○ 문항카드 7 (자연계열 I -1)

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	2026학년도 수시모집 논술(논술전형)	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 I / 1번 문항	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학I, 수학II, 미적분
	핵심개념 및 용어	도함수, 삼각함수, 사잇값의 정리
예상 소요 시간	40분	

2. 문항 및 자료

삼차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$가 다음 조건을 만족시킬 때, 아래 물음에 답하시오. [40점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다.

(나) $f(1)=g(1)$, $f(2)=g(2)$

(1) 삼차함수 $f(x)$를 구하시오.

(2) $0\le x\le\frac{\pi}{2}$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $\sin x\ge\frac{2}{\pi}x$가 성립함을 보이시오.

(3) $f'(c)=g'(c)$를 만족시키는 c가 열린구간 $(0,1)$에 오직 하나 존재함을 보이시오.

(4) $0\le x\le 1$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\le g(x)$가 성립함을 보이시오.

3. 출제 의도

이 문제는 주어진 조건들로부터 함수들의 성질을 파악하고, 해당하는 함수들의 대소관계를 도출하는 문제이다. 주어진 조건들로부터 삼차함수의 근을 결정함으로써 함수를 추론하고 연속함수에 대한 사잇값의 정리와 도함수를 활용하여 주어진 함수의 증감상태를 파악할 수 있는 능력을 평가한다. 또한 특정한 상황에서의 삼각함수와 일차함수의 대소관계를 도출하고 적절한 치환을 통해 주어진 문제 해결을 위해 적용하는 수리적 조작 능력 등을 평가한다. 또한 주어진 함수들의 특정한 값을 갖는 점이 유일하게 존재함을 파악하기 위해 함수의 증감상태를 활용하여 결과를 도출할 수 있는 수리적 추론 능력을 평가한다.

1-(1). 주어진 조건으로부터 삼차함수의 근을 유추하고 함수들 사이의 관계를 통해 삼차함수의 계수를 결정할 수 있는 추론능력을 평가한다.

1-(2). 주어진 구간에서 직선과 삼각함수의 그래프가 구간의 양 끝점에서 만나는 것을 파악하고 함수의 볼록성 등을 활용하여 주어진 삼각함수와 일차함수의 대소관계를 도출할 수 있는 추론능력을 평가한다.

1-(3). 주어진 함수에 적용할 수 있는 유용한 정리의 활용 능력과 도함수로부터 얻는 정보로부터 특정 성질을 만족시키는 점이 유일하게 존재함을 유추하는 추론 능력, 앞선 문항들에서 얻어진 결과들을 문제 해결에 적용하는 수리적 조작 능력 등을 평가한다.

1-(4). 주어진 구간의 특정한 점을 기준으로 함수의 증감상태가 달라지는 것과 구간의 양 끝점에서 특정한 값을 갖는 것을 활용하여 함수들의 대소관계를 도출하는 추론능력을 평가한다.

4. 출제 근거

가. 교육과정 근거

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문	[수학 I] - (2) 삼각함수 - 1 삼각함수 [12수학 I 02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
1-(1)	[수학] - (1) 문자와 식 - 1 인수분해 [10수학01-04] 다항식의 인수분해를 할 수 있다. [수학 I] - (2) 삼각함수 - 1 삼각함수 [12수학 I 02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
1-(2)	[수학 I] - (2) 삼각함수 - 1 삼각함수 [12수학 I 02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. [미적분] - (2) 미분법 - 1 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-05] 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다. [미적분] - (2) 미분법 - 2 여러 가지 미분법 [12미적02-10] 이계도함수를 구할 수 있다.
1-(3)	[수학 II] - (1) 함수의 극한과 연속 - 2 함수의 연속 [12수학II 01-04 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [수학 II] - (2) 미분 - 3 도함수의 활용 [12수학II 02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [미적분] - (2) 미분법 - 2 여러 가지 미분법 [12미적02-10] 이계도함수를 구할 수 있다.
1-(4)	[수학 II] - (2) 미분 - 3 도함수의 활용 [12수학II 02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.

나. 자료 출처

교과서 내					
참고자료	**도서명**	**저자**	**발행처**	**발행년도**	**쪽수**
고등학교 교과서	수학	고성은 외	좋은책신사고	2024	24-27
	수학	김원경 외	비상교육	2019	24-29
	수학 I	이준열 외	천재교육	2022	82-84
	수학 I	홍성복 외	지학사	2025	81-84
	수학 II	박교식 외	동아출판	2024	40-41, 81-84
	수학 II	김원경 외	비상교육	2024	38-39, 78-81
	미적분	류희찬 외	천재교과서	2025	80-82, 120-121, 128-129
	미적분	고성은 외	좋은책신사고	2023	70-71, 91-92, 104

