○ 문항카드 10 (자연계열Ⅱ-1)

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	2026학년도 수시모집 논술(논술전형)	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 Ⅱ / 1번 문항	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학Ⅰ, 미적분
	핵심개념 및 용어	수열, 극한, 정적분
예상 소요 시간	40분	

2. 문항 및 자료

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속인 이계도함수 $f''(x)$를 갖고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_2^6 f''(x)\cos\frac{\pi x}{4}dx = -\frac{\pi^2}{16}$

(나) $x \geq 2$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4) = -f(x)$이다.

모든 자연수 n에 대하여 $a_n = \int_0^{4n+2} f(x)\cos\frac{\pi x}{4}dx$라 할 때, 아래 물음에 답하시오.

(1) $\int_2^6 f(x)\cos\frac{\pi x}{4}dx$의 값을 구하시오.

(2) $\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m^2}\sum_{n=1}^{m} a_n$의 값을 구하시오.

(3) 다음 부등식이 성립함을 증명하시오.

$$a_1^2 + \cdots + a_{2026}^2 \geq \frac{2025\times 2026\times 2027}{12}$$

(4) 문항(3)의 부등식의 등호가 성립할 때 다음 식의 값을 구하시오.

$$\frac{a_1+a_2}{a_1^2a_2^2} + \frac{a_3+a_4}{a_3^2a_4^2} + \cdots + \frac{a_{2025}+a_{2026}}{a_{2025}^2a_{2026}^2}$$

3. 출제 의도

이 문제는 적분으로 주어진 수열의 관계를 파악하고 이를 활용하여 주어진 수열에 관련된 수학적 성질들을 유도하여 정적분을 계산하고 수열에 관한 부등식과 합을 도출하는 문제이다. 부분적분법을 이용하여 주어진 정적분 값을 구하고 이 결과를 이용하여 주어진

수열에 대한 극한값을 찾아낼 수 있는 수리적 계산 및 사고 역량을 평가한다. 또한 자연수의 거듭제곱의 합 및 등차수열의 성질을 활용하여 주어진 부등식과 분수 꼴로 된 수열의 합을 도출할 수 있는 수리적 추론 능력 및 수리적 기획 능력을 평가한다.

1-(1). 부분적분법을 활용하여 정적분의 값을 구할 수 있는 수리적 계산 능력을 평가한다.

1-(2). 정적분의 성질, 수열의 극한의 기본 성질 및 정적분의 여러 활용을 바탕으로 제시된 극한값을 찾는 수리적 계산 및 추론 능력을 평가한다.

1-(3). 자연수의 거듭제곱의 합 및 이차함수의 최솟값을 활용하여 주어진 부등식을 도출할 수 있는 수리적 계산 능력과 수리적 추론 능력을 평가한다.

1-(4). 주어진 급수가 등차수열임을 활용하여 주어진 합을 구하는 수리적 조작 능력 및 수리적 기획 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

가. 교육과정 근거

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문	[수학] - (3) 집합과 함수 - 2 함수 [12기수03-04] 함수의 개념을 이해하고, 그 그래프를 이해한다.
1-(1)	[미적분] - (3) 미분법 - 1 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-05] 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다. [미적분] - (3) 적분법 - 1 여러 가지 적분법 [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
1-(2)	[수학 I] - (2) 삼각함수 - 1 삼각함수 [12수학 I 02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. [수학 I] - (3) 수열 - 1 등차수열과 등비수열 [12수학 I 03-02] 등차수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. [수학 I] - (3) 수열 - 2 수열의 합 [12수학 I 03-05] 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. [미적분] - (1) 수열의 극한 - 1 수열의 극한 [12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다. [미적분] - (3) 적분법 - 1 여러 가지 적분법 [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
1-(3)	[수학 I] - (3) 수열 - 2 수열의 합 [12수학 I 03-05] 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. [수학] - (2) 문자와 식 - 3 이차방정식과 이차함수 [12기수02-07] 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.
1-(4)	[수학 I] - (3) 수열 - 1 등차수열과 등비수열 [12수학 I 03-02] 등차수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. [수학 I] - (3) 수열 - 2 수열의 합 [12수학 I 03-05] 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.

나. 자료 출처

교과서 내					
참고자료	**도서명**	**저자**	**발행처**	**발행년도**	**쪽수**
고등학교 교과서	수학	김원경 외	비상교육	2019	63-66, 203-208
	수학	고성은 외	좋은책신사고	2024	64-67, 209-213
	수학 I	홍성복 외	지학사	2025	117-124, 140-143
	수학 I	이준열 외	천재교육	2022	124-130, 146-152
	미적분	고성은 외	좋은책신사고	2023	11-14, 132-138
	미적분	류희찬 외	천재교과서	2025	12-17, 164-175

