○ 문항카드 7 (자연계열 I -1)

[이화여자대학교 문항정보]

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	2025학년도 수시모집 논술(논술전형)	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 I / 1번 문항	
출제 범위	교육과정 과목명	수학, 수학Ⅱ, 미적분
	핵심개념 및 용어	도함수의 활용, 역함수, 정적분, 부분적분법
예상 소요 시간	35분 / 전체 100분	

2. 문항 및 제시문

모든 실수 x에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)$가 연속이다. 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때,

(가) $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{3}$

(나) $2f(x)+f'(x)\tan 2x>0$

아래 물음에 답하시오. [35점]

(1) 구간 $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$에서 정의된 함수 $g(x)$가 $g(x)=f(x)\sin 2x$일 때, $g(x)$는 구간 $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$에서 증가함을 보이시오.

(2) (1)에서 언급한 함수 $g(x)$의 역함수를 $h(x)$라 할 때, $h(0)$과 $h(3)$의 값을 각각 구하시오.

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} xf(x)\cos 2x\,dx=a$, $\int_0^{\frac{\pi}{6}} xf'(x)\sin 2x\,dx=b$인 실수 a,b와 (2)에서 언급한 $h(x)$에 대하여, $\int_0^3 h(x)\,dx$의 값을 a,b로 나타내시오.

3. 출제 의도

이 문제는 주어진 함수의 조건들을 통하여 주어진 함수가 증가함을 보이고 해당하는 역함수의 함숫값들과 정적분 값을 추론하는 수리적 조작 능력, 수리적 계산 능력, 수리적 추론 능력을 종합적으로 평가한다.

1-(1). 주어진 함수가 증가함을 도함수를 이용하여 추론하는 수리적 추론 능력을 평가한다.

1-(2). 주어진 함수의 역함수의 기본적인 성질을 간단한 수리적 조작을 통해 구하는 수리적 조작 능력을 평가한다.
1-(3). 주어진 함수의 역함수의 정적분을 주어진 함수의 정적분으로 조작하여 구하는 수리적 추론 능력, 수리적 조작 능력, 수리적 계산 능력을 종합적으로 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문	**[수학] - (4) 함수 - 1 함수** [10수학04-01] 함수의 개념을 이해하고, 그 그래프를 이해한다.
1-(1)	**[수학 II] - (2) 미분 - 3 도함수의 활용** [12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
1-(2)	**[수학] - (4) 함수 - 1 함수** [10수학04-03] 역함수의 의미를 이해하고, 주어진 함수의 역함수를 구할 수 있다.
1-(3)	**[미적분] - (3) 적분법 - 1 여러 가지 적분법** [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. **[미적분] - (3) 적분법 - 2 정적분의 활용** [12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	이준열 외	천재교육	2021	223-227, 233-236
	수학	홍성복 외	지학사	2023	219-224, 228-231
	수학 II	고성은 외	좋은책신사고	2022	80-82
	수학 II	황선욱 외	미래엔	2019	82-88
	미적분	이준열 외	천재교육	2021	155-158, 168-170
	미적분	류희찬 외	천재교과서	2021	172-175, 177-180, 183-185

