BECAUS

중앙대학교

2016학년도 중앙대학교 논술백서

| 자연계열 |



Contents

제1장 : 자연계열 논술의 이해

1. 중앙대학교 자연계열 논술은? 004
2. 자연계열 논술 문항의 구성 004
3. 논술 시험에 대한 조언과 중요한 TIP 005

제2장 : 자연계열 논술의 문항 파악하기

1. 수학 008
2. 물리 053
3. 생명과학 069
4. 화학 082

제3장 : 자연계열 논술 문항 체험하기

1. 수학 104
2. 물리 118
3. 생명과학 122
4. 화학 128

제1장

자연계열 논술의 이해

1. 중앙대학교 자연계열 논술은? 004
2. 자연계열 논술 문항의 구성 004
3. 논술 시험에 대한 조언과 중요한 TIP 005

1 CHUNG ANG 2016

자연계열 논술의 이해

01_중앙대학교 자연계열 논술은?

중앙대학교가 수시모집전형에서 논술 전형을 계속 유지하는 가장 큰 이유는 중앙대학교 논술 전형이 미래지향적인 인재를 선발하는 효율적인 평가 방식이라고 확신하기 때문이다. 오랜 기간 논술 전형의 관리 역량을 축적해 온 중앙대학교는 논술 전형을 통하여 우수한 학생을 성공적으로 선발해 오고 있다. 이는 논술 전형을 통해 입학한 학생들의 본교 입학 후 성적에서 증명되고 있다.

중앙대학교 2016학년도 논술 전형 시험의 전체적인 출제 방향 및 평가 목표는 향후 중앙대학교에 진학하여 학문을 탐구하는 데 있어서 부족함이 없는 인재를 합리적이고 객관적으로 선발하는 데에 맞춰져 있다. 구체적으로 중앙대학교 자연계열 논술 시험에서는 수험생들이 고교과정에서 배운 수학과 과학의 기본 개념들을 잘 이해하고 있는가, 기본 개념들과 문항 또는 제시문을 통해 이해한 내용을 바탕으로 논리적 사고를 전개할 수 있는가, 문제를 창의적으로 해결할 수 있는가, 자신이 생각한 바를 언어나 수식을 통해 논리적으로 기술할 수 있는가의 여부를 중점적으로 평가할 것이다.

기본적으로는 수학, 공통과학, 물리Ⅰ, 화학Ⅰ, 생명과학Ⅰ 교과서와 EBS 교재에서 내용을 발췌하여 사용할 것이며, 경우에 따라 물리Ⅱ, 화학Ⅱ, 생명과학Ⅱ의 내용이 일부 포함될 수 있다.

중앙대학교 자연계열 논술전형에 관심을 갖고 준비중인 수험생들은 잘 알고 있는 바와 같이, 중앙대학교 자연계열 논술의 기본 성격은 2014학년도까지는 여러 교과목에 대한 제시문을 통합적으로 이해하여야 풀 수 있는 통합형 논술이었다. 그러나, 학교시험, 수능준비와 함께 통합형 논술을 준비해야 하는 수험생의 부담과 논술을 지도하시는 일선 교사 선생님들의 고충을 덜어드리기 위해 오랜 논의를 거쳐 2015학년도 논술시험부터 과거 통합형의 틀을 벗어나 **단일교과형** 논술 문항을 출제하기로 결정하였고, 이를 2014년 봄에 시행된 모의논술부터 적용하였다.

중앙대학교 자연계열 논술을 준비하는 수험생들이 이렇게 변화된 포맷에 익숙해지기 위해서는 반드시 작년에 치러진 모의논술 및 본 논술 문항을 풀어보아야 하며, 이 책의 내용을 적극적으로 활용하는 것이 올해 논술에서 좋은 결과를 얻을 수 있는 필수사항이다. 이번에 발간되는 2016학년도 중앙대학교 논술 가이드북은, 예년에 비해 방대한 내용과 자세한 설명을 포함하고 있으며, 중앙대학교 논술을 준비하는 수험생과 이 책을 사용하여 학생들을 지도하시는 선생님들께 큰 도움이 될 것이라 확신하며 정성껏 제작한 책이다. 이 책과 함께 추후 시행될 논술설명회를 통하여 제시하게 될 논술 출제 형식은 본 논술에서 반드시 유지할 것이며, 이는 논술 시험에 대한 예측 가능성을 제고함으로써 수험생들이 사교육에 의존하는 것을 방지하는 데 가장 큰 목적이 있다. 수험생들은 학교에서 습득한 교과목의 지식을 바탕으로 이 논술 가이드북의 정보를 잘 활용한다면 중앙대학교의 논술전형에서 좋은 결과를 얻을 수 있을 것이다.

