수 X의 분산과 표준편차 (p.86~88)

문항 3. 교과서 수학Ⅰ (천재교과서 류희찬 외 10인) - 수열 - 수열의 합 - 여러 가지 수열의 합 - 자연수의 거듭제곱의 합 (p.143~145)

한양대학교 2025학년도 신입학전형 수시 논술고사

자 연 계

출제 의도 및 평가 지침

오전-2번

1. 출제 의도 및 문제 해설

이 문제는 고등학교에서 고교과정의 수학을 정상적으로 이수한 학생이라면 충분히 해결할 수 있는 문제들로 구성되었으며, 교과서 수학 I과 미적분의 주요내용을 다루고 있다. 3개의 문항은 모든 교과서에서 공통으로 다루는 내용만으로 구성되어 있다.

1번 문제에서는 주어진 곡선의 접선의 방정식을 구하고 x절편을 계산하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는지를 묻는다.
2번 문제에서는 수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합이 특정한 규칙에 의해 주어졌을 때, 수열의 일반항을 구할 수 있는지를 묻는다.
3번 문제에서는 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 통하여 주어진 극한값을 정적분으로 표현하고 정적분을 구할 수 있는지를 묻는다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	40	두 접점의 x좌표를 잘 구하였는가?	20
		삼각형의 넓이를 잘 구하였는가?	20
2	40	선분 PQ 위의 점 중 x좌표가 정수인 점의 개수 T_n을 구하였는가?	20
		수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하였는가?	20
3	20	주어진 극한값을 정적분으로 잘 표현하였는가?	10
		정적분을 구하였는가?	10

3. 출제 근거

교과서 수학 I (교학사 권오남 외 14인) - 수열 - 등차수열과 등비수열 (p.116 - 125)
교과서 수학 I (좋은책신사고 고성은 외 6인) - 수열 - 등차수열과 등비수열 (p.113 - 121)
교과서 미적분 (비상교육 김원경 외 14인) - 미분법 - 여러 가지 미분법 (p.75 - 78)
교과서 미적분 (비상교육 김원경 외 14인) - 미분법 - 도함수의 활용 (p.96 - 98)
교과서 미적분 (비상교육 김원경 외 14인) - 적분법 - 여러 가지 적분법 (p.134 - 137)
교과서 미적분 (비상교육 김원경 외 14인) - 적분법 - 정적분의 활용 (p.143 - 146)

한양대학교 2025학년도 신입학전형 수시

자 연 계

논 술 예 시 답 안

오전-1번

1. A_n의 원소의 개수를 b_n이라고 할 때, $b_1=1, b_2=2$이고 A_3에는 숫자 1이 1번 나타나는 원소가 1개, 2번 나타나는 원소가 2개, 3번 나타나는 원소가 1개 있으므로 $b_3=4$이다. A_4에는 숫자 1이 2번 나타나는 원소가 2개, 3번 나타나는 원소가 3개, 4번 나타나는 원소가 1개 있으므로 $b_4=6$이다. A_5에는 숫자 1이 3번 나타나는 원소가 3개, 4번 나타나는 원소가 4개, 5번 나타나는 원소가 1개 있으므로 $b_5=8$이다. 같은 방법으로 $n\geq 3$일 때 A_n의 원소는 숫자 1이 $n-2$번, $n-1$번, n번 나타나는 원소로 구분할 수 있다. 숫자 1이 $n-2$번 나타나는 원소의 개수는 일의 자리와 최고자리를 제외한 $n-2$개의 자리 중 $n-1$개는 1이고 0이 1번만 들어가는 경우의 수이며, 이는 $n-2$이다. 숫자 1이 $n-1$번 나타나는 원소의 개수는 일의 자리와 최고자리를 제외한 나머지 $n-2$개의 자리 중 0이 0번 또는 1번 들어가고 나머지가 1로 나타나는 경우의 수이며, 이는 $(n-2)+1=n-1$이다. 마지막으로 숫자 1이 n번 나타나는 원소의 개수는 모든 자릿수에 1이 나타나는 경우의 수이며, 이는 1이다.

따라서 $n\geq 3$일 때 $b_n=(n-2)+(n-1)+1=2(n-1)$이다. 10^5보다 작은 수가 적혀 있는 카드의 개수는

$\sum_{k=1}^{5} b_k = b_1+b_2+\sum_{k=3}^{5} b_k = 1-2\times 5+2\times\frac{5\times 6}{2}=21$이다. 상자 안에 들어 있는 10^5보다 크고 10^9보다 작은 수가 적혀 있는 카드의 최대 개수는

$\sum_{k=6}^{9} b_k = 1-2\times 9+2\times\frac{9\times 10}{2}-21=52$이다. 구하는 확률은 다음 두 가지 경우로 나눠 생각해 볼 수 있다.