5. 문항 해설

부분적분법을 이용하여 주어진 정적분 값을 구하고 이 결과를 이용하여 주어진 수열에 대한 극한값을 찾아낼 수 있는 수리적 계산 및 사고 역량을 평가한다. 또한 자연수의 거듭제곱의 합 및 등차수열의 성질을 활용하여 주어진 부등식과 분수 꼴로 된 수열의 합을 도출할 수 있는 수리적 추론 능력을 평가한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-(1)	$\int_2^6 f(x)\cos\frac{\pi x}{4}dx$의 값을 구하시오.	6점
	$\int_2^6 f(x)\cos\frac{\pi x}{4}dx = -\frac{4}{\pi}\int_2^6 f'(x)\sin\frac{\pi x}{4}dx$를 유도함.	3점
	$\int_2^6 f(x)\cos\frac{\pi x}{4}dx = 1$을 도출함.	3점
1-(2)	$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m^2}\sum_{n=1}^{m} a_n$의 값을 구하시오.	10점
	$x \geq 2$에서 $f(x+4)\cos\frac{\pi(x+4)}{4} = f(x)\cos\frac{\pi x}{4}$임을 유도함.	3점
	$a_n = n + \int_0^2 f(x)\cos\frac{\pi x}{4}dx$임을 유도함.	3점
	$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m^2}\sum_{n=1}^{m} n = \frac{1}{2}$을 유도함.	3점
	$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m^2}\sum_{n=1}^{m} a_n = \frac{1}{2}$을 도출함.	1점

하위 문항	채점 기준	배점
1-(3)	다음 부등식이 성립함을 증명하시오. $a_1^2+\cdots+a_{2026}^2 \geq \frac{2025\times2026\times2027}{12}$	12점
	자연수의 거듭제곱의 합을 이용하여 $\sum_{n=1}^{2026} n^2=\frac{2026\times2027\times4053}{6}$, $\sum_{n=1}^{2026} n=\frac{2026\times2027}{2}$, $\sum_{n=1}^{2026} 1=2026$ 을 유도함.	5점
	$a_1^2+\cdots+a_{2026}^2=2026\left(t^2+2027t+\frac{2027\times4053}{6}\right)$ $\left(t=\int_0^2 f(x)\cos\frac{\pi x}{4}dx\right)$ 를 유도함.	3점
	$a_1^2+\cdots+a_{2026}^2 \geq \frac{2025\times2026\times2027}{12}$을 증명함.	4점
1-(4)	문항(3)의 부등식의 등호가 성립할 때 다음 식의 값을 구하시오. $\frac{a_1+a_2}{a_1^2a_2^2}+\frac{a_3+a_4}{a_3^2a_4^2}+\cdots+\frac{a_{2025}+a_{2026}}{a_{2025}^2a_{2026}^2}$	12점
	$\int_0^2 f(x)\cos\frac{\pi x}{4}dx=-\frac{2027}{2}$임을 유도함.	3점
	$a_n=n-\frac{2027}{2}$임을 유도함.	1점
	$a_n=-a_{2027-n}$임을 유도함.	4점
	$\frac{a_1+a_2}{a_1^2a_2^2}+\frac{a_3+a_4}{a_3^2a_4^2}+\cdots+\frac{a_{2025}+a_{2026}}{a_{2025}^2a_{2026}^2}=0$을 도출함.	4점

7. 예시 답안 혹은 정답

1-(1) $\int_2^6 f(x)\cos\frac{\pi x}{4}dx$의 값을 구하시오.

[풀이] 부분적분법을 활용하여

$$\int_2^6 f(x)\cos\frac{\pi x}{4}dx=\frac{4}{\pi}\left[f(x)\sin\frac{\pi x}{4}\right]_2^6-\frac{4}{\pi}\int_2^6 f'(x)\sin\frac{\pi x}{4}dx$$ 이다.

조건(나)에서 $f(6)=-f(2)$이므로

$\left[f(x)\sin\frac{\pi x}{4}\right]_2^6=f(6)\sin\frac{3\pi}{2}-f(2)\sin\frac{\pi}{2}=-f(6)-f(2)=0$이다.

부분적분법을 적용하면

$$\int_2^6 f(x)\cos\frac{\pi x}{4}dx = -\frac{4}{\pi}\int_2^6 f'(x)\sin\frac{\pi x}{4}dx = -\frac{4}{\pi}\left(-\frac{4}{\pi}\left[f'(x)\cos\frac{\pi x}{4}\right]_2^6 + \frac{4}{\pi}\int_2^6 f''(x)\cos\frac{\pi x}{4}dx\right)$$

이다. 한편 $\cos\frac{\pi}{2}=0$, $\cos\frac{3\pi}{2}=0$이고 조건(가)에 의하여

$$\int_2^6 f(x)\cos\frac{\pi x}{4}dx = -\frac{4}{\pi}\left(-\frac{4}{\pi}\left(f'(6)\cos\frac{3\pi}{2}-f'(2)\cos\frac{\pi}{2}\right)+\frac{4}{\pi}\cdot\left(-\frac{\pi^2}{16}\right)\right)=1$$

이다.

1-(2) $\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m^2}\sum_{n=1}^{m}a_n$의 값을 구하시오.