5. 문항 해설

주어진 함수의 도함수의 부호를 통해 주어진 함수가 증가함을 보이는 방법은 매우 유용한 추론 방법이다. 주어진 함수의 역함수의 함숫값을 주어진 함수의 정의와 조건을 통해 추론하는 것을 요구하는 문항이다. 또한 정적분과 넓이의 관계로부터 특정 구간에서의 정적분의 값을 원래 주어진 함수의 정적분과 연관시켜 수리적 계산 능력, 수리적 조작 능력 및 수리적 추론 능력을 종합적으로 평가하는 문항이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-(1)	구간 $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$에서 정의된 함수 $g(x)$가 $g(x)=f(x)\sin 2x$일 때, $g(x)$는 구간 $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$에서 증가함을 보이시오.	10점
	$g(x)$의 도함수가 $g'(x)=2f(x)\cos 2x+f'(x)\sin 2x$임을 결정함.	4점
	조건 (가)를 활용해 $g'(x)>0$임을 얻음.	3점
	$g'(x)>0$임을 이용하여 $g(x)$가 증가함을 얻음.	3점
1-(2)	(1)에서 언급한 함수 $g(x)$의 역함수를 $h(x)$라 할 때, $h(0)$과 $h(3)$의 값을 각각 구하시오.	10점
	$g(0)=0$과 $g\left(\frac{\pi}{6}\right)=3$임을 얻음.	5점
	$h(x)$가 $g(x)$의 역함수임을 이용하여 $h(0)=0$, $h(3)=\frac{\pi}{6}$임을 얻음.	5점
1-(3)	$\int_0^{\frac{\pi}{6}} xf(x)\cos 2x\,dx=a$, $\int_0^{\frac{\pi}{6}} xf'(x)\sin 2x\,dx=b$인 실수 a, b와 (2)에서 언급한 $h(x)$에 대하여, $\int_0^3 h(x)\,dx$의 값을 a, b로 나타내시오.	15점
	정적분과 넓이의 관계를 통해 $\int_0^3 h(x)\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{6}} g(x)\,dx=\frac{\pi}{2}$을 얻음.	5점
	부분적분법을 통해 $\int_0^{\frac{\pi}{6}} g(x)\,dx=\frac{\pi}{2}-\int_0^{\frac{\pi}{6}} xg'(x)\,dx$을 얻음.	5점
	$\int_0^3 h(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2xf(x)\cos 2x+xf'(x)\sin 2x)\,dx=2a+b$을 얻음.	5점

7. 예시 답안 혹은 정답

1-(1) 구간 $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$에서 정의된 함수 $g(x)$가 $g(x)=f(x)\sin 2x$일 때, $g(x)$는 구간 $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$에서 증가함을 보이시오.

[풀이] 함수 $f(x)$가 미분가능하므로 $g(x)=f(x)\sin 2x$도 미분가능하다. $f'(x)$가 연속이고

$$g'(x)=2f(x)\cos 2x+f'(x)\sin 2x$$

이므로 $g'(x)$은 연속함수이다. $0\le x\le\frac{\pi}{6}$인 실수 x에 대해서, $\cos 2x>0$이고, 조건 (가)에 의해

$$g'(x)=(2f(x)+f'(x)\tan 2x)\cos 2x>0$$

이다. 따라서 $g(x)=f(x)\sin 2x$는 증가한다.

1-(2) (1)에서 언급한 함수 $g(x)$의 역함수를 $h(x)$라 할 때, $h(0)$과 $h(3)$의 값을 각각 구하시오.

[풀이] $g(0)=f(0)\times\sin 0=0$이고 $g\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{\pi}{6}\right)\times\sin\frac{\pi}{3}=3$이다. 따라서 함수 $h(x)$가 $g(x)$의 역함수이므로 $h(0)=0$, $h(3)=\frac{\pi}{6}$이다.

1-(3) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} xf(x)\cos 2x\,dx=a$, $\int_0^{\frac{\pi}{6}} xf'(x)\sin 2x\,dx=b$인 실수 a,b와 (2)에서 언급한 $h(x)$에 대하여, $\int_0^3 h(x)\,dx$의 값을 a,b로 나타내시오.