(경우 1) 상자 안에 들어 있는 10^5보다 크고 10^9보다 작은 수가 적혀 있는 카드의 수가 52보다 작은 경우에는 $\frac{r-21}{r}=\frac{4}{7}$로 r을 구할 수 있으며 이때의 r은 $3r=147$, 즉 $r=49$이다. 그러나 이는 $r>60$이라는 문제의 조건에 맞지 않아 답이 아니다.

(경우 2) 상자 안에 들어 있는 10^5보다 크고 10^9보다 작은 수가 적혀 있는 카드의 수가 52인 경우에는 $\frac{52}{r}=\frac{4}{7}$로 구할 수 있으며 이때의 r은 $r=91$이다. 이는 $r>60$이라는 문제의 조건에도 부합한다. 따라서 $r=91$이다.

2. 1번 문제에 적혀있는 수열 $\{b_k\}$의 n번째 항까지의 합은 $\sum_{k=1}^{n} b_k = 1-2n+2\times\frac{n(n+1)}{2}=n^2-n+1$이고 $n^2-n+1=91$을 만족하는 자연수 n이 존재하며 이때의 n은 $n=10$이다. $n\leq 2$일 때는 숫자 0이 2번 나타나는 원소가 0개, 1번 나타나는 원소가 1개, 0번 나타나는 원소가 2개 있다. $n\geq 3$일 때 A_n의 원소 중 숫자 0이 2번 나타나는 원소가 $n-2$개, 1번 나타나는 원소가 $n-1$개, 0번 나타나는 원소가 1개이므로

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1\times 10}{91}=\frac{10}{91}$, $\mathrm{P}(X=1)=\frac{\sum_{k=2}^{10}(k-1)}{91}=\frac{\frac{10\times 11}{2}-10}{91}=\frac{45}{91}$, $\mathrm{P}(X=2)=\frac{\sum_{k=3}^{10}(k-2)}{91}=\frac{\frac{8\times 9}{2}}{91}=\frac{36}{91}$이다.

따라서 이 확률변수의 기댓값은 $\mathrm{E(X)}=\frac{45}{91}+2\times\frac{36}{91}=\frac{117}{91}=\frac{9}{7}$이며 분산은

$\mathrm{V(X)}=\left(0-\frac{9}{7}\right)^2\times\frac{10}{91}+\left(1-\frac{9}{7}\right)^2\times\frac{45}{91}+\left(2-\frac{9}{7}\right)^2\times\frac{36}{91}=\frac{81\times 10+4\times 45+25\times 36}{49\times 91}=\frac{1890}{49\times 91}=\frac{270}{637}$이다.

또는 $\mathrm{E(X^2)}=0^2\times\frac{10}{91}+1^2\times\frac{45}{91}+2^2\times\frac{36}{91}=\frac{189}{91}$임을 이용하여 $\mathrm{V(X)}=\mathrm{E(X^2)}-\{\mathrm{E(X)}\}^2=\frac{189}{91}-\frac{81}{49}=\frac{1890}{49\times 91}=\frac{270}{637}$와 같이 구할 수도 있다.

3. $a_1=1, a_2=3$이며 1번 문제에서 얻은 결과를 활용해 A_3에는 숫자 1이 1번 나타나는 원소가 1개, 2번 나타나는 원소가 2개, 3번 나타나는 원소가 1개 있으므로 $a_3=1\times 1+2\times 2+3\times 1=8$이다. A_4에는 숫자 1이 2번 나타나는 원소가 2개, 3번 나타나는 원소가 3개, 4번 나타나는 원소가 1개 있으므로 $a_4=2\times 2+3\times 3+4\times 1=17$이다. A_5에는 숫자 1이 3번 나타나는 원소가 3개, 4번 나타나는 원소가 4개, 5번 나타나는 원소가 1개 있으므로 $a_5=3\times 3+4\times 4+5\times 1=30$이다. 같은 방법으로 $n\geq 3$일 때 A_n의 원소는 숫자 1이 $n-2$번, $n-1$번, n번 나타나는 원소의 개수가 각각 $n-2$, $n-1$, 1개라는 결과를 활용하면 $n\geq 3$일 때 $a_n=(n-2)\times(n-2)+(n-1)\times(n-1)+n=2n^2-5n+5$이다. $n=2$일 때도 $a_2=3=2\times 2^2-5\times 2+5$ 이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{20} a_k &= a_1+\sum_{k=2}^{20}(2k^2-5k+5)=1+\left\{\sum_{k=1}^{20}(2k^2-5k+5)-(2\times 1^2-5\times 1+5)\right\}\\ &=2\sum_{k=1}^{20}k^2-5\sum_{k=1}^{20}k+5\times 20-2+1=2\times\frac{20\times 21\times 41}{6}-5\times\frac{20\times 21}{2}+99\\ &=5740-1050+99=4789.\end{aligned}$$

