○ 문항카드 10 (자연계열Ⅱ-1)

[이화여자대학교 문항정보]

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	2025학년도 수시모집 논술(논술전형)	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 Ⅱ / 문항 1	
출제 범위	교육과정 과목명	수학, 기하
	핵심개념 및 용어	이차방정식의 판별식, 두 점 사이의 거리, 타원, 포물선
예상 소요 시간	35분 / 전체 100분	

2. 문항 및 제시문

양의 실수 a에 대하여 아래 물음에 답하시오. [35점]

(1) 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(x,y)$에서 점 $\mathrm{A}(0,3)$까지의 거리를 b, 점 $\mathrm{P}(x,y)$에서 점 $\mathrm{B}(0,5)$까지의 거리를 c라 할 때, $b+c=4$이다. 이때 점 P가 그리는 도형 S의 방정식을 구하시오.

(2) 좌표평면 위의 점 $\mathrm{Q}(x,y)$에서 점 $\mathrm{A}(0,3)$까지의 거리를 d, 점 Q와 x축까지의 거리를 e라 할 때, $d+e=a$이다. 이때 $y\geq 0$인 점 Q가 그리는 도형 T의 방정식을 구하시오.

(3) 언급된 (1), (2)의 두 도형 S, T가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값의 범위와 이때 두 교점의 좌표를 구하시오.

3. 출제 의도

이 문제는 두 점 사이의 거리와 점과 축 사이의 거리의 합으로 결정되는 도형을 파악하고, 해당하는 도형들이 만나는 조건과 이때의 교점들을 구하는 문제이다. 거리들의 합으로 결정되는 도형을 추론하고 두 점 사이의 거리와 점과 축 사이의 거리 등을 설정하고 간단한 수리적 조작을 통해 조건에 맞는 도형의 방정식을 유도할 수 있는 수리적 조작 능력을 평가한다. 또한 제시된 도형들이 만나는 조건을 만족시키는 범위를 결정하고 이때의 교점들의 좌표를 적절히 결정할 수 있는 수리적 추론 능력을 평가한다.

1-(1). 주어진 점들로부터 거리의 합이 일정한 도형의 방정식을 유추하여 결정할 수 있는 수리적 계산능력을 평가한다.

1-(2). 주어진 점과 축으로부터 거리의 합이 일정한 도형의 방정식을 유추하여 결정할 수 있는 수리적 계산능력과 조건에 따라 달리 결정되는 도형을 유추할 수 있는 추론능력을 함께 평가한다.

1-(3). 제시된 도형들이 만나는 조건을 만족시키는 범위를 유추하는 추론 능력과 이때의 도형들의 교점의 좌표를 결정할 수 있는 수리적 계산능력을 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문	**[기하] - (1) 이차곡선 - 1 이차곡선** [12기하01-01] 포물선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있다. [12기하01-02] 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다.
문항1-(1)	**[수학] - (2) 기하 - 1 평면좌표** [10수학02-01] 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다. **[기하] - (1) 이차곡선 - 1 이차곡선** [12기하01-02] 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다.
문항1-(2)	**[수학] - (2) 기하 - 1 평면좌표** [10수학02-01] 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다. **[기하] - (1) 이차곡선 - 1 이차곡선** [12기하01-01] 포물선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있다.
문항1-(3)	**[수학] - (1) 문자와 식 - 4 복소수와 이차방정식** [10수학01-07] 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고 이를 설명할 수 있다. **[기하] - (1) 이차곡선 - 1 이차곡선** [12기하01-01] 포물선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있다. [12기하01-02] 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	류희찬 외	천재교과서	2021	56-58, 108-110
	수학	김원경 외	비상교육	2022	50-51, 99-101
	수학	박교식 외	동아출판	2022	50-51, 101-103
	기하	고성은 외	좋은책신사고	2020	11-15, 16-20
	기하	황선욱 외	미래엔	2024	11-15, 26-30
	기하	류희찬 외	천재교과서	2023	12-17, 20-25

5. 문항 해설

주어진 조건들에 의해 결정되는 도형을 파악하기 위해서 도형의 방정식을 이해하고 방정식을 결정짓는 기하학적 조건을 수리적 조작을 통해 대수적 관계식으로 유추하여 활용하는 방법은 매우 유용한 추론 방법이다. 방정식으로 기술되는 도형들이 주어진 조건에 의해서 교점이 결정될 때, 주어진 조건의 범위를 파악하고 이때의 교점들을 대수적으로 유도하여 결정할 수 있는 능력을 요구하는 문항이다. 또한 도형들이 만나는 조건에 대한 기하학적 이

해와 이를 결정하는 조건들을 파악하여 도형을 구분하고 해당하는 도형의 방정식을 표현하는 능력도 평가하고 있다. 이는 주어진 문제들의 해결을 위해 기하학적 접근 방법을 활용할 수 있는 중요한 능력이다. 이 과정에서 방정식의 해를 구할 수 있는 기본적인 수리적 계산 능력도 평가하고 있다.