02_자연계열 논술 문항의 구성

중앙대학교 자연계열 논술 문항의 전체적인 구성은 다음과 같다.

[문제 1], [문제 2], [문제 3]은 수학과 관련된 문항으로서 지원자가 모두 풀어야 하는 문제이며 배점은 각각 20점, 20점, 30점이다. [문제 4]는 물리, 화학, 생명과학 가운데 지원자가 원서 접수시 본인이 선택한 과목을 풀 수 있는 문제이며 배점은 30점이다. 또한, 경쟁이 매우 치열한 의학부를 지원하는 학생은 [문제 1], [문제 2], [문제 3] 가운데 한 두 문제를 타 학과 지원자에 비하여 상대적으로 난이도가 높은 문제를 풀게 될 것이다.

[문제 1]은 가장 쉬운 문항으로서 확률, 경우의 수, 기댓값 등에 관한 문제가 출제 된다. [문제 2], [문제 3]은 고교 수학 전반에 관하여 출제되는 문항으로서 [문제 1]에 비하여 상대적으로 난이도가 높은 문항이 출제되며, 각각 소문항 두 개로 구성된다. [문제 4]는 물리, 화학, 생명과학에 해당하는 문항으로서 수험생은 원서 접수시 본인이 선택한 과목의 문제를 풀면 된다. [문제 4]도 두 개의 소문항으로 구성된다.

특히 [문제 1]에서 확률, 경우의 수, 기댓값 등에 관한 문제를 출제하는 이유는, 문제에서 설명되고 주어지는 정보를 수험생들이 정확하게 이해하고 문제 풀이에 적용하는 이해력과 응용력을 측정하기 위함이다. 어려운 수학 문제를 잘 풀어 내는 학생들도 이러한 유형의 문제처럼, 정보를 주고 풀어야 할 목표를 제시하면 의외로 당황하여 난감해 하는 경우가 많다. [문제 2], [문제 3]은 수험생들에게 가장 익숙한 형태의 문항이 될 것이며, [문제 4]는 물리, 화학, 생명과학 가운데 한 과목의 문제를 풀면 된다. 과목별 난이도가 최대한 비슷하도록 출제할 것이나, 선택과목에 따른 유리 또는 불리가 발생하지 않도록 [문제 4]의 점수는 표준화 점수를 부여한다.

03_논술 시험에 대한 조언과 중요한 TIP

중앙대학교 논술시험의 시간은 두 시간, 즉 120 분으로 제한되어 있으며, 자연계열 논술 시험에서는 답안 작성시, 인문계열처럼 원고지 작성법, 맞춤법 등으로 인한 감점사항은 없다. 수험생에게 제공되는 답안지는 각 문항별로 답안을 작성해야 하는 영역이 나뉘어져 있으며, 수험생들은 반드시 해당 문항의 답안지 영역 내에 자유롭게 본인의 답안을 적어 제출하면 된다.

논술시험을 성공적으로 치르기 위해서 고려할 사항은 많이 있으나, 가장 중요한 것이 무엇인지 살펴 보자.

먼저 시간을 효율적으로 활용하여야 한다. 보통 때는 두 시간이 길게 느껴 질 수도 있지만, 긴장과 집중이 초고도에 달하는 논술시험장에서의 두 시간은 상대적으로 금방 지나가는 것처럼 느껴질 것이다. 문제를 푸는 순서를 미리 정해서 시험에 임하는 것도 좋은 전략이다.

가장 좋은 문제 풀이 순서는 [문제 1], [문제 4], [문제 2], [문제 3] 또는 [문제 4], [문제 1], [문제 2], [문제 3] 이다. 그 이유는 [문제 1]은 가장 쉬운 문제이며, [문제 4]는 수험생이 가장 자신이 있는 과목이기 때문이다. 상대적으로 어려운 [문제 2], [문제 3]이 시간이 많이 소요될 것이라는 생각에 먼저 풀려고 하는 것은 추천하고 싶지 않은 전략이다. 왜냐하면 어려운 문제를 먼저 대하게 되면 쓸데없는 자신감의 결여로 이어질 가능성이 높기 때문이다. 또한, 막히는 문제를 만났을 때, 지나치게 그 문제에 오랜 시간을 소비하는 것은 좋지 않다. 왜냐하면, 총점이 높은 학생이 합격하게 되므로 상대적으로 쉬운 문제에서 감점용인을 최소화하여 고득점을 올리는 것이 차라리 낫기 때문이다.