[풀이] 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를 $g(x)=f(x)\cos\frac{\pi x}{4}$라 하면, $x\geq 2$인 모든 실수 x에 대해

$$g(x+4)=f(x+4)\cdot\cos\left(\pi+\frac{\pi x}{4}\right)=(-f(x))\cdot\left(-\cos\frac{\pi x}{4}\right)=g(x) \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이다.

문항(1)에 의하여

$$a_1=\int_0^6 g(x)\,dx=\int_0^2 g(x)\,dx+\int_2^6 g(x)\,dx=\int_0^2 g(x)\,dx+1$$

이고 정적분의 성질에 의해서 자연수 n에 대해

$$a_{n+1}-a_n=\int_0^{4n+6}g(x)\,dx-\int_0^{4n+2}g(x)\,dx=\int_{4n+2}^{4n+6}g(x)\,dx$$

이므로 $x=y+4n$이라 놓으면 ㉠, 문항(1)에 의하여

$$a_{n+1}-a_n=\int_2^6 g(y+4n)dy=\int_2^6 g(y)dy=\int_2^6 f(y)\cos\frac{\pi y}{4}dy=1$$ 이다.

따라서 a_n은 첫째항이 $\int_0^2 g(x)dx+1$, 공차가 1인 등차수열이다. 그러므로 등차수열의 일반항 a_n은

$$a_n=\left(\int_0^2 g(x)dx+1\right)+(n-1)\cdot 1=n+\int_0^2 g(x)dx \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$ 이다.

따라서

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m^2}\sum_{n=1}^{m}a_n=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m^2}\sum_{n=1}^{m}\left(n+\int_0^2 g(x)dx\right)=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{m^2}\sum_{n=1}^{m}n+\frac{1}{m^2}\left(\int_0^2 g(x)dx\right)\cdot\sum_{n=1}^{m}1\right)$$

이다. 한편, 자연수의 거듭제곱의 합에 의하여 자연수 m에 대해 $\sum_{n=1}^{m}n=\frac{m(m+1)}{2}$, $\sum_{n=1}^{m}1=m$ 이다. 이를 위 식에 대입하면 수열의 극한에 대한 기본 성질에 의해서

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m^2}\sum_{n=1}^{m}a_n=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{m(m+1)}{2m^2}+\frac{1}{m}\int_0^2 g(x)dx\right)=\lim_{m\to\infty}\frac{m(m+1)}{2m^2}+\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\int_0^2 g(x)dx=\frac{1}{2}$$

이다.

1-(3) 다음 부등식이 성립함을 증명하시오.

$$a_1^2+\cdots+a_{2026}^2 \geq \frac{2025\times 2026\times 2027}{12}$$

[풀이] 식 ㉡에 의하여

$$a_1^2+\cdots+a_{2026}^2=\sum_{n=1}^{2026}\left(n+\int_0^2 g(x)dx\right)^2=\sum_{n=1}^{2026}n^2+2\left(\int_0^2 g(x)dx\right)\cdot\sum_{n=1}^{2026}n+\left(\int_0^2 g(x)dx\right)^2\cdot\sum_{n=1}^{2026}1 \quad \cdots\cdots \text{㉢}$$

이다. 자연수의 거듭제곱의 합에 의하여 자연수 m에 대해 $\sum_{n=1}^{m}n^2=\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$

이므로,

$$\sum_{n=1}^{2026}n^2=\frac{2026\times 2027\times 4053}{6},\ \sum_{n=1}^{2026}n=\frac{2026\times 2027}{2},\ \sum_{n=1}^{2026}1=2026 \quad \cdots\cdots \text{㉣}$$

이다. $t=\int_0^2 g(x)dx$라 하면 ㉢, ㉣에 의하여

$$a_1^2+\cdots+a_{2026}^2=2026\left(t^2+2027t+\frac{2027\times 4053}{6}\right) \quad \cdots\cdots \text{㉤}$$

이다. 한편,

$$2026\left(t^2+2027t+\frac{2027\times 4053}{6}\right)=2026\left(\left(t+\frac{2027}{2}\right)^2+\frac{2025\times 2027}{12}\right)\geq\frac{2025\times 2026\times 2027}{12} \quad \cdots\cdots \text{㉥}$$

이다. ㉤, ㉥에 의하여

$$a_1^2+\cdots+a_{2026}^2 \geq \frac{2025\times 2026\times 2027}{12}$$

이 성립한다.

1-(4) 문항(3)의 부등식의 등호가 성립할 때 다음 식의 값을 구하시오.

$$\frac{a_1+a_2}{a_1^2a_2^2}+\frac{a_3+a_4}{a_3^2a_4^2}+\ \cdots\ +\frac{a_{2025}+a_{2026}}{a_{2025}^2a_{2026}^2}$$

[풀이] 자연수 n에 대해서 $a_{n+1}-a_n=1$이므로

$$\frac{a_n+a_{n+1}}{a_n^2a_{n+1}^2}=\frac{(a_n+a_{n+1})(a_{n+1}-a_n)}{a_n^2a_{n+1}^2}=\frac{a_{n+1}^2-a_n^2}{a_n^2a_{n+1}^2}=\frac{1}{a_n^2}-\frac{1}{a_{n+1}^2}$$

이다. 따라서

$$\frac{a_1+a_2}{a_1^2a_2^2}+\frac{a_3+a_4}{a_3^2a_4^2}+\ \cdots\ +\frac{a_{2025}+a_{2026}}{a_{2025}^2a_{2026}^2}=\frac{1}{a_1^2}-\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{a_3^2}-\frac{1}{a_4^2}+\ \cdots\ +\frac{1}{a_{2025}^2}-\frac{1}{a_{2026}^2}$$

이다.