6. 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
1-(1)	좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(x,y)$에서 점 $\mathrm{A}(0,3)$까지의 거리를 b, 점 $\mathrm{P}(x,y)$에서 점 $\mathrm{B}(0,5)$까지의 거리를 c라 할 때, $b+c=4$이다. 이때 점 P가 그리는 도형 S의 방정식을 구하시오.	6점
	조건 $b+c=4$로부터 $\sqrt{x^2+(y-3)^2}+\sqrt{x^2+(y-5)^2}=4$를 설정함.	2점
	점 $\mathrm{P}(x,y)$가 만족시키는 방정식 $4x^2+3y^2-24y+36=0$을 유도함.	2점
	도형 S의 방정식이 타원의 방정식 $\frac{x^2}{3}+\frac{(y-4)^2}{4}=1$임을 보임.	2점
1-(2)	좌표평면 위의 점 $\mathrm{Q}(x,y)$에서 점 $\mathrm{A}(0,3)$까지의 거리를 d, 점 Q와 x축까지의 거리를 e라 할 때, $d+e=a$이다. 이때 $y\geq 0$인 점 Q가 그리는 도형 T의 방정식을 구하시오.	11점
	조건 $d+e=a$와 $y\geq 0$로부터 $\sqrt{x^2+(y-3)^2}+y=a$를 설정함.	2점
	정리하여 방정식 $x^2+(y-3)^2=(a-y)^2$을 유도함.	1점
	$a=3$인 경우와 $a\neq 3$인 경우로 구분함.	2점
	$a=3$인 경우, $x=0$임을 보이고, 이때 $\lvert y-3\rvert+\lvert y\rvert=3$임을 보임.	2점
	도형 T의 방정식이 $x=0,\ 0\leq y\leq 3$임을 보임.	1점
	$a\neq 3$인 경우, $x^2-6y+9=a^2-2ay$이 성립함을 보임.	2점
	도형 T의 방정식이 포물선 $y=\frac{1}{2(3-a)}x^2+\frac{3+a}{2},\ y\geq 0$임을 보임.	1점
1-(3)	언급된 (1), (2)의 두 도형 S, T가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값의 범위와 이때 두 교점의 좌표를 구하시오.	18점
	$a=3$인 경우, 도형 T: $x=0,\ 0\leq y\leq 3$와 도형 S가 점 $(0,2)$에서만 만남을 보임.	2점
	$a\neq 3$인 경우, 도형 T와 도형 S의 교점의 y좌표가 $12-3(y-4)^2=8(3-a)y-36+4a^2\quad(2\leq y\leq 6)$ 을 만족시킴을 보임. 기타 y에 관한 동치인 방정식을 유도해도 인정함.	2점
	교점의 y좌표가 $y=2a,\frac{2a}{3}$임 보임.	2점
	$a<1$이거나 $a>9$인 경우, 도형 S와 도형 T는 만나지 않음을 보임.	2점

하위문항	채점 기준	배점
	포물선 $y=\frac{1}{2(3-a)}x^2+\frac{3+a}{2}$의 꼭짓점 $\left(0,\frac{3+a}{2}\right)$이 $1<a<3$ 또는 $3<a<9$일 때, 타원 $\frac{x^2}{3}+\frac{(y-4)^2}{4}=1$의 안쪽에 있음을 보임.	2점
	$3<a\le 9$일 때, $2a>6$임을 지적, 교점의 y좌표가 $y=\frac{2a}{3}$임을 보임.	2점
	도형 S와 T의 교점은 $\left(\pm\sqrt{\frac{(a-3)(9-a)}{3}},\frac{2a}{3}\right)$이고, $3<a<9$에서 두 개의 교점을 갖고, $a=9$에서 한 개의 교점을 가짐을 보임.	2점
	$1\le a<3$일 때, $\frac{2a}{3}<2$임을 지적, 교점의 y좌표가 $y=2a$임을 보임	2점
	도형 S와 T의 교점이 $(\pm\sqrt{(a-1)(3-a)},2a)$이고, $1<a<3$에서 두 개의 교점을 갖고, $a=1$에서 한 개의 교점을 가짐을 보임.	2점