전통적으로 중앙대학교 자연계열 논술시험의 첫 번째 문항인 [문제 1]은 출제되는 문항들 가운데 가장 쉬운 문제에 속한다. 이는 극도로 긴장하고 시험에 임하는 수험생들의 긴장을 완화시켜 주고자 하는 배려에 따는 것이다. 이처럼 [문제 1]은 쉬운 문제이므로 수험생들은 절대 긴장하지 말고 풀어야 한다.

논술시험에서 가장 변별력이 있는 문항이 어떤 문항인지를 생각해 보라고 하면, 보통 가장 어려운 문제가 변별력이 있다고 대답할 것이다. 아주 틀린 이야기는 아니지만, 생각을 뒤집어보면 오히려 가장 쉬운 문제가 의외로 큰 변별력을 가질 수도 있다는 것을 이해할 수 있다. 중앙대학교 자연계열 논술 문항 가운데 가장 중요한 문항은 바로 [문제 1]이다. 가장 쉬운 문제이므로, 최대한 고득점을 받을 수 있는 답안을 작성해야 하는데, 또 한 가지 고려해야 할 것이 바로 시간이다. 상대적으로 시간이 많이 소요될 [문제 2], [문제 3]의 풀이에 필요한 시간을 확보하기 위해서는 [문제 1]을 가능한 빨리 풀어야 하기 때문이다. 경쟁이 치열한 논술 전형에서 합격권에 들어 오기 위한 필요 조건은 배점이 20점인 [문제 1]을 가능한 빠른 시간에 풀어서 최소한 15점 정도를 받아야 한다는 것이다.

앞서 설명한 바와 같이, 논술 문항을 풀다 보면 막히는 문제를 만날 수도 있다. 그런 일이 발생했을 때 스스로를 긴장시키는 실수를 범해서는 안 된다. 제한된 시간 내에 자신의 실력을 제대로 발휘하는데 가장 큰 적은 긴장하는 것이다. 내게 어려운 문제는 다른 수험생들에게도 어려울 것이라고 생각하며 긴장하지 말아야 한다.

기출 문제를 반드시 풀어 보아야 하는 것도 필수적이다. 앞서 언급한 바와 같이, 중앙대학교 자연계열 논술은 2015학년도 입시부터 포맷이 변경되었으므로, 수험생들이 풀어 봐야 할 기출문제는 2014년 봄에 치러진 모의논술, 겨울에 치러진 본 논술의 자연계열I, 자연계열II, 의학부 등이다. 이 책의 다음 장부터는 기출문제 일부와 새롭게 만든 예시 문항에 대한 해설, 설명, 접근 방법 등의 내용이 매우 세밀하고 자세하게 제시될 것이니, 이 책을 잘 활용하는 것도 필수사항이라 하겠다.

제2장

자연계열 논술의 문항 파악하기

1. 수학 008
2. 물리 053
3. 생명과학 069
4. 화학 082

2 CHUNG ANG 2016

자연계열 논술의 문항 파악하기

01_수학

2015학년도부터 논술 전형이 개별 교과형으로 변경되었고, 이러한 형태에 맞춘 수학 논술 문제가 2015학년도 모의 논술, 2015학년도 수시 일반 논술 자연계열/의학부, 자연계열II 등 3회 출제되었다. 이하에서는 기출 수리 논술 시험의 제시문과 문항 설명, 예시 답안과 채점 기준을 통해, 수학 논술을 준비하는 학생들에게 올바른 준비 방향을 제시하려 한다.

[참고도서]

수학 : 천재교육, 중앙교육진흥연구소, 더텍스트
수학 I : 교학사, 두산동아, 좋은 책 신사고, 천재교육
수학II : 금성출판사, 더텍스트, 성지출판, 중앙교육진흥연구소
수학의 활용 : 금성출판사
적분과 통계 : 중앙교육진흥연구소
기하와 벡터 : 교학사, 더텍스트, 좋은 책 신사고
EBS 포스 고교수학I

2015학년도 모의 논술

문제 1

단판으로 승부를 가리지만, 무승부일 경우 재시합을 하는 운동 경기가 있다. A팀이 B팀에 승리할 확률은 p, 패할 확률은 q, 무승부일 확률은 r 이라고 한다. 단, $p > 0$, $q > 0$, $r > 0$, $p + q + r = 1$ 이다. 계속 무승부가 되어 총 경기 횟수가 10 경기가 될 때까지 승부가 나지 않을 경우 동전 던지기로 승부를 결정한다고 할 때, 두 팀이 치르게 될 경기 횟수의 기댓값을 r 에 대한 식으로 나타내시오.