한편, 문항(3)의 부등식에서 등호가 성립하면 ㉤과 ㉥에 의하여 $t=\int_0^2 g(x)dx=-\frac{2027}{2}$이다. 따라서 ㉡에 의하여 등차수열 a_n은

$$a_n=n+\int_0^2 g(x)dx=n-\frac{2027}{2}$$

이고 $1\leq n\leq 2026$인 자연수 n에 대해서

$$a_n+a_{2027-n}=\left(n-\frac{2027}{2}\right)+\left(2027-n-\frac{2027}{2}\right)=0$$

이므로 $a_n = -a_{2027-n}$이 성립한다. 따라서

$$\frac{a_1+a_2}{a_1^2a_2^2}+\frac{a_3+a_4}{a_3^2a_4^2}+\cdots+\frac{a_{2025}+a_{2026}}{a_{2025}^2a_{2026}^2}=\left(\frac{1}{a_1^2}-\frac{1}{a_{2026}^2}\right)+\left(-\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{a_{2025}^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{1013}^2}-\frac{1}{a_{1014}^2}\right)=0$$

이다.

○ 문항카드 11 (자연계열Ⅱ-2)

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	2026학년도 수시모집 논술(논술전형)	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 Ⅱ / 2번 문항	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 Ⅱ, 미적분
	핵심개념 및 용어	함수의 극한, 함수의 증가와 감소, 사잇값의 정리
예상 소요 시간	30분	

2. 문항 및 자료

양의 실수 전체의 집합에서 정의되고 미분가능한 함수 $f(x)=\left(\frac{x}{x+6}\right)^x$에 대하여 아래 물음에 답하시오. [30점]

(1) $\lim_{x\to 0+} f(x)$와 $\lim_{x\to\infty} f(x)$의 값을 각각 구하시오. (단, $\lim_{x\to 0+} x^x=1$이다.)

(2) 함수 $f(x)$는 구간 $(0, \infty)$에서 감소함을 보이시오.

(3) $f(c)=\frac{1}{15}$을 만족시키는 양의 실수 c가 오직 하나 존재함을 보이시오.

3. 출제 의도

이 문제는 양의 실수 전체의 집합에서 정의되고 미분가능한 함수에 대해, 간단한 수리적 조작을 통해 함수의 극한값들과 함수의 도함수를 활용하여 해당함수가 감소함수임을 구하는 문제이다. 이 과정에서 해당함수의 도함수가 음의 값을 가지는 것을 판단할 수 있는지에 관한 수리적 조작 능력과 수리적 추론 능력을 평가한다. 사잇값 정리를 활용하여 함수값이 특정값이 되는 양의 실수가 유일함을 수리적 추론 능력을 평가한다.

2-(1). 양의 실수 전체의 집합에서 정의되고 미분가능한 함수에 대해, 간단한 수리적 조작을 통해 함수의 극한값을 결정할 수 있는 수리적 계산능력을 평가한다.

2-(2). 주어진 함수의 도함수가 항상 음의 값을 가지는 것을 판단할 수 있는지에 관한 수리적 조작 능력과 수리적 추론 능력을 평가한다.

2-(3). 사잇값 정리를 활용하여 함수값이 특정값이 되는 양의 실수가 유일함을 수리적 추론 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

가. 교육과정 근거

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	**학습내용 성취 기준**
문항(2)-1	[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - 1 함수의 극한 [12수학Ⅱ01-01] 함수의 극한의 뜻을 안다. [12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다. [미적분] - (2) 미분법 - 1 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-01] 지수함수와 로그함수의 극한을 구할 수 있다
문항(2)-2	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - 3 도함수 [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
문항(2)-3	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - 3 도함수 [12수학Ⅱ02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다

나. 자료 출처

교과서 내

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 Ⅱ	황선욱 외	미래엔	2023	10-24, 82-89, 95-97
	수학 Ⅱ	고성은 외	좋은책신사고	2025	11-28, 80-86, 93-96
	미적분	황선욱 외	미래엔	2024	52-62
	미적분	고성은 외	좋은책신사고	2025	48-57

5. 문항 해설

이 문제는 양의 실수 전체의 집합에서 정의되고 미분가능한 함수에 대해, 로그를 취하고 자연상수 e의 정의를 활용하여 간단한 수리적 조작을 통해 함수의 극한값을 정확히 구하고 함수의 도함수를 활용하여 해당함수가 감소함수임을 보여서 함수에 대한 이해를 얻는 문제이다.