7. 예시 답안 혹은 정답

1-(1) 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(x,y)$에서 점 $\mathrm{A}(0,3)$까지의 거리를 b, 점 $\mathrm{P}(x,y)$에서 점 $\mathrm{B}(0,5)$까지의 거리를 c라 할 때, $b+c=4$이다. 이때 점 P가 그리는 도형 S의 방정식을 구하시오.

[풀이] $b+c=4$이므로 $\sqrt{x^2+(y-3)^2}+\sqrt{x^2+(y-5)^2}=4$이다. 따라서 점 $\mathrm{P}(x,y)$는

$$4x^2+3y^2-24y+36=0$$

을 만족시킨다. 따라서 점 P가 그리는 도형 S의 방정식은 타원의 방정식

$$\frac{x^2}{3}+\frac{(y-4)^2}{4}=1$$

이다.

1-(2) 좌표평면 위의 점 $\mathrm{Q}(x,y)$에서 점 $\mathrm{A}(0,3)$까지의 거리를 d, 점 Q와 x축까지의 거리를 e라 할 때, $d+e=a$이다. 이때 $y\ge 0$인 점 Q가 그리는 도형 T의 방정식을 구하시오.

[풀이] $d+e=a$이고 $y\ge 0$이므로 $\sqrt{x^2+(y-3)^2}+y=a$를 얻는다. y를 이항하여 양변을 제곱하면

$$x^2+(y-3)^2=(a-y)^2$$

이다.

(i) $a=3$인 경우, $x=0$이다. 이때 조건 $d+e=a$로부터

$$|y-3|+|y|=3$$

을 얻는다. 즉 점 Q가 그리는 도형 T의 방정식은 $x=0,\ 0\le y\le 3$이다.

(ii) $a\neq 3$인 경우, 점 $\mathrm{Q}(x,y)$는 $x^2-6y+9=a^2-2ay$를 만족시킨다. 따라서 점 Q가 그리는 도형 T의 방정식은 포물선

$$y=\frac{1}{2(3-a)}(x^2+9-a^2)=\frac{1}{2(3-a)}x^2+\frac{3+a}{2}$$

의 x축 위쪽 부분이다.

1-(3) 언급된 (1), (2)의 두 도형 S, T가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값의 범위와 이때 두 교점의 좌표를 구하시오.

[풀이] 도형 S: $\frac{x^2}{3}+\frac{(y-4)^2}{4}=1$는 $2\le y\le 6$인 범위에 있는 타원이다.

(i) $a=3$인 경우, 도형 T: $x=0,\ 0\le y\le 3$는 타원 S와 점 $(0,2)$에서만 만난다.

(ii) $a\neq 3$인 경우, 도형 T: $y=\frac{1}{2(3-a)}x^2+\frac{3+a}{2},\ y\ge 0$는 포물선의 x축 위쪽 부분이다.
도형 T는

$$x^2=2(3-a)y-9+a^2\quad(y\ge 0)$$

을 만족시키고, 도형 S는

$$4x^2=12-3(y-4)^2\quad(2\le y\le 6)$$

이므로, 도형 T와 도형 S의 교점 (x,y)의 y좌표는

$$12-3(y-4)^2=8(3-a)y-36+4a^2\quad(2\le y\le 6)$$

을 만족시킨다. 식을 정리하면

$$3y^2-8ay+4a^2=0\quad(2\le y\le 6)$$

을 얻는다. 이때, $y=2a, \frac{2a}{3}$임을 알 수 있다. a가 양의 실수이므로 $2a<2$이거나 $\frac{2a}{3}>6$인 경우, 즉 $a<1$이거나 $a>9$인 경우는 도형 S와 도형 T는 만나지 않는다.