5. 문항 해설

주어진 조건들에 의해 결정되는 함수를 결정하고 함수들의 대소 관계를 파악하기 위해 인수분해, 함수 조건을 적절히 적용해 보는 방법과 함수의 그래프를 파악하기 위해 함수의 연속성과 도함수의 개념을 활용하는 방법 등은 매우 유용한 추론 방법이다. 함수의 대소 관계를 유추하기 위해 함수들의 특정한 교점이 유일하게 존재함을 추론하는 능력이 요구되는 문항이다. 이 과정에서 함수의 연속성에 기인한 유용한 정리의 활용과 도함수의 상태를 활용한 함수의 증감 상태 파악 능력을 요구하고 있으며, 참고할 함수들의 대소 관계를 적용하는 수리적 조작 능력도 요구하는 문항이다. 이 과정에서 사잇값의 정리, 도함수 등의 개념을 활용하여 함수들의 대소 관계를 추론하는 능력을 평가하고 있다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-(1)	삼차함수 $f(x)$를 구하시오.	6점
	$f(0)=0$임을 보임	1점
	$g(2)=0$와 $f(2)=g(2)$로부터 $f(2)=0$임을 보임	1점
	$f(-2)=0$임을 보임	2점
	$g(1)=1$과 $f(1)=g(1)$로부터 $a=-\frac{1}{3}-3a=1$를 보임	1점
	삼차함수 $f(x)=-\frac{1}{3}x(x-2)(x+2)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{4}{3}x$임을 보임	1점

하위 문항	채점 기준	배점
1-(2)	$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $\sin x \ge \frac{2}{\pi}x$가 성립함을 보이시오.	8점
	$0 < x < \frac{\pi}{2}$인 x에 대하여 $(\sin x)'' = -\sin x < 0$임을 보이고, 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$에서 위로 볼록임을 보임	2점
	함수 $k(x)$에 대하여 $k(0) = 0$, $k\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$임을 보임	2점
	점 $(0, 0)$과 점 $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$을 잇는 선분 $y = \frac{2}{\pi}x$보다 $y = k(x)$의 그래프가 위에 있다.	2점
	$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$인 모든 실수 x에 대하여 $\sin x \ge \frac{2}{\pi}x$이다.	2점
1-(3)	$f'(c) = g'(c)$를 만족시키는 c가 열린구간 $(0, 1)$에 오직 하나 존재함을 보이시오.	16점
	함수 $h(x) = f(x) - g(x)$를 설정하고 도함수 $h'(x) = -x^2 + \frac{4}{3} - \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x$를 구함	2점
	$h'(0) = \frac{4}{3} - \frac{\pi}{2} < 0$, $h'(1) = \frac{1}{3} > 0$임을 보임	2점
	도함수 $h'(x)$에 사잇값의 정리를 적용해서 $h'(c) = 0$인 c가 0과 1사이에 적어도 하나 존재함을 보임	3점
	식 ①에 $\frac{\pi}{2}x$를 x대신 치환하여 $0 < x < 1$인 x에 대하여 $\sin\frac{\pi}{2}x > x$임을 보임	3점
	$0 < x < 1$인 x에 대하여 $h''(x) = -2x + \frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi}{2}x > -2x + \frac{\pi^2}{4}x > 0$임을 보임	3점
	$h'(x) = 0$를 만족시키는 점이 $x = c$ 하나뿐임을 보임. 결론적으로 $[0, 1]$에서 $f'(x) = g'(x)$를 만족시키는 점은 $x = c$ 하나뿐임을 보임	3점
1-(4)	$0 \le x \le 1$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x) \le g(x)$가 성립함을 보이시오.	10점
	문항 (3)의 증명 과정으로부터 $0 \le x < c$인 x에 대하여 $h'(x) < 0$이고 $c < x \le 1$인 x에 대하여 $h'(x) > 0$임을 보임	3점
	함수 $h(x)$가 $[0, c]$에서 감소하고 닫힌구간 $[c, 1]$에서 증가함을 보임	2점
	$h(0) = 0$이고 $h(1) = 0$임을 지적	2점
	$0 \le x \le 1$인 x에 대하여 $h(x) \le 0$임을 보임으로써 $0 \le x \le 1$인 x에 대하여 $f(x) \le g(x)$임을 보임	3점

7. 예시 답안 혹은 정답

1-(1) 삼차함수 $f(x)$를 구하시오.

[풀이]

함수 $f(x)$에 $x=0$을 대입하면, 조건 (가)로부터 $f(-0) = -f(0)$이므로 $f(0)=0$이다. 한편, $g(2) = \sin\pi = 0$이므로 조건 (나)로부터 $f(2) = g(2) = 0$이다. 다시 조건 (가)를 적용하면 $f(-2) = -f(2) = 0$이다. 따라서 삼차함수 $f(x)$는

$$f(x) = ax(x-2)(x+2) \quad (a \neq 0\text{인 상수})$$

임을 알 수 있다.

또한 $g(1) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$이므로 조건 (나)로부터 $f(1) = g(1) = 1$이다. 따라서 $-3a = 1$이다.

즉 $a = -\frac{1}{3}$이다. 따라서 삼차함수 $f(x)$는

$$f(x) = -\frac{1}{3}x(x-2)(x+2) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}x$$

이다.

1-(2) $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $\sin x \ge \frac{2}{\pi}x$가 성립함을 보이시오.

[풀이]

함수 $k(x) = \sin x$는 $0 < x < \frac{\pi}{2}$인 모든 실수 x에 대하여 $k''(x) = -\sin x < 0$이므로 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$에서 위로 볼록이다. 함수 $k(x)$에 대하여 $k(0)=0$, $k\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$이므로, 점 $(0,0)$과 점 $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$을 잇는 선분 $y = \frac{2}{\pi}x$보다 $y = k(x)$의 그래프가 위에 있다. 따라서

$$k(x) = \sin x > \frac{2}{\pi}x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

이다. 결론적으로 $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$인 모든 실수 x에 대하여 $\sin x \ge \frac{2}{\pi}x$이다.