[풀이] (2)의 결과로부터 $h(0)=0$, $h(3)=\frac{\pi}{6}$이므로, 정적분과 넓이의 관계를 통해

$$\int_0^3 h(x)\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{6}} g(x)\,dx=\frac{\pi}{2}$$

임을 알 수 있다. 또한 부분적분법에 의해

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} g(x)\,dx=\frac{\pi}{2}-\int_0^{\frac{\pi}{6}} xg'(x)\,dx$$

을 얻는다. 따라서

$$\begin{aligned}\int_0^3 h(x)\,dx&=\frac{\pi}{2}-\int_0^{\frac{\pi}{6}} g(x)\,dx\\&=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\int_0^{\frac{\pi}{6}} xg'(x)\,dx\right)\\&=\int_0^{\frac{\pi}{6}} xg'(x)\,dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2xf(x)\cos 2x+xf'(x)\sin 2x)\,dx\end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 문제 조건에 의해

$$\int_0^3 h(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2xf(x)\cos 2x+xf'(x)\sin 2x)\,dx=2a+b$$

이다.

○ 문항카드 8 (자연계열 I -2)

[이화여자대학교 문항정보]

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	2025학년도 수시모집 논술(논술전형)	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 I / 2번 문항	
출제 범위	교육과정 과목명	수학, 미적분
	핵심개념 및 용어	함수의 그래프, 평행이동, 대칭이동, 치환적분법, 등비급수
예상 소요 시간	35분 / 전체 100분	

2. 문항 및 제시문

구간 $[0, \infty)$에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족할 때,

(가) 실수 $a > 1$에 대하여 $f(x) = \begin{cases} a^x - 1 & (0 \le x < 1) \\ a - a^{x-1} & (1 \le x \le 2) \end{cases}$ 이다.

(나) 모든 자연수 n에 대하여, 구간 $[2n, 2n+2]$에서 $f(x) = a^{-n} f(x-2n)$이다.

아래 물음에 답하시오. [35점]

(1) $\int_0^2 f(x)\,dx$의 값을 구하시오.

(2) 모든 자연수 n에 대하여 $2n \le x \le 2n+2$에서의 $f(x)$를 구하시오.

(3) 모든 자연수 n에 대하여 $y = f(x)$와 x축 및 두 직선 $x = 0$, $x = 2n$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n \to \infty} S_n = 2025$를 만족시키는 실수 a의 값을 구하시오.

3. 출제 의도

이 문제는 제시된 조건으로부터 정의역 전체에서의 함수를 이해하고, 함수에 의해 결정되는 부분의 넓이를 수열로 정의하여 그 수열의 극한값을 구하는 문제이다. 조건문에 의해 특정 구간의 함수에 의해 결정되는 도형의 넓이를 대칭, 평행이동의 성질을 이용하여 계산하고, 각 구간들의 도형이 평행이동 되면서 어떻게 변하는지를 추론하여 제시된 부분의 넓이의 극한값을 수열의 합공식을 이용하여 구할 수 있는 수리적 계산 및 추론 능력을 평가한다.

2-(1). 주어진 구간에서의 함수의 그래프를 이해하고 도형의 평행 및 대칭 이동을 활용하여

적분값을 구할 수 있는 수리적 계산능력을 평가한다.

2-(2). 주어진 함수의 조건문을 이해하여 특정 구간에서 어떤 값을 나타내는지 찾을 수 있는 수리적 추론 능력을 평가한다.

2-(3). 주어진 구간에서의 함수를 이해하고 치환적분법을 이용하여 제시된 부분의 넓이를 계산하는 수리적 계산 및 추론 능력을 평가한다. 또한, 등비급수의 수렴과 발산에 대한 학업 성취를 확인한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문	**[수학] - (4) 함수 - 1 함수** [10수학04-01] 함수의 개념을 이해하고, 그 그래프를 이해한다.
2-(1)	**[수학] - (2) 기하 - 4 도형의 이동** [10수학02-08] 평행이동의 의미를 이해한다. [10수학02-09] 원점, x축, y축, 직선 $y=x$축에 대한 대칭이동의 의미를 이해한다. **[수학] - (4) 함수 - 1 함수** [10수학04-01] 함수의 개념을 이해하고, 그 그래프를 이해한다. **[미적분] - (3) 적분법 - 1 여러 가지 적분법** [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
2-(2)	**[수학] - (2) 기하 - 4 도형의 이동** [10수학02-08] 평행이동의 의미를 이해한다.
2-(3)	**[미적분] - (1) 수열의 극한 - 2 급수** [12미적01-05] 등비급수의 뜻을 알고, 그 합을 구할 수 있다. **[미적분] - (3) 적분법 - 1 여러 가지 적분법** [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	홍성복 외	지학사	2020	153-155, 156-158, 219-224
	수학	권오남 외	교학사	2021	144-145, 147-149, 211-218
	수학	박교식 외	동아출판	2021	143-144, 146-148, 211-216
	미적분	황선욱 외	미래엔	2021	34-36, 143-149
	미적분	홍성복 외	지학사	2022	34-35, 144-145
	미적분	권오남 외	교학사	2023	37-38, 149-150