특별히 포물선 $y=\frac{1}{2(3-a)}x^2+\frac{3+a}{2}$의 꼭짓점이 $\left(0,\frac{3+a}{2}\right)$이므로, $1<a<3$ 또는 $3<a<9$인 범위에서는 포물선의 꼭짓점 $\left(0,\frac{3+a}{2}\right)$이 타원 $\frac{x^2}{3}+\frac{(y-4)^2}{4}=1$의 안쪽에 있다. 또한 $a=1$이거나 $a=9$인 경우는 포물선의 꼭짓점 $\left(0,\frac{3+a}{2}\right)$이 타원 $\frac{x^2}{3}+\frac{(y-4)^2}{4}=1$ 위에 있다.

(ㄱ) $3<a\le 9$인 경우, $2a>6$이므로 도형 T와 도형 S의 교점 (x,y)의 y좌표는 $y=\frac{2a}{3}$이

다. 이때 $\frac{1}{2(3-a)}<0$이므로 포물선 $y=\frac{1}{2(3-a)}x^2+\frac{3+a}{2}$는 직선 $y=\frac{3+a}{2}$의 아래쪽에 있고, 두 도형 S와 T의 교점은 $\left(\pm\sqrt{\frac{(a-3)(9-a)}{3}},\frac{2a}{3}\right)$이다. 따라서 $3<a<9$에서는 두 개의 교점을 갖고, $a=9$에서는 한 개의 교점을 갖는다.

(ㄴ) $1\le a<3$인 경우, $\frac{2a}{3}<2$이므로 도형 T와 도형 S의 교점 (x,y)의 y좌표는 $y=2a$이다. 이때 $\frac{1}{2(3-a)}>0$이므로 포물선 $y=\frac{1}{2(3-a)}x^2+\frac{3+a}{2}$는 직선 $y=\frac{3+a}{2}$의 위쪽에 있고, 두 도형 S와 T의 교점은 $(\pm\sqrt{(a-1)(3-a)},2a)$이다. 따라서 $1<a<3$에서는 두 개의 교점을 갖고, $a=1$에서는 한 개의 교점을 갖는다.

따라서 도형 S와 도형 T가 두 점에서 만나도록 하는 a의 범위와 이때 교점들의 좌표는 각각 $1<a<3$일 때, $(\pm\sqrt{(a-1)(3-a)},2a)$이고, $3<a<9$일 때, $\left(\pm\sqrt{\frac{(a-3)(9-a)}{3}},\frac{2a}{3}\right)$이다.

○ 문항카드 11 (자연계열Ⅱ-2)

[이화여자대학교 문항정보]

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	2025학년도 수시모집 논술(논술전형)	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 Ⅱ / 2번 문항	
출제 범위	교육과정 과목명	수학, 미적분
	핵심개념 및 용어	역함수, 정적분, 부분적분
예상 소요 시간	35분 / 전체 100분	

2. 문항 및 제시문

구간 $[0,\infty)$에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때,

$2^{n-1}-1 \le x < 2^n-1$일 때, $f(x)=\sqrt{2^{n-1}(x+1)-2^{2n-2}}+2^{n-1}-1$이다. (단, $n=1,2,3,\cdots$이다.)

아래 물음에 답하시오. [35점]

(1) 함수 $f(x)$가 구간 $[0,\infty)$에서 증가함을 보이시오.

(2) 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=2^{n-1}-1$일 때, $\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,dx$의 값을 구하시오.

(3) 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, (2)에서 언급된 수열 $\{a_n\}$에 대하여, $\int_{a_n}^{a_{n+1}} g(x)\,dx$의 값을 구하시오.

3. 출제 의도

주어진 함수의 조건들을 통하여 주어진 함수가 증가함을 보이고 특정 구간에서의 주어진 함수의 정적분 값과 역함수의 정적분 값을 추론하는 수리적 조작 능력, 수리적 계산 능력, 수리적 추론 능력을 종합적으로 평가한다.

2-(1). 주어진 함수의 조건을 통해 주어진 함수가 증가함을 논하는 수리적 추론 능력을 평가한다.

2-(2). 주어진 구간에서 주어진 함수의 정적분을 치환적분법을 활용하여 계산하는 수리적 조작 능력과 수리적 계산 능력을 평가한다.