1-(3) $f'(c) = g'(c)$를 만족시키는 c가 열린구간 $(0,1)$에 오직 하나 존재함을 보이시오.

[풀이]

함수 $h(x)$를

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

라 할 때, 도함수는

$$h'(x) = -x^2 + \frac{4}{3} - \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x$$

이다.

도함수 $h'(x)$는 $h'(0) = \frac{4}{3} - \frac{\pi}{2} < 0$이고 $h'(1) = \frac{1}{3} > 0$이다. 도함수 $h'(x)$가 닫힌구간 $[0,1]$에서 연속이므로 사잇값의 정리에 의해 $h'(c) = 0$인 c가 열린구간 $(0,1)$에 적어도 하나 존재한다.

식 ①에 $x = \frac{\pi}{2}t$로 치환하여 대입하면 $0 < t < 1$인 모든 실수 t에 대하여 $\sin\frac{\pi}{2}t > t$임을 알 수 있다.

따라서 $0 < x < 1$인 모든 실수 x에 대하여

$$h''(x) = -2x + \frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi}{2}x > -2x + \frac{\pi^2}{4}x > 0$$

이다. 그러므로 도함수 $h'(x)$는 닫힌구간 $[0,1]$에서 증가하므로 $h'(c) = 0$을 만족시키는 c가 열린구간 $(0,1)$에 오직 하나 존재한다. $h'(x) = f'(x) - g'(x)$이므로 $f'(c) = g'(c)$를 만족시키는 c가 열린구간 $(0,1)$에 오직 하나 존재한다.

1-(4) $0 \le x \le 1$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x) \le g(x)$가 성립함을 보이시오.

[풀이]

문항 (3)의 증명 과정에서 도함수 $h'(x)$는 $0 \le x < c$인 모든 실수 x에 대하여 $h'(x) < 0$이고 $c < x \le 1$인 모든 실수 x에 대하여 $h'(x) > 0$이다. 즉 함수 $h(x)$는 닫힌구간 $[0,c]$에서 감소하고 닫힌구간 $[c,1]$에서 증가한다. 한편 $h(0) = 0$이고 $h(1) = 0$이므로 함수 $h(x)$는 $0 \le x \le 1$인 모든 실수 x에 대하여 $h(x) \le 0$이다. 따라서 $0 \le x \le 1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \le g(x)$이 성립한다.

○ 문항카드 8 (자연계열 I -2)

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	2026학년도 수시모집 논술(논술전형)	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 I / 2번 문항	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학I, 수학II, 미적분
	핵심개념 및 용어	log함수의 미분, 부분분수
예상 소요 시간	20분	

2. 문항 및 자료

두 다항식 $P(x)=a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0$와 $Q(x)=(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_n)$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $m<n$
> (나) $a_0, a_1, \cdots, a_m, b_1, \cdots, b_n$은 상수이다.
> (다) $a_m \neq 0$
> (라) $b_1<b_2<\cdots<b_n$

다음 등식

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{c_1}{x-b_1}+\frac{c_2}{x-b_2}+\cdots+\frac{c_n}{x-b_n} \quad (c_1, c_2, \cdots, c_n \text{은 상수})$$

가 성립할 때, 아래의 물음에 답하시오. [30점]

(1) $x \neq b_k$ $(k=1, 2, \cdots, n)$일 때, $\frac{Q'(x)}{Q(x)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-b_k}$이 성립함을 보이시오.

(2) $k=1, 2, \cdots, n$에 대하여 $Q'(b_k)\neq 0$과 $c_k=\frac{P(b_k)}{Q'(b_k)}$가 성립함을 보이시오.

(3) $c_1+\cdots+c_n=\begin{cases}0 & (m<n-1)\\ a_m & (m=n-1)\end{cases}$이 성립함을 보이시오.

3. 출제 의도

유리함수의 분모를 인수분해하여 유리함수를 부분분수의 합으로 나타내는 것은 유리함수의 적분과 미분에서 가장 먼저 확인해야 할 사항이다. 그런데 가장 단순한 경우인 분모 $Q(x)$가 2차함수로 주어지고 2차항의 계수가 1이며 인수분해를 하여 $Q(x)=(x-b_1)(x-b_2)$로 표현된다고 하더라도 $\frac{P(x)}{Q(x)}=R(x)+\frac{A_1}{x-b_1}+\frac{A_2}{x-b_2}$로 나타낼

때, A_1과 A_2의 값을 구하는 방법이 단순하지 않으며, 분모가 $Q(x)=(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_n)$이며

$\frac{P(x)}{Q(x)}=R(x)+\frac{A_1}{x-b_1}+\frac{A_2}{x-b_2}+\cdots+\frac{A_n}{x-b_n}$ 일 때 $A_1,\cdots,A_n$의 값을 구하기 위하여 $Q(x)$가 2차함수로 주어진 경우의 방법을 사용하는 것은 계산의 양이 지나치게 많아서 실용적인 방법이 아니다.

그런데 본 문항에서 제시하였듯이 로그 함수의 미분 또는 함수의 곱의 미분을 사용하면 위의 $A_1,\cdots,A_n$의 값을 아주 쉽게 찾을 수 있다.