이 과정에서 해당함수의 도함수가 음의 값을 가지는 것을 판단할 수 있는지에 관한 수리적 조작 능력과 수리적 추론 능력을 평가한다. 또한 연속함수에 관한 사잇값 정리를 활용하여 함수값이 특정값이 되는 양의 실수가 유일함을 수리적 추론 능력을 평가하는 문항이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2-(1)	$\lim_{x\to 0+} f(x)$와 $\lim_{x\to\infty} f(x)$의 값을 각각 구하시오. (단, $\lim_{x\to 0+} x^x = 1$이다.)	10점
	$\lim_{x\to 0+} x^x = 1$을 활용하여 $\lim_{x\to 0+} g(x) = \lim_{x\to 0+} \ln f(x) = 0$을 구함.	5점
	$\lim_{x\to\infty} f(x) = e^{-6}$임을 구함.	5점
2-(2)	함수 $f(x)$는 구간 $(0, \infty)$에서 감소함을 보이시오.	10점
	함수 $f(x)$의 도함수 또는 $\ln f(x)$의 도함수를 정확히 구함.	5점
	구간 $(0, \infty)$에서 $f'(x) < 0$임을 보여서 $f(x)$가 감소함수임을 논함. 또는 $\ln f(x)$의 도함수 $f'(x)/f(x) < 0$임을 보이고 $f(x) > 0$임을 정확히 언급하여 구간 $(0, \infty)$에서 $f'(x) < 0$임을 결론적으로 보여서 $f(x)$가 감소함수임을 논함.	5점
2-(3)	$f(c) = \frac{1}{15}$을 만족시키는 양의 실수 c가 오직 하나 존재함을 보이시오.	10점
	$f(a) < \frac{1}{15}$, $f(b) > \frac{1}{15}$가 되는 양수 a와 b를 구체적으로 언급함.	4점
	사잇값의 정리에 의해, $f(c) = \frac{1}{15}$인 양수 c가 구간 (a,b)에 있음을 보임.	3점
	$f(x)$가 감소함수임을 이용하여 $f(c) = \frac{1}{15}$인 양수 c가 유일함을 보임.	3점

7. 예시 답안 혹은 정답

2-(1) $\lim_{x\to 0+} f(x)$와 $\lim_{x\to\infty} f(x)$의 값을 각각 구하시오. (단, $\lim_{x\to 0+} x^x = 1$이다.)

[풀이] 양의 실수 x에 대해, $\frac{x}{x+6} > 0$이므로 $f(x) = \left(\frac{x}{x+6}\right)^x > 0$이므로 함수

$$g(x) = \ln f(x) = x\ln x - x\ln(x+6)$$

이 잘 정의된다. $\lim_{x\to 0+} x^x = 1$이고 $x\ln x = \ln(x^x)$이므로 $\lim_{x\to 0+} x\ln x = \ln 1 = 0$이다. 또한

$$\lim_{x\to 0+} x\ln(x+6) = 0 \cdot \ln 6 = 0$$

이다. 따라서

$$\lim_{x\to 0+} g(x) = \lim_{x\to 0+} x\ln x - \lim_{x\to 0+} x\ln(x+6) = 0 - 0 = 0$$

이다. $f(x) = e^{g(x)}$이므로 $\lim_{x\to 0+} f(x) = e^0 = 1$이다. 그리고

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+6}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\left(\frac{1}{1+\frac{6}{x}}\right)^{\frac{x}{6}}\right)^6 = \frac{1}{e^6} = e^{-6}$$

이다.

2-(2) 함수 $f(x)$는 구간 $(0,\infty)$에서 감소함을 보이시오.

[풀이] 함수 $g(x) = \ln f(x) = x\ln x - x\ln(x+6)$이 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$$g'(x) = \ln x - \ln(x+6) + 1 - \frac{x}{x+6} = \ln\left(\frac{x}{x+6}\right) + \frac{6}{x+6} = \ln\left(1-\frac{6}{x+6}\right) + \frac{6}{x+6}$$

이다.

함수 $h(y) = \ln(1-y) + y$라 하면,

$$h'(y) = -\frac{1}{1-y} + 1 = \frac{y}{y-1}$$

이므로 $0 < y < 1$에서 $h'(y) < 0$이다. 따라서 함수 $h(y)$는 구간 $[0,1)$에서 감소하고 $0 < y < 1$에서 $h(y) < h(0) = \ln 1 + 0 = 0$이다. $g'(x)$에 $\frac{6}{x+6} = y$로 치환하면 모든 양의 실수 x에서 $0 < \frac{6}{x+6} < 1$이므로 $0 < y < 1$이고 $g'(x) = h(y) < 0$이다. $g(x) = \ln f(x)$이므로 $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$이다. 양의 실수 x에 대해, $f(x) > 0$이므로

$$f'(x) = f(x)g'(x) < 0$$

이다. 따라서 $f(x)$는 구간 $(0,\infty)$에서 감소한다.

2-(3) $f(c) = \frac{1}{15}$을 만족시키는 양의 실수 c가 오직 하나 존재함을 보이시오.