5. 문항 해설

주어진 함수에 의해 결정되는 도형을 파악하기 위해서 함수의 그래프를 이해하고 평행, 대칭 이동의 기하학적 의미를 이해하여 주어진 함수의 적분값을 계산한다. 조건식으로부터 정의역 전체에서의 함수의 그래프를 이해하고 특정 부분의 넓이를 치환적분법을 이용하여 계산할 수 있는 능력을 확인한다. 또한 등비급수의 수렴에 대한 개념의 이해 정도를 확인한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2-(1)	$\int_0^2 f(x)\,dx$의 값을 구하시오.	12점
	$0 \le x < 1$에서의 함수 $f(x)$를 대칭 및 평행이동하여 $1 \le x \le 2$에서의 $f(x)$와 같음을 보임.	4점
	치환적분법을 이용하여 $\int_1^2 f(x)dx = \int_0^1 (a-1-f(x))dx$임을 보임.	4점
	$\int_0^2 f(x)\,dx$의 값이 가로가 1, 세로가 $a-1$인 직사각형의 넓이와 같음을 이용하여 $\int_0^2 f(x)dx = a-1$임을 보임.	4점
2-(2)	모든 자연수 n에 대하여 $2n \le x \le 2n+2$에서의 $f(x)$를 구하시오.	8점
	$y = x-2n$을 이용하여 $2n \le x \le 2n+2$에서의 함수 $f(x)$를 $0 \le y \le 2$에서의 y에 관한 함수로 표현.	4점
	$y = x-2n$을 대입하여 $2n \le x \le 2n+2$에서의 함수 $f(x)$를 표현.	4점
2-(3)	모든 자연수 n에 대하여 $y = f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=2n$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n = 2025$를 만족시키는 실수 a의 값을 구하시오.	15점
	자연수 n에 대하여 $f(2n-2)=0$임을 보임.	1점
	위의 결과를 바탕으로 자연수 n에 대하여 $y = f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=2n$으로 둘러싸인 부분의 넓이가 자연수 $k=1, 2, \cdots, n$에 대하여 $y = f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=2k-2$, $x=2k$로 둘러싸인 부분의 넓이의 합으로 표현됨을 보임.	4점
	치환적분법을 이용하여 $\int_{2k-2}^{2k} f(x)\,dx = a^{-k+1}\int_0^2 f(x)\,dx$임을 보임	4점
	(1)의 결과를 이용하여 $S_n = \sum_{k=1}^{n}(a-1)a^{1-k}$임을 보임.	3점
	$a>1$임을 이용하여 등비급수의 합 $\sum_{n=1}^{\infty}(a-1)a^{1-n} = a$임을 보임.	2점
	문제의 조건으로부터 $a=2025$임을 보임.	1점

7. 예시 답안 혹은 정답

2-(1) $\int_0^2 f(x)dx$의 값을 구하시오.