1. 문제의 배경지식

중앙대학교 자연계 논술의 1번은 적분과 통계의 3단원과 4단원을 구성하고 있는 확률과 통계에 관한 문제이다. 이번 문제는 이산확률변수의 기댓값(교학사 적분과 통계, pp. 103–135)을 구하는 문제이다. 문제를 풀기 위해 알아야 할 개념들에 관한 배경 설명은 다음과 같다.

동전이나 주사위 던지기와 같이 같은 조건에서 반복할 수 있으며, 그 결과가 우연에 의하여 달라지는 실험이나 관찰을 시행이라고 하고, 시행에서 나올 수 있는 모든 결과의 집합을 표본공간이라고 한다. 주어진 시행에서 어떤 사건 A가 일어날 가능성을 수로 나타낸 것을 사건 A가 일어날 확률이라고 하고, 기호로 $P(A)$와 같이 나타낸다. 어떤 시행에서 표본공간 S의 각 근원사건(S)의 부분집합 중에서 한 개의 원소로 이루어진 사건)이 일어날 가능성이 같다고 기대될 때, 표본공간의 원소의 개수 $n(S)$에 대한 사건 A의 원소의 개수 $n(A)$의 비를 사건 A의 수학적 확률이라고 하고, 기호로

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

와 같이 나타낸다.

두 개의 동전을 던져서 모두 앞면이 나오는 사건을 A라 하고, 모두 뒷면이 나오는 사건을 B라 할 때, 두 사건 A, B는 동시에 일어나지 않는다. 이와 같이, $A\cap B=\phi$인 두 사건 A와 B를 서로 배반이라 하고, 이 두 사건을 배반사건이라 한다. 두 사건 A와 B가 배반사건이면 A 또는 B가 일어날 확률 $P(A\cup B)$은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$P(A\cup B)=P(A)+(B) \quad \text{(확률의 덧셈정리)}$$

두 사건 A, B에 대하여 사건 A가 일어나는 것이 사건 B가 일어날 확률에 영향을 주지 않을 때, 두 사건 A, B는 서로 독립이라고 하며, 이때 확률의 곱셈정리로부터 다음이 성립한다.

$$P(A\cap B)=P(A)P(B) \text{ (단, } P(A)\neq 0,\ P(B)\neq 0)$$

어떤 시행의 표본공간 S의 각 원소(근원사건)를 실수의 집합 R의 한 원소에 대응시키는 함수 $X:S\longrightarrow R$를 확률변수라고 하고,

사건 $\{X=x\}$의 확률을 간단히 $P(X=x)$와 같이 나타낸다.

확률변수 X 가 취하는 값이 유한개이거나 자연수와 같이 일일이 셀 수 있을 때, X를 이산확률변수라고 한다. 이산확률변수 X가 취할 수 있는 값이 $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n$이고, X가 이 값을 취할 확률이 각각

$$P(X=x_i)=p_i \quad (i=1,2,3,\ldots,n)$$

라고 할 때, $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n$ 과 $p_1,p_2,p_3,\ldots,p_n$ 의 대응 관계를 이산확률변수 X의 확률분포 또는 간단히 이산확률분포라고 한다.

이산확률변수 X의 확률분포가 위와 같을 때,

$x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$ 를 이산확률변수 X 의 기댓값 또는 평균이라고 하고, 기호로 $E(X)$와 같이 나타낸다.

2. 문제의 분석 및 풀이 과정

이번 문제는 어떤 운동 경기에서 무승부가 날 가능성이 있고, 최대 10경기까지 할 수 있을 경우, 두 팀이 경기를 치르게 될 횟수의 기댓값을 구하는 문제이다. 문제에서 한 팀이 다른 팀에 승리할 확률, 패배할 확률, 무승부일 확률이 모두 모르는 값으로 정해져 있다고 주어져 있으므로, 두 팀이 경기를 치르는 것은 시행이다. 이 시행에서 나올 수 있는 결과는 A팀이 B팀에 승리, A팀이 B팀에 패배, 무승부의 세 가지 사건이며, 각각의 사건이 일어날 확률은 p, q, r 이라고 한다.

두 팀이 경기를 치르게 될 횟수를 확률변수 X라고 하면, 단판으로 승부를 가리지만 무승부일 경우 최대 10경기까지 재시합을 하게 되므로, 확률변수 X가 정의되는 표본공간을 S라고 하고, A팀이 승리하는 사건을 A, B팀이 승리하는 사건을 B, 무승부일 사건을 N이라고 하면, S의 원소(근원사건)들은 다음과 같다.

$$A,\ B,\ NA,\ NB,\ NNA,\ NNB,\ldots,N^9A,\ N^9B,\ N^{10}$$

각각의 경기는 서로 독립이므로 확률의 곱셈정리로부터 위의 각 사건이 일어날 확률은 다음과 같이 각각 구할 수 있다.