대다수의 학생들이 미분을 하는 목적과 미분의 응용으로 접선의 방정식, 함수의 증가, 감소, 함수의 그래프의 위로 볼록, 아래로 볼록, 속도와 가속도 정도로만 이해하고 있는데 이 문항을 통하여 학생들에게 함수의 미분이 함수의 식에 감추어져 있던 다양한 정보를 드러낼 수 있으며 예상하지 못하던 응용을 가지고 있음을 깨달을 수 있는 계기를 제공하고자 한다.

4. 출제 근거

가. 교육과정 근거

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문	[수학] - (1) 문자와 식 - 3 인수분해 [10수학01-04] 다항식의 인수분해를 할 수 있다. [수학 II] - (2) 미분 - 2 도함수 [12수학Ⅱ02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다. [미적분] - (2) 미분법 - 1 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다. [미적분] - (2) 미분법 - 2 여러 가지 미분법 [12미적02-06] 함수의 몫을 미분할 수 있다.
2-(1)	[수학] - (1) 문자와 식 - 3 인수분해 [10수학01-04] 다항식의 인수분해를 할 수 있다. [수학 II] - (2) 미분 - 2 도함수 [12수학Ⅱ02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다. [미적분] - (2) 미분법 - 1 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다.
2-(2)	[수학] - (2) 문자와 식 - 3 인수분해 [10수학01-04] 다항식의 인수분해를 할 수 있다. [수학 II] - (2) 미분 - 2 도함수 [12수학Ⅱ02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.
2-(3)	[수학] - (1) 문자와 식 - 1 다항식의 연산 [10수학01-01] 다항식의 사칙연산을 할 수 있다. [수학 II] - (2) 미분 - 2 도함수 [12수학Ⅱ02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.

나. 자료 출처

교과서 내					
참고자료	**도서명**	**저자**	**발행처**	**발행년도**	**쪽수**
고등학교 교과서	수학	김원경 외	비상교육	2024	221-225
	수학 Ⅰ	류희찬 외	천재교과서	2023	47-51
	수학 Ⅱ	황선욱 외	미래엔	2024	61-67
	미적분	권오남 외	교학사	2024	60-63, 82-87

5. 문항 해설

주어진 유리함수를 부분분수로 전개하기 위하여 분모함수를 1차식의 곱으로 인수분해하고 분모함수의 도함수를 인수분해의 관점으로 이해할 수 있는 능력을 확인한다. 분자함수와 분모함수의 도함수로부터 유리함수의 부분분수 전개의 분자값을 유도할 수 있는 지를 확인한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2-(1)	$x \neq b_k \ (k = 1, 2, \cdots, n)$일 때, $\frac{Q'(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - b_k}$이 성립함을 보이시오.	10점
	다항식 $Q(x) = (x - b_1)(x - b_2) \cdots (x - b_n)$에 로그함수를 적용하여 $\ln\|Q(x)\| = \ln\|x - b_1\| + \ln\|x - b_2\| + \cdots + \ln\|x - b_n\|$을 유도	5점
	$\ln\|Q(x)\| = \ln\|x - b_1\| + \ln\|x - b_2\| + \cdots + \ln\|x - b_n\|$을 x에 대하여 미분하여 $\frac{Q'(x)}{Q(x)} = \frac{1}{x - b_1} + \cdots + \frac{1}{x - b_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - b_k}$을 얻음	5점
2-(1) 별해	$Q(x) = (x - b_1)(x - b_2) \cdots (x - b_n)$에 함수의 곱의 미분을 적용하여 $Q'(x) = (x - b_2)(x - b_3) \cdots (x - b_n)$ 을 유도 $+ (x - b_1)(x - b_3) \cdots (x - b_n)$ $+ \cdots$ $+ (x - b_1) \cdots (x - b_{k-1})(x - b_{k+1}) \cdots (x - b_n)$ $+ \cdots$ $+ (x - b_1)(x - b_2) \cdots (x - b_{n-1})$	5점

하위 문항	채점 기준	배점
2-(1) 별해	위의 $Q'(x)$를 $Q(x)$로 나누어 $\frac{Q'(x)}{Q(x)}=\frac{(x-b_2)(x-b_3)\cdots(x-b_n)}{(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_n)}$ 을 유도 $+\frac{(x-b_1)(x-b_3)\cdots(x-b_n)}{(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_n)}$ $+\cdots$ $+\frac{(x-b_1)\cdots(x-b_{k-1})(x-b_{k+1})\cdots(x-b_n)}{(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_n)}$ $+\cdots$ $+\frac{(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_{n-1})}{(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_n)}$ $=\frac{1}{x-b_1}+\cdots+\frac{1}{x-b_k}+\cdots+\frac{1}{x-b_n}$ $=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-b_k}$	5점
2-(2)	$k=1,2,\cdots,n$에 대하여 $Q'(b_k)\neq 0$과 $c_k=\frac{P(b_k)}{Q'(b_k)}$가 성립함을 보이시오.	10점
	$Q'(b_k)=(b_k-b_1)\cdots(b_k-b_{k-1})(b_k-b_{k+1})\cdots(b_k-b_n)$을 유도	2점
	(라)조건에 의하여 $Q'(b_k)\neq 0$	2점
	$P(b_k)=c_k(b_k-b_1)\cdots(b_k-b_{k-1})(b_k-b_{k+1})\cdots(b_k-b_n)$을 유도	2점
	$(b_k-b_1)\cdots(b_k-b_{k-1})(b_k-b_{k+1})\cdots(b_k-b_n)=Q'(b_k)$을 확인	2점
	$Q'(b_k)\neq 0$이므로 $c_k=\frac{P(b_k)}{Q'(b_k)}$가 성립함을 확인	2점
2-(3)	$c_1+\cdots+c_n=\begin{cases}0 & (m<n-1)\\ a_m & (m=n-1)\end{cases}$이 성립함을 보이시오.	10점
	$P(x)=c_1(x-b_2)\cdots(x-b_n)$ 을 유도 $+c_2(x-b_1)(x-b_3)\cdots(x-b_n)$ $+\cdots$ $+c_n(x-b_1)\cdots(x-b_{n-1})$	3점
	위의 식을 정리하면 $P(x)$가 $(n-1)$차 방정식이어서 $P(x)=(c_1+\cdots+c_n)x^{n-1}+$ 나머지 항 으로 표현됨	2점
	$P(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0$으로 주어졌으므로 $a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0=(c_1+\cdots+c_n)x^{n-1}+R(x)$	2점
	위의 등식으로부터 $c_1+\cdots+c_n=\begin{cases}0 & (m<n-1)\\ a_m & (m=n-1)\end{cases}$ 을 유도	3점