[풀이] 조건 (가)로부터 $0 \le x \le 1$에서의 함수 $f(x)$의 그래프를 x축 대칭, x축 방향으로 1, y축 방향으로 $a-1$만큼 평행이동 하면 $1 \le x \le 2$에서의 함수 $f(x)$의 그래프와 같음을 알 수 있다. 이로부터 치환적분법을 이용하면

$$\int_1^2 f(x)dx = \int_0^1 (a-1-f(x))dx$$

임을 알 수 있고, $\int_0^2 f(x)dx$의 값은 가로가 1, 세로가 $a-1$인 직사각형의 넓이와

같으므로, $\int_0^2 f(x)dx = a-1$이다.

2-(2) 모든 자연수 n에 대하여 $2n \le x \le 2n+2$에서의 $f(x)$를 구하시오.

[풀이] 조건 (나)로부터 각 자연수 n에 대하여 $f(x) = a^{-n} f(x-2n)$이므로, $y = x-2n$이라 하면 $2n \le x \le 2n+2$일 때, $0 \le y \le 2$이고

$$f(y+2n) = a^{-n} f(y) = \begin{cases} a^{y-n} - a^{-n} & (0 \le y \le 1) \\ a^{1-n} - a^{y-1-n} & (1 \le y \le 2) \end{cases}$$

이다. 다시 $x = y+2n$이라 하면 위 식으로부터

$$f(x) = a^{-n} f(x-2n) = \begin{cases} a^{x-3n} - a^{-n} & (2n \le x \le 2n+1) \\ a^{1-n} - a^{x-3n-1} & (2n+1 \le x \le 2n+2) \end{cases}$$

이다.

2-(3) 모든 자연수 n에 대하여 $y = f(x)$와 x축 및 두 직선 $x = 0$, $x = 2n$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n = 2025$를 만족시키는 실수 a의 값을 구하시오.

[풀이] 함수 $f(x)$의 조건문으로부터 $f(0) = f(2) = 0$이고, (2)의 결과로 자연수 k에 대하여 $f(2k) = f(2k+2) = 0$임을 알 수 있다. $(2k-2, 2k)$에서 $f(x)$가 0이 아니므로 S_n은 $1 \le k \le n$에 대하여 $y = f(x)$와 x축 및 두 직선 $x = 2k-2$, $x = 2k$로 둘러싸인 도형의 넓이를 모두 합한 것과 같음을 알 수 있다. 치환적분법을 이용하면 $y = f(x)$와 x축 및 두 직선 $x = 2k-2$, $x = 2k$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{2k-2}^{2k} f(x)\,dx = \int_0^2 f(x+2k-2)\,dx = a^{1-k}\int_0^2 f(x)\,dx = (a-1)a^{1-k}$$

와 같음을 알 수 있고 따라서

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (a-1)a^{1-k}$$

가 된다. $(a-1)a^{1-k}$는 초항이 $a-1$이고 공비가 $\frac{1}{a}$인 등비수열이고 $a>1$이므로 등비급수의 합은 수렴하며 $\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a-1)a^{1-n} = a$이다. 따라서 $a=2025$이다.

○ 문항카드 9 (자연계열 I -3)

[이화여자대학교 문항정보]

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	2025학년도 수시모집 논술(논술전형)	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 I / 3번 문항	
출제 범위	교육과정 과목명	수학 I, 수학II, 미적분
	핵심개념 및 용어	부정적분, 부분적분법, 미분, 극소값
예상 소요 시간	30분 / 전체 100분	

2. 문항 및 제시문

모든 실수 x에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)$가 연속이다. 함수 $f(x)$가 다음 식을 만족시킬 때,

$$f(x)+(x^2-x+1)e^x = \int_0^x e^{x-t}f'(t)\,dt$$

아래 물음에 답하시오. [30점]

(1) $f(0)=-1$임을 보이시오.

(2) 함수 $F(x)$를 $F(x)=\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt$라 할 때, $F(a)=0$이 되도록 하는 실수 a의 값을 모두 구하시오.

(3) 함수 $f(x)$의 극값을 모두 구하시오.