$$p,\ q,\ rp,\ rq,\ r^2p,\ r^2q,\ldots,r^9p,\ r^9q,\ r^{10}$$

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3,…, 10 이므로, 위에서 구한 근원사건의 확률을 이용하면, X의 각 값에 대응되는 확률을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$p+q,\ r(p+q),\ r^2(p+q),\ldots,r^9(p+q)+r^{10}$$

여기서, $X=10$인 확률은 9번 무승부 후 10번째 승부가 나는 경우와 10번 모두 무승부가 되는 경우를 모두 고려해야 한다. 따라서, X의 기댓값 $E(X)$는 이산확률변수의 기댓값을 구하는 공식을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}E(X)&=1\cdot(p+q)+2\cdot r\cdot(p+q)+3\cdot r^2\cdot(p+q)+\cdots+9\cdot r^8\cdot(p+q)+10\cdot\left\{r^9\cdot(p+q)+r^{10}\right\}\\&=(p+q)\cdot\left\{1+2\cdot r+3\cdot r^2+\cdots+10\cdot r^9\right\}+10\cdot r^{10}\\&=(p+q)\cdot S+10\cdot r^{10}\end{aligned}$$

여기서, $S=1+2\cdot r+3\cdot r^2+\cdots+10\cdot r^9$로 정의한다. 위의 기댓값을 r에 대한 식으로 정리하기 위해서는 p+q를 r에 대한 식으로 바꿔야 하고, S를 간단하게 정리하여야 한다. 먼저 문제에 주어진 조건 $p+q+r=1$을 이용하면 $p+q=1-r$임을 알 수 있다. 또한, S를 간단하게 정리하기 위해서 S에 r를 곱하여 S에서 빼면

$$\begin{aligned}S-rS=(1-r)\cdot S&=(1+2r+3r^2+\cdots+10r^9)-(r+2r^2+3r^3+\cdots+10r^{10})\\&=1+r+r^2+\cdots+r^9-10\cdot r^{10}=\frac{1-r^{10}}{1-r}-10\cdot r^{10}\end{aligned}$$

따라서, $E(X)=(p+q)\cdot S+10\cdot r^{10}=(1-r)\cdot S+10\cdot r^{10}=\left\{\frac{1-r^{10}}{1-r}-10\cdot r^{10}\right\}+10\cdot r^{10}=\frac{1-r^{10}}{1-r}$ 이다.

3. 예시 답안 및 채점 기준

예시 답안

- 확률변수 X를 A팀이 B팀과 하게 되는 경기 수라고 정의하면, X가 가질 수 있는 값은 1, 2, …, 10 이고 이에 대한 확률을 고려하면 X의 기댓값 $E(X)$는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}E(X)&=1\cdot(p+q)+2\cdot r\cdot(p+q)+3\cdot r^2\cdot(p+q)+\cdots+9\cdot r^8\cdot(p+q)+10\cdot\left\{r^9\cdot(p+q)+r^{10}\right\}\\&=(p+q)\cdot\left\{1+2\cdot r+3\cdot r^2+\cdots+10\cdot r^9\right\}+10\cdot r^{10}\\&=(p+q)\cdot S+10\cdot r^{10}\end{aligned}$$

- 여기서 $S=1+2\cdot r+3\cdot r^2+\cdots+10\cdot r^9$로 정의하고, $X=10$인 확률은 9번 무승부 후 10번째 승부가 나는 경우와 10번 모두 무승부가 되는 경우를 모두 고려해야 한다.

- S의 계산은 $r \cdot S$를 구하여 빼주면 다음과 같다.

$$(1-r)\cdot S = 1 + r + r^2 + \cdots + r^9 - 10\cdot r^{10}$$
$$= \frac{1-r^{10}}{1-r} - 10\cdot r^{10}$$

- $p+q+r=1$의 조건으로부터 $(1-r)\cdot S = (p+q)\cdot S$이기 때문에 $E(X)$는 다음과 같다.

$$E(X) = \frac{1-r^{10}}{1-r}$$

- 만일 $X=10$일 확률을 r^9으로 놓고 계산해도 동일한 답을 얻을 수 있다.