7. 예시 답안 혹은 정답

2-(1) $x \neq b_k$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$일 때, $\dfrac{Q'(x)}{Q(x)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - b_k}$이 성립함을 보이시오.

[풀이]

다항식 $Q(x) = (x - b_1)(x - b_2) \cdots (x - b_n)$에 대하여

$$\ln|Q(x)| = \ln|(x - b_1)(x - b_2) \cdots (x - b_n)| = \ln|x - b_1| + \ln|x - b_2| + \cdots + \ln|x - b_n|$$

이다. 양변을 x에 대하여 미분하면 $\dfrac{Q'(x)}{Q(x)} = \dfrac{1}{x - b_1} + \cdots + \dfrac{1}{x - b_n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - b_k}$이 성립한다.

(별해)

다항식 $Q(x) = (x - b_1)(x - b_2) \cdots (x - b_n)$이므로

$$\begin{aligned} Q'(x) = &(x - b_2)(x - b_3) \cdots (x - b_n) \\ &+ (x - b_1)(x - b_3) \cdots (x - b_n) \\ &+ \cdots \\ &+ (x - b_1) \cdots (x - b_{k-1})(x - b_{k+1}) \cdots (x - b_n) \\ &+ \cdots \\ &+ (x - b_1)(x - b_2) \cdots (x - b_{n-1}) \end{aligned}$$

이다. 따라서 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} \frac{Q'(x)}{Q(x)} = &\frac{(x - b_2)(x - b_3) \cdots (x - b_n)}{(x - b_1)(x - b_2) \cdots (x - b_n)} \\ &+ \frac{(x - b_1)(x - b_3) \cdots (x - b_n)}{(x - b_1)(x - b_2) \cdots (x - b_n)} \\ &+ \cdots \\ &+ \frac{(x - b_1) \cdots (x - b_{k-1})(x - b_{k+1}) \cdots (x - b_n)}{(x - b_1)(x - b_2) \cdots (x - b_n)} \\ &+ \cdots \\ &+ \frac{(x - b_1)(x - b_2) \cdots (x - b_{n-1})}{(x - b_1)(x - b_2) \cdots (x - b_n)} \\ &= \frac{1}{x - b_1} + \cdots + \frac{1}{x - b_k} + \cdots + \frac{1}{x - b_n} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - b_k} \end{aligned}$$

2-(2) $k = 1, 2, \cdots, n$에 대하여 $Q'(b_k) \neq 0$과 $c_k = \dfrac{P(b_k)}{Q'(b_k)}$가 성립함을 보이시오.

[풀이]

다항식 $Q(x)$의 도함수 $Q'(x)$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} Q'(x) = &(x - b_2)(x - b_3) \cdots (x - b_n) \\ &+ (x - b_1)(x - b_3) \cdots (x - b_n) \\ &+ \cdots \\ &+ (x - b_1) \cdots (x - b_{k-1})(x - b_{k+1}) \cdots (x - b_n) \\ &+ \cdots \\ &+ (x - b_1)(x - b_2) \cdots (x - b_{n-1}) \end{aligned}$$

$Q'(x)$에서 $(x-b_k)$를 인수로 포함하지 않는 항은 $(x-b_1)\cdots(x-b_{k-1})(x-b_{k+1})\cdots(x-b_n)$이고 그 이외의 항들은 $(x-b_k)$를 인수로 포함하고 있다.

따라서 $Q'(x)$에서 $x=b_k$를 대입하면 $(x-b_k)$를 인수로 포함하고 있는 항들은 모두 0이 되고 $(x-b_k)$를 인수로 포함하지 않은 항 $(x-b_1)\cdots(x-b_{k-1})(x-b_{k+1})\cdots(x-b_n)$은 $(b_k-b_1)\cdots(b_k-b_{k-1})(b_k-b_{k+1})\cdots(b_k-b_n)$이 된다. 여기에서 조건 (라)에 의하여 $i\neq k$이면 $b_k-b_i\neq 0$이므로 $Q'(b_k)=(b_k-b_1)\cdots(b_k-b_{k-1})(b_k-b_{k+1})\cdots(b_k-b_n)\neq 0$이 성립한다.