2-(3). 주어진 함수의 역함수의 정적분을 주어진 함수의 정적분으로 조작하여 구하는 수리적 추론 능력, 수리적 조작 능력, 수리적 계산 능력을 종합적으로 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문	**[수학] - (4) 함수 - 1 함수** [10수학04-01] 함수의 개념을 이해하고, 그 그래프를 이해한다.
2-(1)	**[수학] - (4) 함수 - 1 함수** [10수학04-01] 함수의 개념을 이해하고, 그 그래프를 이해한다.
2-(2)	**[미적분] - (3) 적분법 - 1 여러 가지 적분법** [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
2-(3)	**[수학] - (4) 함수 - 1 함수** [10수학04-03] 역함수의 의미를 이해하고, 주어진 함수의 역함수를 구할 수 있다. **[미적분] - (3) 적분법 - 2 정적분의 활용** [12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	이준열 외	천재교육	2021	223-227, 233-236
	수학	홍성복 외	지학사	2023	219-224, 228-231
	미적분	고성은 외	좋은책신사고	2022	132-134, 140-144, 155-156
	미적분	류희찬 외	천재교과서	2021	164-169, 177-180, 183-185

5. 문항 해설

주어진 함수의 정적분과 넓이와의 관계를 통해 주어진 함수의 역함수의 정적분을 주어진 함수의 정적분과의 관계를 찾는 것은 매우 유용한 추론 방법이다. 구간 별로 다르게 정의된 함수의 주어진 조건들을 통해 주어진 함수가 증가함을 보이고 주어진 함수의 특정 구간에서의 정적분을 구하도록 요구되는 문항이다. 또한 주어진 함수의 정적분과 넓이와의 관계를 통해 주어진 함수의 역함수의 정적분을 구하도록 요구되는 문항으로 이 과정에서 함수의 적분법에 관한 수리적 계산 능력, 수리적 조작 능력, 수리적 추론 능력을 종합적으로 평가하고 있다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2-(1)	함수 $f(x)$가 구간 $[0,\infty)$에서 증가함을 보이시오.	11점
	임의의 $0 \le x < y$인 x, y에 대해, $a_m \le x < a_{m+1}$, $a_n \le y < a_{n+1}$인 자연수 m, n을 찾음.	3점
	$m = n$인 경우, $f(x) < f(y)$임을 보임.	4점
	$m < n$인 경우, $f(x) < f(y)$임을 보임.	4점

2-(2)	수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n = 2^{n-1} - 1$일 때, $\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,dx$의 값을 구하시오.	10점
	$f(x)$의 정의를 활용하여 $\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,dx = \int_{2^{n-1}-1}^{2^n-1} \left(\sqrt{2^{n-1}(x+1) - 2^{2n-2}} + 2^{n-1} - 1\right) dx$ 임을 얻음.	2점
	치환적분법을 활용하여 $\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,dx = \int_{0}^{2^{n-1}} \left(\sqrt{2^{n-1}t} + 2^{n-1} - 1\right) dt$ 임을 얻음.	4점
	함수 $\sqrt{x}$의 부정적분을 활용하여 $\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,dx = \frac{5}{3} \times 2^{2n-2} - 2^{n-1}$ 임을 얻음.	4점
2-(3)	함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, (2)에서 언급된 수열 $\{a_n\}$에 대하여, $\int_{a_n}^{a_{n+1}} g(x)\,dx$의 값을 구하시오.	14점
	모든 자연수 n에 대하여 $f(a_n) = a_n$임을 통해 $g(a_n) = a_n$임을 얻음.	4점
	$\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,dx + \int_{a_n}^{a_{n+1}} g(x)\,dx = 3 \times 2^{2n-2} - 2^n$임을 얻음.	5점
	$\int_{a_n}^{a_{n+1}} g(x)\,dx = \frac{4}{3} \times 2^{2n-2} - 2^{n-1}$임을 얻음.	5점

7. 예시 답안 혹은 정답

2-(1) 함수 $f(x)$가 구간 $[0, \infty)$에서 증가함을 보이시오.

[풀이] 실수 x, y가 $0 \le x < y$를 만족한다. 수열 $\{a_n\}$을 $a_n = 2^n - 1$이라 하면, 어떤 자연수 m, n에 대하여

$$a_m \le x < a_{m+1},\ a_n \le y < a_{n+1}$$

이다. $x < y$이므로 $m \le n$을 만족한다.