3. 출제 의도

본 문제는 실수에서 정의된 함수가 도함수와 적분의 형태로 주어졌을 때, 주어진 조건을 이용하여 함수를 x에 대한 식으로 나타낸 후 함수의 x절편과 극값을 구하는 문제로서 주어진 관계식을 미분과 적분의 기본적인 성질을 이용하여 분석한 후 이를 바탕으로 함수의 x절편과 극솟값을 추론하고 해를 찾는 과정을 수행하는 수리적 문제 해결 능력을 평가하는 문제이다. 이 과정에서 정적분의 값과 부분적분법을 적용하여 도함수가 포함된 적분을 함수가 포함된 적분으로 변형시켜 함수의 성질에 관한 수리적 개념의 이해와 종합적 활용 능력, 그리고 문제 해결을 위한 효율적 계산의 설계와 수행에 관한 계산능력의 수월성을 평가한다.

3-(1). 정적분의 값이 0이 되는 경우를 이용하여 함수의 값을 구하는 문제로서 정적분의 수리적 개념의 이해와 조작 능력을 평가한다.

3-(2). 부분적분법을 활용하여 적분하는 함수를 다른 형태로 변형시켜 계산하는 문제로 미분

과 부정적분을 사용하여 적분하는 함수를 계산하기 편한 형태로 변형시키는 능력과 적분의 계산 능력을 평가한다.

3-(3). 함수가 지수함수와 다항함수의 곱으로 주어졌을 때 함수의 극값을 찾는 문제로서 합수의 곱에 대한 미분을 계산하는 능력과 미분계수의 부호로부터 함수의 증가, 감소를 판별하는 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문	**[수학 I] - (1) 지수함수와 로그함수 - ② 지수함수와 로그함수** [12수학 I 01-06] 지수함수와 로그함수의 뜻을 안다. [12수학 I 01-08] 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있다. **[수학 II] - (3) 적분 - ② 정적분** [12수학II03-03] 정적분의 뜻을 안다. **[미적분] - (2) 미분법 - ① 여러 가지 함수의 미분** [12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다.
문항 3-(1)	**[수학 I] - (1) 지수함수와 로그함수 - ② 지수함수와 로그함수** [12수학 I 01-06] 지수함수와 로그함수의 뜻을 안다. [12수학 I 01-08] 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있다. **[수학 II] - (3) 적분 - ② 정적분** [12수학II03-03] 정적분의 뜻을 안다.
문항 3-(2)	**[수학 I] - (1) 지수함수와 로그함수 - ② 지수함수와 로그함수** [12수학 I 01-06] 지수함수와 로그함수의 뜻을 안다. [12수학 I 01-08] 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있다. **[수학 II] - (2) 미분 - ② 도함수** [12수학II02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다. **[수학 II] - (3) 적분 - ② 정적분** [12수학II03-03] 정적분의 뜻을 안다. **[미적분] - (2) 미분법 - ① 여러 가지 함수의 미분** [12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다. **[미적분] - (3) 적분법 - ① 여러 가지 적분법** [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문항 3-(3)	**[수학 I] - (1) 지수함수와 로그함수 - ② 지수함수와 로그함수** [12수학 I 01-06] 지수함수와 로그함수의 뜻을 안다. [12수학 I 01-08] 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있다. **[수학 II] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용** [12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. **[수학 II] - (3) 적분 - ② 정적분** [12수학II03-03] 정적분의 뜻을 안다. **[미적분] - (2) 미분법 - ① 여러 가지 함수의 미분** [12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 I	황선욱 외	미래엔	2021	41-54
	수학 II	권오남 외	교학사	2019	71-74, 88-95, 130-133
	미적분	홍성복 외	지학사	2019	57-60, 148-155