[풀이] $f(1) = \frac{1}{7}$, $f(3) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$이다. 그러므로

$$f(1) = \frac{1}{7} > \frac{1}{15} > \frac{1}{27} = f(3)$$

을 만족한다. 함수 $f(x)$가 연속이므로 사잇값의 정리에 의해, $f(c) = \frac{1}{15}$인 c가 열린구간 $(1,3)$에 적어도 하나 존재한다. 문항(2)에 의해, 함수 $f(x)$는 구간 $(0,\infty)$에서 감소하므로 $f(c) = \frac{1}{15}$인 양의 실수 c가 오직 하나 존재한다.

○ 문항카드12 (자연계열Ⅱ-3)

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	2026학년도 수시모집 논술(논술전형)	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 Ⅱ / 3번 문항	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 미적분
	핵심개념 및 용어	집합, 유리함수, 미분법, 접선의 방적식, 급수
예상 소요 시간	30분	

2. 문항 및 자료

좌표평면에 주어진 두 집합

$$A=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{|x|}{a}+\frac{|y|}{b}=1\right\},\ B=\{(x,y)\,|\,|x^k y|=3\}$$

에 대하여 $n(A\cap B)=4$일 때 다음 물음에 답하시오. (단, a,b는 양수, k는 자연수)

(1) $k=1$일 때 집합 A가 나타내는 도형의 넓이가 일정함을 보이고, 이때 집합 A가 나타내는 도형의 둘레의 길이의 최솟값을 구하시오.

(2) 자연수 k에 대하여 집합 A가 나타내는 도형의 넓이를 집합 $A\cap B$의 원소들을 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이로 나눈 값을 h_k라 할 때, h_k가 양수 a,b와 관계없이 일정함을 보이시오.

(3) 문항(2)의 h_k에 대하여 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+1}{k^3 h_k}$의 값을 구하시오.

3. 출제 의도

이 문제는 집합과 등식으로 주어진 좌표평면의 도형이 x축과 y축에 대한 대칭인 것을 이해하고 주어진 도형의 성질을 관찰하여 넓이에 나타나는 성질을 수리적으로 보이고 둘레의 길이의 최솟값을 구하고 넓이의 비율에 관한 급수의 합을 계산하는 문제이다. 이 과정에서 미분을 적용한 접선의 방정식의 활용을 착안하고 이를 효율적으로 활용하며, 둘레의 길이에 관한 식의 유추와 부등식을 활용하여 최솟값 계산하는 수리적 계산 및 사고 역량 그리고 문제 풀이를 위한 수리적 기획력을 평가한다. 또한 급수의 합의 개념을 이해하고 활용하는 수리적 개념과 계산능력을 평가한다.

3-(1) 주어진 도형들의 개형을 이해하고 주어진 조건과 접선의 조건과의 관계를 추론하며 접선의 방정식을 활용하여 넓이에 관한 성질을 유도하는 수리적 추론과 계산 및 서술 능력을 평가한다. 둘레의 길이에 관한 식을 유추하고 넓이에 관한 조건을 부등식에 활용하여 최솟값을 계산하는 수리적 계산 능력을 평가한다.

3-(2) 주어진 도형들의 x축과 y축에 대한 대칭성을 확인하고 미분을 활용하여 접선의 방정식을 구하고 넓이의 계산에 활용하는 수리적 추론 및 계산 능력을 평가한다.

3-(3) 넓이의 비율로 주어진 급수의 합을 바르게 구하는 계산 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

가. 교육과정 근거

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문	[수학] - (3)수와 연산 - 1 집합 [10수학03-03] 집합의 연산을 할 수 있다. [수학] - (2)기하 - 4 도형의이동 [10수학02-09] 원점, x축 , y축, 직선 $y=x$에 대한 대칭이동의 의미를 이해한다.
3-(1)	[수학] - (2)기하 - 2 직선의방정식 [10수학02-03] 직선의 방정식을 구할 수 있다. [수학] - (2)기하 - 4 도형의이동 [10수학02-09] 원점, x축 , y축, 직선 $y=x$에 대한 대칭이동의 의미를 이해한다. [수학] - (4)함수 - 2 유리함수와 무리함수 [10수학04-04] 유리함수 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ 의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 이해한다. [미적분] - (2)미분법 - 2 여러 가지 미분법 [12미적02-06] 함수의 몫을 미분할 수 있다. [미적분] - (2)미분법 - 3 도함수의 활용 [12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [수학] - (3)수와 연산 - 2 명제 [10수학03-08] 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다.
3-(2)	[수학] - (2)기하 - 2 직선의방정식 [10수학02-03] 직선의 방정식을 구할 수 있다. [수학] - (2)기하 - 4 도형의이동 [10수학02-09] 원점, x축 , y축, 직선 $y=x$에 대한 대칭이동의 의미를 이해한다. [미적분] - (2)미분법 - 2 여러 가지 미분법 [12미적02-06] 함수의 몫을 미분할 수 있다. [미적분] - (2)미분법 - 3 도함수의 활용 [12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다.
3-(3)	[미적분] - (1)수열의 극한 - 2 급수 [12미적01-04] 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.