(i) $m = n$인 경우, $a_n \le x < y < a_{n+1}$이다. 함수 $\sqrt{2^{n-1}(x+1) - 2^{2n-2}} + 2^{n-1} - 1$은 구간 $[a_n, a_{n+1}]$에서 증가하므로

$$f(a_n) \le f(x) < f(y) \text{ 이다.}$$

(ii) $m < n$인 경우,

$$a_m \le x < a_{m+1} \le a_n \le y < a_{n+1}$$

이다. 함수 $f(x)$는 각각의 닫힌구간 $[a_m, a_{m+1}]$, $[a_n, a_{n+1}]$에서 증가하고

$$f(a_m) = a_m,\ f(a_{m+1}) = a_{m+1},\ f(a_n) = a_n$$

이므로

$$a_m \le f(x) < a_{m+1} \le a_n \le f(y)$$

이다. 따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[0, \infty)$에서 증가한다.

2-(2) 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n = 2^{n-1} - 1$일 때, $\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,dx$의 값을 구하시오.

[풀이] 자연수 n에 대하여,

$$\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,dx = \int_{2^{n-1}-1}^{2^n-1} \left(\sqrt{2^{n-1}(x+1) - 2^{2n-2}} + 2^{n-1} - 1\right) dx$$

이고 $t = x + 1 - 2^{n-1}$로 치환하면,

$$\begin{aligned}\int_{2^{n-1}-1}^{2^n-1} \left(\sqrt{2^{n-1}(x+1) - 2^{2n-2}} + 2^{n-1} - 1\right) dx &= \int_0^{2^{n-1}} \left(\sqrt{2^{n-1}t} + 2^{n-1} - 1\right) dt \\ &= \left[\frac{2^{\frac{(n+1)}{2}}\, t^{\frac{3}{2}}}{3} + (2^{n-1} - 1)t\right]_0^{2^{n-1}} \\ &= \frac{5}{3} \times 2^{2n-2} - 2^{n-1}\end{aligned}$$

이다.

2-(3) 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, (2)에서 언급된 수열 $\{a_n\}$에 대하여, $\int_{a_n}^{a_{n+1}} g(x)\,dx$의 값을 구하시오.

[풀이] (1)의 결과로부터, 모든 자연수 n에 대하여 $f(a_n) = a_n$이고, 따라서 $g(a_n) = a_n$이다.

$$A_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,dx,\ B_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} g(x)\,dx$$

라 하면,

$$A_n + B_n = a_{n+1}^2 - a_n^2 = (2^n - 1)^2 - (2^{n-1} - 1)^2 = 3 \times 2^{2n-2} - 2^n$$

이다. (2)의 결과에 의해서 $A_n = \frac{5}{3} \times 2^{2n-2} - 2^{n-1}$이므로 $B_n = \frac{4}{3} \times 2^{2n-2} - 2^{n-1}$이다.

○ 문항카드12 (인문계열Ⅱ-3)

[이화여자대학교 문항정보]

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	2025학년도 수시모집 논술(논술전형)	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 Ⅱ / 3번 문항	
출제 범위	교육과정 과목명	수학 Ⅰ, 수학 Ⅱ, 미적분
	핵심개념 및 용어	수열의 귀납적 정의, 수열의 극한, 정적분, 부분적분법
예상 소요 시간	30분 / 전체 100분	

2. 문항 및 제시문

모든 자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$을 다음과 같이 정의할 때,

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \, dx, \qquad b_n = \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}, \qquad c_n = \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}}$$

아래 물음에 답하시오. [30점]

(1) 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+2} = \frac{n}{n+1} a_n$ 임을 보이시오.

(2) 수열 $\{b_n\}$이 수렴할 때, $\lim_{n \to \infty} b_n$의 값과 $\lim_{n \to \infty} c_n$의 값을 각각 구하시오.

(3) 수열 $\{b_n\}$이 수렴할 때, $\lim_{n \to \infty} \frac{1^2 \times 3^2 \times \cdots \times (2n-1)^2}{2^2 \times 4^2 \times \cdots \times (2n)^2} \times n$의 값을 구하시오.

3. 출제 의도

이 문제는 적분 및 귀납적 정의로 주어진 수열들의 다양한 관계들을 파악하고 이를 활용하여 주어진 수열의 극한값을 구하는 문제이다. 부분적분법을 이용하여 적분으로 정의된 수열의 귀납적 정의를 찾아내고 이 결과를 이용하여 다른 수열들 사이의 관련성을 찾아낼 수 있는 수리적 계산 및 사고 역량을 평가한다. 또한, 수열의 극한에 대한 기본 성질, 수열의 극한값의 대소 관계 및 정적분의 성질을 활용하여 여러 수열의 극한값을 도출할 수 있는 수리적 추론 능력을 평가한다.