한양대학교 2025학년도 신입학전형 수시

자 연 계

논 술 예 시 답 안

오전-2번

1. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(s,f(s))$ $(s\neq t)$에서의 접선의 방정식은

$$y=f'(s)(x-s)+f(s)=-\frac{2s}{(s^2+1)^2}(x-s)+\frac{1}{s^2+1}$$

이고 접선의 x절편은 $\frac{1}{2}\left(3s+\frac{1}{s}\right)$이다. 이 접선이 점 $\mathrm{A}(t,f(t))$를 지나므로

$$\frac{1}{t^2+1}=-\frac{2s}{(s^2+1)^2}(t-s)+\frac{1}{s^2+1}$$

이다. 주어진 조건에 의해 $s\neq t$이므로 위 식을 정리하면

$$\begin{aligned}\frac{1}{t^2+1}=-\frac{2s}{(s^2+1)^2}(t-s)+\frac{1}{s^2+1} &\Leftrightarrow \frac{2s(t-s)}{(s^2+1)^2}=\frac{1}{s^2+1}-\frac{1}{t^2+1}=\frac{(t-s)(t+s)}{(s^2+1)(t^2+1)}\\ &\Leftrightarrow \frac{2s}{s^2+1}=\frac{t+s}{t^2+1}\\ &\Leftrightarrow s^3+ts^2-(1+2t^2)s+t=0\\ &\Leftrightarrow (s-t)(s^2+2ts-1)=0\\ &\Leftrightarrow s^2+2ts-1=0\end{aligned}$$

을 얻는다. 따라서 $s=-t\pm\sqrt{t^2+1}$이고, 조건 $-\frac{1}{\sqrt{3}}<t<\frac{1}{\sqrt{3}}$으로부터 $t\neq -t\pm\sqrt{t^2+1}$를 확인할 수 있다. $s=-t+\sqrt{t^2+1}$일 때와 $s=-t-\sqrt{t^2+1}$일 때의 접선의 x절편은 각각 $s=-t+2\sqrt{t^2+1}$와 $s=-t-2\sqrt{t^2+1}$이다. 따라서, 삼각형의 넓이 $g(t)$는

$$g(t)=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{t^2+1}\times\frac{1}{t^2+1}=\frac{2}{\sqrt{t^2+1}}\quad\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}<t<\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

이다.

답 : $g(t)=\dfrac{2}{\sqrt{t^2+1}}$

2. $y=-3x+10n$를 $x^2+y^2=40n^4$에 대입하여 정리하면 $x^2-6nx+10n^2-4n^4=0$이므로, 두 점 P_n, Q_n의 x좌표는 $x=3n\pm\sqrt{9n^2-(10n^2-4n^4)}=3n\pm n\sqrt{4n^2-1}$이다. 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ 위의 점 중 x좌표가 정수인 점의 개수를 세기 위하여 $n\sqrt{4n^2-1}$가 정수인지 아닌지를 판단해야 한다. $n\sqrt{4n^2-1}<2n^2$임은 자명하다. 또한,

$$2n^2-1<n\sqrt{4n^2-1}\Leftrightarrow(2n^2-1)^2<n^2(4n^2-1)\Leftrightarrow 4n^4-4n^2+1<4n^4-n^2\Leftrightarrow 3n^2>1$$

이므로

$$2n^2-1<n\sqrt{4n^2-1}<2n^2$$

를 얻는다. 결론적으로, 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ 위의 점 중 x좌표가 정수인 점의 개수 T_n은 $3n-(2n^2-1)$보다 크거나 같고 $3n+2n^2-1$보다 작거나 같은 모든 정수의 개수이다. 따라서

$$T_n=3n+2n^2-1-(3n-2n^2+1)+1=4n^2-1$$

이다.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 두면 주어진 조건에 의해 $S_n=T_n+1=4n^2$이다. $a_1=S_1=4$이고 $n\geq 2$일 때 $a_n=S_n-S_{n-1}=8n-4$이므로 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 모든 자연수 n에 대해 $a_n=8n-4$이다.

답 : $a_n=8n-4$

3. 함수 g의 이계도함수 g''가 닫힌구간 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$에서 연속이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}g''\left(\frac{a_k+4}{16n}\right)=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}g''\left(\frac{k}{2n}\right)=2\int_0^{\frac{1}{2}}g''(t)\,dt$$

이다. $g'(t)=-\frac{2t}{(t^2+1)^{3/2}}$가 함수 $g''(t)$의 부정적분이므로

$$2\int_0^{\frac{1}{2}}g''(t)\,dt=2\left(g'\left(\frac{1}{2}\right)-g'(0)\right)=-\frac{16}{25}\sqrt{5}$$

를 얻는다.

답 : $-\dfrac{16}{25}\sqrt{5}$