$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{c_1}{x-b_1}+\frac{c_2}{x-b_2}+\cdots+\frac{c_n}{x-b_n}$이고 $Q(x)=(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_n)$이므로

$$\begin{aligned}P(x)&=\left(\frac{c_1}{x-b_1}+\frac{c_2}{x-b_2}+\cdots+\frac{c_n}{x-b_n}\right)\cdot Q(x)\\&=\left(\frac{c_1}{x-b_1}+\frac{c_2}{x-b_2}+\cdots+\frac{c_n}{x-b_n}\right)\cdot(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_n)\\&=c_1(x-b_2)(x-b_3)\cdots(x-b_n)\\&+c_2(x-b_1)(x-b_3)\cdots(x-b_n)\\&+\cdots\\&+c_k(x-b_1)\cdots(x-b_{k-1})(x-b_{k+1})\cdots(x-b_n)\\&+\cdots\\&+c_n(x-b_1)\cdots(x-b_{n-1})\end{aligned}$$

이고 $P(x)$의 항들 중에서 $(x-b_k)$를 인수로 포함하지 않은 항은 $c_k(x-b_1)\cdots(x-b_{k-1})(x-b_{k+1})\cdots(x-b_n)$이고 그 이외의 항들은 $(x-b_k)$를 인수로 포함하므로

$P(b_k)=c_k(b_k-b_1)\cdots(b_k-b_{k-1})(b_k-b_{k+1})\cdots(b_k-b_n)=c_k\cdot Q'(b_k)$ 이다.

$Q'(b_k)=(b_k-b_1)\cdots(b_k-b_{k-1})(b_k-b_{k+1})\cdots(b_k-b_n)\neq 0$이므로 $c_k=\frac{P(b_k)}{Q'(b_k)}$이다.

2-(3) $c_1+\cdots+c_n=\begin{cases}0 & (m<n-1)\\ a_m & (m=n-1)\end{cases}$이 성립함을 보이시오.

[풀이]

다음 분수식을 통분하면

$$\frac{c_1}{x-b_1}+\frac{c_2}{x-b_2}+\cdots+\frac{c_n}{x-b_n}$$
$$=\frac{c_1(x-b_2)\cdots(x-b_n)+c_2(x-b_1)(x-b_3)\cdots(x-b_n)+\cdots+c_n(x-b_1)\cdots(x-b_{n-1})}{(x-b_1)\cdots(x-b_n)}$$

이고 $Q(x)=(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_n)$이므로

$P(x)=c_1(x-b_2)\cdots(x-b_n)+c_2(x-b_1)(x-b_3)\cdots(x-b_n)+\cdots+c_n(x-b_1)\cdots(x-b_{n-1})$

이다.

또한 $(x-b_2)\cdots(x-b_n)$, $(x-b_1)(x-b_3)\cdots(x-b_n)$, $\cdots$, $(x-b_1)\cdots(x-b_{n-1})$은 모두 $(n-1)$차 다항식이므로

$$P(x) = c_1(x-b_2)\cdots(x-b_n) + c_2(x-b_1)(x-b_3)\cdots(x-b_n) + \cdots + c_n(x-b_1)\cdots(x-b_{n-1})$$
$$= (c_1 + \cdots + c_n)x^{n-1} + R(x)$$

이다. 이때 $R(x)$는 최고차항의 차수가 $(n-1)$보다 낮은 다항식이다. 따라서

$$a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = (c_1 + \cdots + c_n)x^{n-1} + R(x)$$

이므로 $m = n-1$일 때에는 $a_m = c_1 + \cdots + c_n$이고 $m < n-1$일 때에는 $c_1 + \cdots + c_n = 0$이다.

○ 문항카드 9 (자연계열 I -3)

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	2026학년도 수시모집 논술(논술전형)	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 I / 3번 문항	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학II, 미적분
	핵심개념 및 용어	정적분, 적분과 미분의 관계, 부분적분법
예상 소요 시간	30분	

2. 문항 및 자료

닫힌구간 $[-1, 2]$에서 정의된 연속함수 $f(x)$에 대하여 함수 $H(x)$를

$$H(x) = \int_0^x f(t)\,dt - \int_x^1 f(t)\,dt \quad (-1 \le x \le 2)$$

라 할 때, 아래 물음에 답하시오. [30점]

(1) $-1 < x < 2$인 모든 실수 x에 대하여 함수 $H(x)$가 연속임을 보이시오.

(2) 다음 등식이 성립함을 보이시오.

$$\int_0^1 H(x)\,dx = \int_0^1 (1-2x) f(x)\,dx$$

(3) $\int_0^1 f(x)\,dx = 2\int_0^1 x f(x)\,dx$일 때, 다음 등식을 만족시키는 c가 열린구간 $(0, 1)$에 적어도 하나 존재함을 보이시오.

$$\int_0^c f(x)\,dx = \int_c^1 f(x)\,dx$$

(4) $-1 < x < 2$인 모든 실수 x에 대하여

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow H(x) = 0$$

임을 보이시오.

3. 출제 의도

이 문제는 새로 정의된 함수를 적분의 성질과 연결하여 함수의 구조를 분석하는 전 과정을 통해 연속, 미분, 적분에 대한 학업 성취 정도, 수리적 추론 능력, 표현·조작 능력, 함수의 성질을 기반으로 한 논리적 판단 능력을 평가한다.