3-(1). 부분적분법을 활용하여 수열의 귀납적 관계를 찾아낼 수 있는 수리적 계산 능력을 평가한다.

3-(2). 수열의 극한의 기본 성질, 수열의 극한에 대한 기본 성질 및 정적분의 여러 활용을 바탕으로 제시된 두 수열의 극한값을 찾는 수리적 계산 및 추론 능력을 평가한다.

3-(3). (1)의 결과의 다양한 활용과 수열의 극한의 기본 성질로부터 제시된 수열의 극한값을

찾는 수리적 추론 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문	**[수학 I] - (3) 수열 - 3 수학적 귀납법** [12수학 I 03-06] 수열의 귀납적 정의를 이해한다.
3-(1)	**[미적분] - (3) 적분법 - 1 여러 가지 적분법** [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. **[수학 I] - (3) 수열 - 3 수학적 귀납법** [12수학 I 03-06] 수열의 귀납적 정의를 이해한다.
3-(2)	**[수학 I] - (3) 수열 - 3 수학적 귀납법** [12수학 I 03-06] 수열의 귀납적 정의를 이해한다. **[미적분] - (1) 수열의 극한 - 1 수열의 극한** [12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다. **[수학 II] - (3) 적분 - 2 정적분** [12수학II03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다. **[수학 II] - (3) 적분 - 3 정적분의 활용** [12수학II03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
3-(3)	**[수학 I] - (3) 수열 - 3 수학적 귀납법** [12수학 I 03-06] 수열의 귀납적 정의를 이해한다. **[미적분] - (1) 수열의 극한 - 1 수열의 극한** [12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 I	권오남 외	교학사	2021	152-153
	수학 I	황선욱 외	미래엔	2024	155-156
	수학 II	박교식 외	동아출판	2021	127, 137-141
	수학 II	홍성복 외	지학사	2022	131-132, 144-145
	미적분	이준열 외	천재교육	2021	17-19, 155-157
	미적분	권오남 외	교학사	2023	17-21, 158-160

5. 문항 해설

부분적분법을 이용하여 수열의 귀납적인 관계를 찾고, 이를 다양한 방식으로 활용하여 주어진 수열의 극한값을 구할 수 있는 수리적 계산 능력을 평가한다. 또한 이 과정에서 극한에 대한 기본 성질과 극한의 대소 관계를 활용할 수 있는 수리적 추론 능력을 평가한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3-(1)	모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+2} = \frac{n}{n+1}a_n$ 임을 보이시오.	5점
	$\cos x = (\sin x)'$의 변형.	1점
	부분적분을 이용하여 $a_{n+2} = na_n - na_{n+2}$을 구함.	3점
	$a_{n+2} = \frac{n}{n+1}a_n$ 결과 도출.	1점
3-(2)	수열 $\{b_n\}$이 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty} b_n$의 값과 $\lim_{n\to\infty} c_n$의 값을 각각 구하시오.	12점
	$a_{n+2} = \frac{n}{n+1}a_n$ 을 이용하여 $c_n = \frac{2n}{2n-1}b_n$을 도출.	3점
	수열의 극한의 기본 성질을 이용하여 $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n$임을 도출.	2점
	두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이의 정의 및 정적분의 성질로부터 $a_{n+1} \le a_n$임을 도출.	3점
	$a_{n+1} \le a_n$을 이용하여 $b_n \le 1$, $c_n \ge 1$을 도출.	2점
	수열의 극한의 대소 관계 및 두 극한값이 같음을 이용하여 $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 1$임을 도출.	2점
3-(3)	수열 $\{b_n\}$이 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{1^2\times 3^2\times\cdots\times(2n-1)^2}{2^2\times 4^2\times\cdots\times(2n)^2}\times n$의 값을 구하시오.	13점
	$a_{n+2} = \frac{n}{n+1}a_n$ 을 이용하여 $a_{2n+1}a_{2n} = \frac{\pi}{4n}$임을 도출.	3점
	$a_{2n+1}a_{2n} = \frac{\pi}{4n}$과 b_n의 정의로부터 $b_n = \frac{4n}{\pi}(a_{2n+1})^2$이 됨을 도출.	3점
	$\lim_{n\to\infty} b_n = 1$을 이용하여 $\lim_{n\to\infty} \frac{4n}{\pi}(a_{2n+1})^2 = 1$임을 도출.	2점
	$a_{n+2} = \frac{n}{n+1}a_n$ 을 이용하여 $\frac{1^2\times 3^2\times\cdots\times(2n-1)^2\times n}{2^2\times 4^2\times\cdots\times(2n)^2} = \left(\frac{a_3}{a_1}\right)^2\times\left(\frac{a_5}{a_3}\right)^2\times\cdots\times\left(\frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}}\right)^2\times n$ 을 도출.	3점
	위의 결과와 $\lim_{n\to\infty} \frac{4n}{\pi}(a_{2n+1})^2 = 1$의 결과를 바탕으로 수열의 극한의 기본 성질을 이용하여 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2\times 3^2\times\cdots\times(2n-1)^2\times n}{2^2\times 4^2\times\cdots\times(2n)^2}\right) = \frac{1}{\pi}$임을 도출.	2점