나. 자료 출처

교과서 내

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	권오남 외	교학사	2025	104-111,116-119,147-152, 163-166,170-172,198-200, 231-237
	수학	황선욱 외	미래엔	2019	114-119,125-127,157-159, 175-177,180-183,204-205, 236-241
	미적분	박교식 외	동아출판	2024	29-32, 77-79, 101-103
	미적분	권오남 외	교학사	2022	32-36, 82-85, 108-111

5. 문항 해설

집합과 등식으로 주어진 좌표평면의 도형들이 x축과 y축에 대한 대칭인 것을 관찰한다. 주어진 조건에 대응되는 조건으로 접선의 방정식을 착안하고 이를 효율적으로 활용하여 도형의 넓이와 둘레의 길이의 최솟값을 구한다. 또한 도형의 넓이의 비율에 관한 급수에 관한 값을 구한다.

x축과 y축에 대한 대칭인 도형들의 개형을 이해하고 주어진 조건과 접선의 조건의 관계를 추론하고 미분을 적용하여 접선의 방정식을 구한다. 이를 활용하여 마름모의 넓이를 구하여 넓이가 일정한 것을 보인다. 둘레의 길이에 관한 식을 유추하고 넓이에 관한 조건식을 부등식에 활용하여 최솟값을 계산한다. 같은 방법으로 x축과 y축에 대한 대칭인 도형들의 넓이를 구하고 비율에 관한 식을 얻고 이에 관한 급수를 계산한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3-(1)	$k=1$일 때 집합 A가 나타내는 도형의 넓이가 일정함을 보이고, 이때 집합 A가 나타내는 도형의 둘레의 길이의 최솟값을 구하시오.	13점
	집합 A, B가 나타내는 도형들이 모두 x축과 y축에 대하여 대칭임을 명시하거나 그림으로 표현함	2점
	곡선 $y=\frac{3}{x}$의 점 $\left(\alpha, \frac{3}{\alpha}\right)$ $(\alpha>0)$에서 접선의 방정식을 바르게 구함	2점
	$a=2\alpha,\ b=\frac{6}{\alpha}$를 바르게 구함	2점
	집합 A가 나타내는 마름모의 넓이를 $\frac{1}{2}(2a\cdot 2b)=24$로 구하여 집합 A가 나타내는 도형의 넓이가 a, b에 관계없이 일정함을 보임	2점
	집합 A가 마름모이므로 둘레의 길이가 $4\sqrt{a^2+b^2}$로 바르게 구함	2점
	산술평균과 기하평균의 부등식을 바르게 활용하며 구하는 둘레의 길이의 최솟값 $8\sqrt{6}$을 구함	3점
3-(2)	자연수 k에 대하여 집합 A가 나타내는 도형의 넓이를 집합 $A\cap B$의 원소들을 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이로 나눈 값을 h_k라 할 때, h_k가 양수 a, b와 관계없이 일정함을 보이시오.	13점
	집합 A, B가 나타내는 도형들이 모두 x축과 y축에 대하여 대칭임을 명시하거나 그림으로 표현함	2점
	곡선 $y=\frac{3}{x^k}$의 점 $\left(\alpha, \frac{3}{\alpha^k}\right)$ $(\alpha>0)$에서 접하는 접선의 방정식을 바르게 구함	2점
	$a=\frac{k+1}{k}\alpha,\ b=\frac{3(k+1)}{\alpha^k}$를 바르게 구함	2점

하위 문항	채점 기준	배점
3-(2)	집합 A가 나타내는 마름모이므로 구하는 넓이를 $2ab=6\dfrac{(k+1)^2}{k\alpha^{k-1}}$로 구함	2점
	집합 $A\cap B$의 네 개의 원소를 꼭짓점으로 하는 사각형이 직사각형임을 확인하고 직사각형의 넓이 $4\left(\alpha\cdot\dfrac{3}{\alpha^k}\right)=\dfrac{12}{\alpha^{k-1}}$를 구함	3점
	$h_k=\dfrac{(k+1)^2}{2k}$를 구하고 이 값이 양수 a,b와 관계없이 일정함을 보임	2점
3-(3)	문항(2)의 h_k에 대하여 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+1}{k^3h_k}$의 값을 구하시오.	4점
	$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(2k+1)}{k^2(k+1)^2}=2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right)$로 나타냄	2점
	$\displaystyle 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=2\left(1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^2}\right)=2$로 계산함	2점

7. 예시 답안 혹은 정답

3-(1) $k=1$일 때 집합 A가 나타내는 도형의 넓이가 일정함을 보이고, 이때 집합 A가 나타내는 도형의 둘레의 길이의 최솟값을 구하시오.

[풀이] 집합 A,B가 나타내는 도형들이 모두 x축과 y축에 대하여 대칭이다. $k=1$이면 양의 실수 a,b에 대하여 직선 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$이 제1사분면에서 곡선 $y=\dfrac{3}{x}$에 접할 때 주어진 조건을 만족한다.