채점 기준

- 기댓값의 정의를 이용하여 $E(X)$를 올바르게 표현한 경우 +10점
- X가 갖는 값과 이에 대한 확률에 오류가 있는 경우 각 −3점
- $E(X)$의 식으로부터 이에 대한 계산을 올바르게 한 경우 +10점
- 계산상 오류는 각 −3점

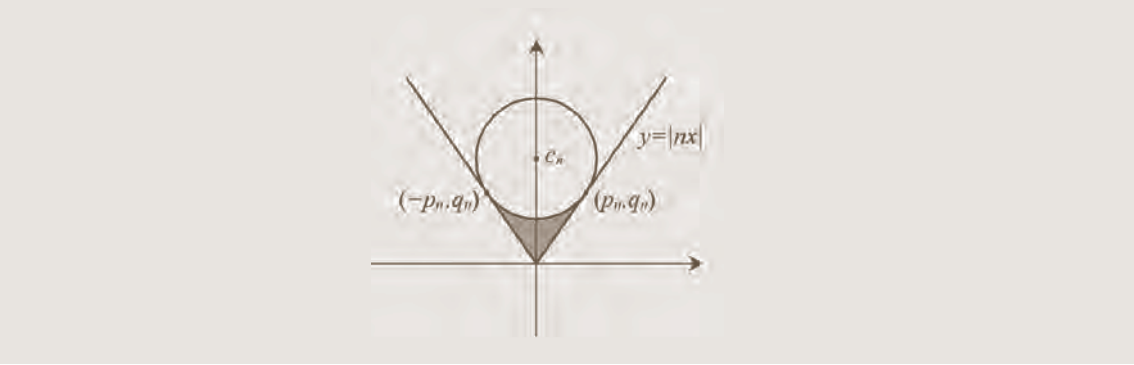
※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~3점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 20점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

문제 2

다음 제시문 (가)–(다)를 읽고 문항에 답하시오.

(가) $y=|nx|$의 그래프에 중심이 $(0, c_n)$이고 반지름이 $\frac{1}{2\sqrt{n}}$인 원이 아래의 그림과 같이 접하고 있다.

두 접점을 각각 $(p_n, q_n), (-p_n, q_n)$이라 하자. 단, n은 양의 정수이다.



(나) 점 (x_0, y_0)와 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는 다음과 같다.

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

(다) 수렴하는 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n \pm \lim_{n\to\infty}b_n$이 성립한다.

[문제 2-1] 제시문 (가)에 주어진 c_n과 p_n의 값을 각각 n에 대한 식으로 나타내시오. [10점]

[문제 2-2] 제시문 (가)의 그림과 같이 $y=|nx|$와 원에 의해 둘러싸인 영역의 넓이를 A_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}A_n$을 구하는 과정을 논리적으로 설명하시오. [10점]

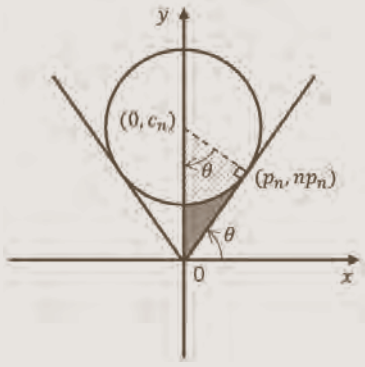
1. 제시문의 분석, 배경 지식, 문제 풀이 과정

(가)–(나) 제시문을 읽고 문제에 주어진 도형 사이의 관계를 이해한다. 문제에서 n에 따라 도형의 관계가 정해지게 된다. $y=|nx|$는 V자 형태로 n이 클수록 좁은 V자 형태가 된다. 이 V자 도형에 접하는 원이 있고, 이 원의 반지름이 n의 함수로 주어졌다. 원의 중심 $(0, c_n)$은 y축 위에 있고, c_n는 n의 함수인 V자 도형과 원의 반지름, 그리고 두 도형이 접한다는 조건에 의해서 결정된다. 즉, c_n을 n의 함수로 나타낼 수 있다.

$y=|nx|$위에 있고, 이 원과 접하는 점 (p_n, q_n)은 (p_n, np_n)과 같다. 원에 접하는 선은 이 접점에서 원의 반지름을 연결한 선분과 직교한다. 즉,$(0, c_n)$과 (p_n, np_n)을 지나는 직선의 기울기는 $-1/n$이라는 조건을 이용하여 p_n을 n의 함수로 나타낼 수 있다.

[문제 2-1]의 답안을 작성할 때에는 c_n과 p_n을 구하는 과정을 수리적으로 유도하며, 유도 과정을 보충 설명하여야 한다.

[문제 2-2]를 해결하기 위해서는 도형 사이의 관계로부터 면적을 구하는 것을 이해하여야 한다. 문제에 주어진 면적을 c_n과 p_n으로 나타낼 수 있는 방법은 다양하다. 계산의 오류를 줄이기 위해서는 가장 간단한 방법을 찾는 것이 중요하다. 원점과 두 점 $(0, c_n), (p_n, q_n)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 면적에서 원, y축, $y=nx$에 의해 만들어지는 부채꼴의 면적을 빼고, 이것을 2배하여 주어진 도형의 면적을 구할 수 있다.