(1) 함수의 연속성과 정적분의 성질을 이용하여 새롭게 정의된 함수의 성질을 분석하는 능력을 평가하며, 이는 적분과 미분과의 관계, 함수의 미분가능성과 연속성의 관계에 대한 학업 성취 능력을 평가한다.

(2) 부분적분법에 대한 이해 및 정적분의 성질을 이용하여 새로운 적분식을 도출하는 능력을 평가한다.

(3) 주어진 적분 관계를 해석하여 특정 값을 만족하는 지점의 존재를 롤의 정리를 바탕으로 추론하는 능력을 평가한다.

(4) 함수의 미분·적분 구조를 비교하여 두 함수의 동치 관계를 논리적으로 설명하는 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

가. 교육과정 근거

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	**학습내용 성취 기준**
제시문	[수학 II] - (3) 적분 - 2 정적분 [12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다.
3-(1)	[수학 II] - (3) 적분 - 2 정적분 [12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다. [수학 II] - (2) 미분 - 1 미분계수 [12수학Ⅱ02-03] 미분가능성과 연속성의 관계를 이해한다.
3-(2)	[미적분] - (3) 적분법 - 1 여러 가지 적분법 [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [수학 II] - (3) 적분 - 1 부정적분 [12수학Ⅱ03-02] 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 알고, 다항함수의 부정적분을 구할 수 있다.
3-(3)	[수학 II] - (3) 적분 - 2 정적분 [12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다. [수학 II] - (2) 미분 - 3 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-07] 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다.
3-(4)	[수학 II] - (3) 적분 - 2 정적분 [12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다. [수학 II] - (2) 미분 - 1 미분계수 [12수학Ⅱ02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.

나. 자료 출처

교과서 내

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 Ⅱ	김원경 외	비상교육	2025	51-58, 74-77, 107-111, 112-118
	수학 Ⅱ	홍성복 외	지학사	2024	53-58, 59-61, 78-82, 116-119, 125-130
	미적분	류희찬 외	천재교과서	2023	172-175
	미적분	황선욱 외	미래엔	2024	151-154

5. 문항 해설

이 문항은 새로 정의된 함수를 적분의 관점에서 해석하여 기존 함수와의 관계를 비교하고, 이를 바탕으로 함수의 성질을 추론하는 수리적 방법을 다루는 문항이다. 주어진 함수의 연속성과 적분의 성질을 이용하여 새로운 함수가 어떻게 정의되고 변화하는지 분석하며, 이러한 표현을 통해 얻어진 두 적분식의 관계를 판단하는 능력을 평가한다. 또한 앞에서 얻은 결과를 새로운 조건에 적용하여 특정 값을 만족하는 지점의 존재를 논리적으로 설명하는 조작 능력을 확인한다. 마지막으로 함수의 변화량과 누적량의 관계를 미분·적분의 연결을 통해 해석함으로써, 두 함수가 서로 어떤 조건에서 동일한 성질을 갖는지를 추론하는 수리적 능력을 종합적으로 평가한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3-(1)	$-1 < x < 2$인 모든 실수 x에 대하여 함수 $H(x)$가 연속임을 보이시오.	7점
	닫힌구간 $[a,b]$에서 정의된 연속함수 $f(x)$에 대하여 다음의 적분과 미분의 관계를 언급한다. $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \quad (a < x < b)$	2점
	미분가능한 함수는 연속임을 언급한다.	2점
	함수 $H(x)$가 열린구간 $(-1,2)$에서 연속이라는 결론을 도출한다.	3점
3-(2)	다음 등식이 성립함을 보이시오. $\int_0^1 H(x)\,dx = \int_0^1 (1-2x)f(x)\,dx$	9점
	$\int_0^1 H(x)\,dx = \int_0^1 1 \cdot H(x)\,dx$이고 $1 = \frac{d}{dx}x$임을 언급한다.	3점
	부분적분법을 이용하여 $\int_0^1 H(x)\,dx = [xH(x)]_0^1 - 2\int_0^1 xf(x)\,dx$의 형태로 표현한다.	3점
	$[xH(x)]_0^1 = \int_0^1 f(x)\,dx$ 보이고 $\int_0^c f(x)\,dx = \int_c^1 f(x)\,dx$이라는 결론을 도출한다.	3점

하위 문항	채점 기준	배점
3-(3)	$\int_0^1 f(x)dx = 2\int_0^1 xf(x)dx$일 때, 다음 등식을 만족시키는 c가 열린구간 $(0,1)$에 적어도 하나 존재함을 보이시오. $$\int_0^c f(x)dx = \int_c^1 f(x)dx$$	10점
	$\int_0^1 H(x)dx = 0$임을 언급한다.	1점
	함수 $H(x)$의 한 부분적분이 닫힌구간 $[0,1]$에서 롤의 정리 조건을 만족함을 언급한다.	4점
	롤의 정리로부터 $H(c) = 0$을 만족시키는 c가 열린구간 $(0,1)$에 적어도 하나 존재함을 언급한다.	4점
	$\int_0^c f(x)dx = \int_c^1 f(x)dx$이라는 결론을 도출한다.	1점
3-(4)	$-1 < x < 2$인 모든 실수 x에 대하여 $$f(x) = 0 \Leftrightarrow H(x) = 0$$ 임을 보이시오.	4점
	$-1 < x < 2$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) = 0$일 때, 임의의 구간에서의 함수 $f(x)$의 정적분 값이 0임을 언급하고 $-1 < x < 2$인 모든 실수 x에 대하여 $H(x) = 0$이라는 결론을 도출한다.	2점
	$-1 < x < 2$인 모든 실수 x에 대하여 $H(x) = 0$일 때, 함수 $f(x)$의 한 부분적분이 상수함수임을 언급하고 $-1 < x < 2$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) = 0$이라는 결론을 도출한다.	2점

7. 예시 답안 혹은 정답

3-(1) $-1 < x < 2$인 모든 실수 x에 대하여 함수 $H(x)$가 연속임을 보이시오.