직선 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$이 곡선 $y=\dfrac{3}{x}$의 점 $\left(\alpha,\dfrac{3}{\alpha}\right)$ $(\alpha>0)$에서 접한다고 하면, $y=\dfrac{3}{x}$의 도함수가 $y'=-\dfrac{3}{x^2}$이므로 접선의 기울기는 $-\dfrac{3}{\alpha^2}$이고 접선의 방정식은

$$y-\frac{3}{\alpha}=\left(-\frac{3}{\alpha^2}\right)(x-\alpha)$$

이다. 이 접선과 x축과의 교점이 $(2\alpha,0)$이고 y축과의 교점이 $\left(0,\dfrac{6}{\alpha}\right)$이므로 $a=2\alpha$이고 $b=\dfrac{6}{\alpha}$이다. 집합 A가 나타내는 도형이 대각선의 길이가 각각 $2a,2b$인 마름모이므로 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2}(2a\cdot 2b)=2ab=2\left(2\alpha\cdot\frac{6}{\alpha}\right)=24$$

이다. 그러므로 집합 A가 나타내는 도형의 넓이가 a,b에 관계없이 일정하다.

집합 A가 나타내는 도형이 대각선의 길이가 각각 $2a,2b$인 마름모이므로 둘레의 길이가 $4\sqrt{a^2+b^2}$이다. 주어진 조건을 만족할 때 양의 실수는 a,b가 $ab=12$를 만족한다.

양의 실수 a, b에 대하여 산술평균과 기하평균의 부등식을 활용하면

$$a^2+b^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2}=2ab=2\cdot 12=24$$

이므로 구하는 둘레의 길이 $4\sqrt{a^2+b^2}$의 최솟값은 $4\sqrt{24}=8\sqrt{6}$이다.

3-(2) 자연수 k에 대하여 집합 A가 나타내는 도형의 넓이를 집합 $A\cap B$의 원소들을 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이로 나눈 값을 h_k라 할 때, h_k가 양수 a, b와 관계없이 일정함을 보이시오.

[풀이] 집합 A, B가 나타내는 도형들이 모두 x축과 y축에 대하여 대칭이다. 자연수 k와 양수 a, b에 대하여 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$이 제1사분면에서 곡선 $y=\frac{3}{x^k}$에 접할 때 주어진 조건을 만족한다.

직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$이 곡선 $y=\frac{3}{x^k}$의 점 $\left(\alpha, \frac{3}{\alpha^k}\right)$ $(\alpha>0)$에서 접한다고 하면, $y=\frac{3}{x^k}$의 도함수가 $y'=-\frac{3k}{x^{k+1}}$이므로 접선의 기울기는 $-\frac{3k}{\alpha^{k+1}}$이고 접선의 방정식은

$$y-\frac{3}{\alpha^k}=\left(-\frac{3k}{\alpha^{k+1}}\right)(x-\alpha)$$

이다. 이 접선과 x축과의 교점이 $\left(\frac{k+1}{k}\alpha, 0\right)$이고 y축과의 교점이 $\left(0, \frac{3(k+1)}{\alpha^k}\right)$이므로 $a=\frac{k+1}{k}\alpha$이고 $b=\frac{3(k+1)}{\alpha^k}$이다.

집합 A가 나타내는 도형이 대각선의 길이가 각각 $2a, 2b$인 마름모이므로 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2}(2a\cdot 2b)=2ab=2\left(\left(\frac{k+1}{k}\alpha\right)\cdot\frac{3(k+1)}{\alpha^k}\right)=6\frac{(k+1)^2}{k\alpha^{k-1}}$$

이다. 집합 A, B가 나타내는 도형들이 모두 x축과 y축에 대하여 대칭이므로

$$\left(\alpha, \frac{3}{\alpha^k}\right), \left(-\alpha, \frac{3}{\alpha^k}\right), \left(\alpha, -\frac{3}{\alpha^k}\right), \left(-\alpha, -\frac{3}{\alpha^k}\right)$$

가 집합 $A\cap B$의 네 개의 원소가 된다. 이들을 꼭짓점으로 하는 사각형이 직사각형이므로 이 직사각형의 넓이가

$$4\left(\alpha\cdot\frac{3}{\alpha^k}\right)=\frac{12}{\alpha^{k-1}}$$

이다. 따라서

$$h_k=\left(6\frac{(k+1)^2}{k\alpha^{k-1}}\right)\cdot\left(\frac{12}{\alpha^{k-1}}\right)^{-1}=\frac{(k+1)^2}{2k}$$

이므로 양수 a, b와 관계없이 일정하다.

3-(3) 문항(2)의 h_k에 대하여 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^3 h_k}$의 값을 구하시오.

[풀이] 문항(2)의 결과에 따라

$$h_k = \frac{(k+1)^2}{2k}$$

이다. 그러므로 구하는 값은

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^3 h_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(2k+1)}{k^2(k+1)^2} = 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = 2\left(1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^2}\right) = 2$$

이다.