위에서 부채꼴의 면적을 구할 때 부채꼴의 중심각 θ는 $y=nx$가 x축과 이루는 각과 같다. 즉 $\tan\theta = n$의 관계가 있다. 탄젠트함수의 역함수 $\theta = g(n) = \tan^{-1}(n)$를 정의하고, 반지름을 $r = \frac{1}{2\sqrt{n}}$이라 하면, 부채꼴의 면적을 다음과 같이 n의 함수로 나타 낼 수 있다.

$$\text{부채꼴의 면적} = r^2\pi\frac{\theta}{2\pi} = \pi\frac{g(n)}{2\pi\cdot 4n} = \frac{g(n)}{8n}$$

원점과 두 점 $(0, c_n), (p_n, q_n)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 면적을 n의 함수 a_n이라 하고, 위 부채꼴의 면적을 b_n이라 하면

[문제 2-2]에서 구하고자 하는 면적 A_n을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$A_n = 2(a_n - b_n)$$

제시문 (다)에서는 문제 2를 해결하는데 필요한 무한수열의 극한값에 대한 기본 성질을 설명하였다. 무한수열의 극한값들은 상수를 곱하는 것과 더하고 빼는 것이 가능하다.

따라서 구하고자 하는 면적의 극한값을 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} 2(a_n - b_n) = 2\lim_{n\to\infty} a_n - 2\lim_{n\to\infty} b_n$$

여기서 주의할 것은, $b_n = \frac{g(n)}{8n}$에서 $\lim_{n\to\infty} g(n) = \frac{\pi}{2}$이기 때문에, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$이 된다.

[문제 2-2]의 답안을 작성할 때에는 구하고자 하는 면적의 부분 면적들을 n의 함수로 나타내고, 부분 면적들의 극한값을 조합하여 전체 면적의 극한값을 구하는 과정을 수리적으로 제시하고, 각 단계마다 보충 설명을 하여야 한다.

2. 문항별 예시 답안 및 채점 기준

[문제 2-1] 예시 답안

- 제시문 (나)에 주어진 공식으로부터 $\frac{1}{2\sqrt{n}}=\frac{c_n}{\sqrt{n^2+1}}$을 얻으므로, $c_n=\frac{1}{2}\sqrt{n+\frac{1}{n}}$이다.
- 두 점 $(0,c_n)$과 (p_n,np_n)을 지나는 직선은 $y=nx$와 직교하므로 $-1=n\cdot\frac{c_n-q_n}{-p_n}=n\cdot\frac{c_n-np_n}{-p_n}$이다.
- 식을 정리하여 $p_n=\frac{c_n}{n+\frac{1}{n}}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{n+\frac{1}{n}}}{n+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2\sqrt{n+\frac{1}{n}}}$이다.

채점 기준

- c_n의 식을 제시하면 +5점.
- p_n의 식을 제시하면 +5점.

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~3점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 10점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

[문제 2–2] 예시 답안

- 원점과 두 점 $(0,c_n),(p_n,q_n)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 a_n이라 하고, 이 삼각형과 내접원 내부의 교집합이 이루는 부채꼴의 넓이를 b_n이라 하면 $A_n=2(a_n-b_n)$이다.
- $a_n=\frac{1}{2}c_np_n=\frac{1}{8}$이고, 내접원의 반지름은 0으로 수렴하므로 $b_n\to 0$이다.
- 따라서 $\lim_{n\to\infty}A_n=\frac{1}{4}$이다.

채점 기준

- 원점과 두 점 $(0,c_n),(p_n,q_n)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 계산하면 +5점.
- 삼각형의 넓이와 부채꼴의 넓이를 이용하여 $\lim_{n\to\infty}A_n$을 계산하면 +5점.
- (논리적인) 다른 방식으로 $\lim_{n\to\infty}A_n$을 정확히 계산하면 +10점.

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~3점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 10점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

문제 3

다음 제시문 (가)–(다)를 읽고 문항에 답하시오.