[풀이]

닫힌구간 $[a,b]$에서 정의된 연속함수 $f(x)$에 대하여 적분과 미분의 관계에 의해 다음을 알 수 있다.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \quad (a < x < b)$$

$-1 < x < 2$인 모든 실수 x에 대하여 $F(x) = \int_{-1}^x f(t)dt$라 하면, 위 성질로부터 함수 $F(x)$는 $-1 < x < 2$에서 미분가능하고, 따라서 연속이다. 정적분의 성질에 의해 함수 $H(x)$는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$H(x)=2\left(F(x)-\int_{-1}^{0}f(t)\,dt\right)-\int_{0}^{1}f(t)\,dt=2F(x)-2\int_{-1}^{0}f(t)\,dt-\int_{0}^{1}f(t)\,dt$ ····· ①

함수 $F(x)$가 열린구간 $(-1,2)$에서 연속이고 연속함수의 성질에 의해 함수 $H(x)$도 그 구간에서 연속이다.

3-(2) 다음 등식이 성립함을 보이시오.

$$\int_{0}^{1}H(x)\,dx=\int_{0}^{1}(1-2x)f(x)\,dx$$

[풀이] 상수 $A=-2\int_{-1}^{0}f(t)\,dt-\int_{0}^{1}f(t)\,dt=-2\int_{-1}^{1}f(t)\,dt+\int_{0}^{1}f(t)\,dt$라 하자. ①로부터 $H(x)=2F(x)+A$임을 알 수 있고, $\frac{d}{dx}x=1$이므로 부분적분법을 이용하면 다음을 보일 수 있다.

$$\int_{0}^{1}H(x)\,dx=\int_{0}^{1}\left(1\cdot(2F(x)+A)\right)dx=2F(1)+A-2\int_{0}^{1}xF'(x)\,dx$$

이때, $2F(1)+A=H(1)=\int_{0}^{1}f(x)\,dx$이고 $F'(x)=f(x)$이므로 다음 등식이 성립한다.

$$\int_{0}^{1}H(x)\,dx=\int_{0}^{1}(1-2x)f(x)\,dx$$

3-(3) $\int_{0}^{1}f(x)\,dx=2\int_{0}^{1}xf(x)\,dx$일 때, 다음 등식을 만족시키는 c가 열린구간 $(0,1)$에 적어도 하나 존재함을 보이시오.

$$\int_{0}^{c}f(x)\,dx=\int_{c}^{1}f(x)\,dx$$

[풀이]

주어진 조건과 문항 (2)의 결과로부터 $\int_{0}^{1}H(x)\,dx=0$임을 알 수 있다.

함수 $G(x)$를 닫힌구간 $[-1,2]$에서 다음과 같이 정의하자.

$$G(x)=\int_{-1}^{x}H(t)\,dt$$

그러면 함수 $G(x)$는 열린구간 $(-1,2)$에서 미분가능하고, 따라서 그 구간에서 연속이다. 또한, $-1<x<2$인 모든 실수 x에 대하여 $G'(x)=H(x)$를 만족한다. 이때, $\int_{0}^{1}H(x)\,dx=0$이므로

$G(0)=\int_{-1}^{0}H(t)\,dt,\qquad G(1)=\int_{-1}^{1}H(t)\,dt=\int_{-1}^{0}H(t)\,dt+\int_{0}^{1}H(t)\,dt=\int_{-1}^{0}H(t)\,dt$

이다. 따라서 $G(0) = G(1)$이다. 함수 $G(x)$가 닫힌구간 $[0,1]$에서 연속이고, 열린구간 $(0,1)$에서 미분가능하므로 롤의 정리에 의해 $G'(c) = 0$인 c가 열린구간 $(0,1)$에서 적어도 하나 존재한다. $H(c) = G'(c) = 0$이므로 함수 $H(x)$의 정의에 의해 다음 등식이 성립한다.

$$\int_0^c f(x)\,dx = \int_c^1 f(x)\,dx$$

3-(4) $-1 < x < 2$인 모든 실수 x에 대하여

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow H(x) = 0$$

임을 보이시오.

[풀이]

$-1 < x < 2$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) = 0$이면 $\int_0^x f(t)\,dt - \int_x^1 f(t)\,dt = 0$이므로, $-1 < x < 2$인 모든 실수 x에 대하여 $H(x) = 0$이다.

역으로, $-1 < x < 2$인 모든 실수 x에 대하여 $H(x) = 0$이면 $H(x) = 2F(x) + A$이므로 $F(x) = -\frac{A}{2}$이다. 따라서 $-1 < x < 2$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) = F'(x) = 0$이다.