7. 예시 답안 혹은 정답

3-(1) 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+2} = \frac{n}{n+1}a_n$ 임을 보이시오.

[풀이] 각 자연수 n에 대하여, 부분적분법을 이용하면,

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}x\,dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x(\sin x)'dx \\ &= \left[\cos^n x \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^n x)' \sin x\,dx \\ &= n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}x \sin^2 x\,dx \\ &= na_n - na_{n+2} \end{aligned}$$

이므로 $a_{n+2} = \frac{n}{n+1}a_n$이다.

3-(2) 수열 $\{b_n\}$이 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty} b_n$의 값과 $\lim_{n\to\infty} c_n$의 값을 각각 구하시오.

[풀이] $a_{n+2} = \frac{n}{n+1}a_n$을 이용하면 $b_n = \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \frac{2n-1}{2n} \times \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}} = \frac{2n-1}{2n}c_n$임을 알 수 있고, $c_n = \frac{2n}{2n-1}b_n$이다. $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2n-1} = 1$이므로 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용하면

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n}\right) \times \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

임을 알 수 있다.

한편, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$에서 $0 \le \cos x \le 1$이므로 각 자연수 n에 대하여 $0 \le \cos^n x \le \cos^{n-1}x$임을 알 수 있고, 따라서 $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$에서 $\cos^{n-1}x$와 $\cos^n x$로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{n-1}x - \cos^n x)dx \ge 0$이다. 정적분의 성질로부터

$$a_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}x\,dx = a_n$$

임을 알 수 있고, 이를 이용하면 $b_n = \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} \le \frac{a_{2n}}{a_{2n}} = 1$이고 $c_n = \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}} \ge \frac{a_{2n}}{a_{2n}} = 1$이다.

수열의 극한의 대소관계에 의해 $\lim_{n\to\infty} b_n \le 1$ 이고 $\lim_{n\to\infty} c_n \ge 1$이므로 $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 1$ 이다.

3-(3) 수열 $\{b_n\}$이 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{1^2\times 3^2\times\cdots\times(2n-1)^2}{2^2\times 4^2\times\cdots\times(2n)^2}\times n$의 값을 구하시오.

[풀이] $a_{n+2} = \frac{n}{n+1}a_n$을 이용하면, $a_{2n+1}a_{2n} = \frac{n-1}{n}a_{2n-1}a_{2n-2}$을 알 수 있다.

$a_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx = \frac{\pi}{2}$과 $a_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 1$이므로, 위 결과를 귀납적 방법으로 활용하면

$a_{2n+1}a_{2n} = \frac{\pi}{4n}$이 되고, $b_n = \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \frac{4n}{\pi}(a_{2n+1})^2$이 된다. 따라서 (2)의 결과로부터

$$1 = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4n}{\pi}(a_{2n+1})^2$$

을 얻는다. 위 극한값의 결과와 $\frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}} = \frac{2n-1}{2n}$을 이용하면

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{1^2\times 3^2\times\cdots\times(2n-1)^2}{2^2\times 4^2\times\cdots\times(2n)^2}\times n &= \lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{a_3}{a_1}\right)^2\times\left(\frac{a_5}{a_3}\right)^2\times\cdots\times\left(\frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}}\right)^2\times n\right\}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{a_1^2}(a_{2n+1})^2\\ &= \frac{1}{\pi}\times\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\pi}(a_{2n+1})^2\\ &= \frac{1}{\pi}\end{aligned}$$

이다.

부록 2. 검토위원 검토의견서