5. 문항 해설

이 문제는 도함수와 지수함수의 곱의 정적분으로 정의되는 함수를 다루는 문제이다. $e^x f'(x)$에 부분적분법을 적용하여 함수 $f(x)$를 포함하는 식으로 변형시킨 후 이를 바탕으로 함수의 고유 성질을 유도할 수 있는 수리적 능력을 평가하기 위하여 출제되었다. 이 과정에서 고등학교 교과과정의 수학I, 수학Ⅱ, 미적분에서 습득한 다양한 함수의 미분과 부정적분, 정적분의 값을 통합적으로 활용하여 최초의 방정식에 감추어져 있던 함수의 고유 성질을 유추하는 능력을 평가한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3-(1)	$f(0)=-1$임을 보이시오.	5점
	주어진 식에 $x=0$을 대입하여 $f(0)=-1$을 얻음	5점
3-(2)	함수 $F(x)$를 $F(x)=\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt$라 할 때, $F(a)=0$이 되도록 하는 실수 a의 값을 모두 구하시오.	13점
	$\int_0^x e^{-t}f'(t)\,dt$에 부분적분을 적용함.	3점
	$\int_0^x e^{-t}f'(t)\,dt=e^{-x}f(x)+1+\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt$ 유도함.	5점
	$F(x)=\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt=x^2-x$를 유도함.	3점
	$F(a)=0$을 만족하는 실수 a는 0 또는 1임을 보임.	각 1점 총 2점
3-(3)	함수 $f(x)$의 극값을 구하시오.	12점
	$\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt=x^2-x$의 양변을 x에 대하여 미분함.	3점
	$f(x)=e^x(2x-1)$를 찾음.	3점

하위 문항	채점 기준	배점
	$f'(x)=0$인 실수 x는 $-\frac{1}{2}$임을 보임.	2점
	$x=-\frac{1}{2}$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀜을 확인	2점
	$f(x)$는 $x=-\frac{1}{2}$에서 극소값 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-2e^{-\frac{1}{2}}$을 가진다.	2점

7. 예시 답안 혹은 정답

3-(1) $f(0)=-1$임을 보이시오.

[풀이] $f(0)=-(0^2-0+1)e^0+\int_0^0 e^{0-t}f'(t)\,dt=-e^0=-1$이다.

3-(2) 함수 $F(x)$를 $F(x)=\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt$라 할 때, $F(a)=0$이 되도록 하는 실수 a의 값을 모두 구하시오.

[풀이] 부분적분법을 적용하면,

$$\begin{aligned}\int_0^x e^{-t}f'(t)\,dt&=\left[e^{-t}f(t)\right]_0^x+\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt\\&=e^{-x}f(x)-f(0)+\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt\\&=e^{-x}f(x)+1+\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt\end{aligned}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}f(x)&=-(x^2-x+1)e^x+e^x\int_0^x e^{-t}f'(t)\,dt\\&=-(x^2-x+1)e^x+e^x\left(e^{-x}f(x)+1+\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt\right)\\&=-(x^2-x+1)e^x+f(x)+e^x+e^x\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt\end{aligned}$$

이 된다. 이 식을 정리하면,

$$e^x\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt=e^x(x^2-x)$$

이 된다. 양변을 e^x로 나누면

$$F(x)=\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt=x^2-x$$

를 얻는다. 따라서 $F(a)=0$을 만족하는 실수 a는 0 또는 1이다.

3-(3) 함수 $f(x)$의 극값을 구하시오.

[풀이] (2)의 결과로부터 $\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt = x^2 - x$이므로, 양변을 x에 대하여 미분하면 정적분과 미분의 관계에 의하여 $e^{-x}f(x) = 2x-1$이 성립한다. 따라서 $f(x) = e^x(2x-1)$이고 $f'(x) = e^x(2x+1)$이다. $f'(x)=0$인 실수 x는 $-\frac{1}{2}$뿐이고, $x=-\frac{1}{2}$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=-\frac{1}{2}$에서 극소값 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-2e^{-\frac{1}{2}}$을 가진다.