(가) 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 다음을 만족한다.

$$\int_1^{2x-1}\{2f(t)+f(-t)\}dt=-8x^3+20x^2+22x-34$$

(나) 함수 $g(x)$가 구간 $[a,b]$에서 연속일 때, 다음을 만족한다.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x g(t)\,dt=g(x)\ (\text{단, } a\le x\le b)$$

(다) 두 함수 $y=g(u), u=h(x)$가 미분가능할 때, 합성함수 $y=g(h(x))$의 도함수는 아래와 같다.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=g'(h(x))\cdot h'(x)$$

[문제 3-1] 제시문 (가)에 주어진 함수 $2f(x)+f(-x)$를 구하는 과정을 논리적으로 설명하시오. [10점]

[문제 3-2] $x>0$일 때, $x+\frac{2}{x}$가 취할 수 있는 값의 범위와 $f\left(x+\frac{2}{x}\right)$의 최댓값을 구하는 과정을 논리적으로 설명하시오. [20점]

1. 제시문의 분석, 배경 지식, 문제 풀이 과정

[문제 3-1]은 제시문 (나)에서 주어진 적분과 미분의 관계를 잘 이해하고 있는지 묻고 있는 문제이다. 또한, 제시문 (다)에서 설명한 합성함수의 미분에 대해서도 잘 이해하고 있어야한다.

$2f(t)+f(-t)$의 원시함수를 $F(t)$라 하면 다음을 만족한다.

$$F(2x-1)-F(1)=\int_1^{2x-1}\{2f(t)+f(-t)\}dx=-8x^3+20x^2+22x-34$$

합성함수 $g(h(x))$를 미분하면 $g'(h(x))\cdot h'(x)$이므로 함성함수 $F(2x-1)$을 미분하면

$(F(2x-1))'=F'(2x-1)\cdot(2x-1)'=F'(2x-1)\cdot 2=2F'(2x-1)$를 얻는다. 상수 $F(1)$은 미분하면 0이므로 위의 식을 미분하여 $2F'(2x-1)=-24x^2+40x+22$를 얻는다. 즉, $F'(2x-1)=-12x^2+20x+11$이다.

$y=2x-1$이라 하면, $x=\frac{y+1}{2}$이므로

$$F'(y)=F'(2x-1)=-12x^2+20x+11$$
$$=-12\left(\frac{y+1}{2}\right)^2+20\cdot\frac{y+1}{2}+11=-3y^2+4y+18$$

따라서, $2f(x)+f(-x)=F'(x)=-3x^2+4x+18$이다.

[문제 3-2]는 이차함수의 최대-최소문제, 산술기하평균에 관한 절대부등식, 합성함수 등의 이해를 통하여 이들을 통합적으로 적용하여 문제를 해결할 수 있는지 평가하고 있는 문제이다.

$2f(x)+f(-x)=-3x^2+4x+18$에서 x대신에 $-x$를 대입하여

또 하나의 식 $2f(-x)+f(x)=-3x^2-4x+18$을 얻는다.

$$3f(x)=2\{2f(x)+f(-x)\}-\{2f(-x)+f(x)\}$$
$$=2(-3x^2+4x+18)-(-3x^2-4x+18)=-3x^2+12x+18$$

이므로 $f(x)=-x^2+4x+6=-(x-2)^2+10$을 얻는다.

두 양수 a,b에 대하여 $a+b\geq 2\sqrt{ab}$가 항상 성립하므로,

x가 양수이면 $x+\frac{2}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{2}{x}}=2\sqrt{2}$이 성립한다.

$y=x+\frac{2}{x}$라 놓으면 $f\left(x+\frac{2}{x}\right)=f(y)=-(y-2)^2+10$은 위로 볼록한 이차함수의 그래프를 가지고 y가 2에 가까울수록 큰 값을 가진다.

$y\geq 2\sqrt{2}$이므로 $y=2\sqrt{2}$일 때, $-(2\sqrt{2}-2)^2+10=-2+8\sqrt{2}$를 최댓값으로 가진다.

2. 문항별 예시 답안 및 채점 기준

[문제 3-1] 예시 답안

- $2f(t)+f(-t)$의 원시함수를 $F(t)$라 하면 다음을 만족한다.
  $F(2x-1)-F(1)=-8x^3+20x^2+22x-34$
- 양변을 미분하여 $2F'(2x-1)=-24x^2+40x+22$를 얻는다.
- $F'(2x-1)=-3(2x-1)^2+4(2x-1)+18$이므로 $2f(x)+f(-x)=F'(x)=-3x^2+4x+18$이다.

채점 기준

- $2f(t)+f(-t)$의 원시함수$F(t)$를 고려하여 $2F'(2x-1)=-24x^2+40x+22$를 얻으면 +5점.
- 식을 정리하여 $2f(x)+f(-x)=-3x^2+4x+18$을 정확히 얻으면 +5점.
- (논리적인) 다른 방식으로 $2f(x)+f(-x)$을 정확히 계산하면 +10점.

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~3점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 10점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

[문제 3-2] 예시 답안

- $2f(x)+f(-x)=-3x^2+4x+18$에 x대신 $-x$를 대입하여 또 하나의 식 $2f(-x)+f(x)=-3x^2-4x+18$를 얻는다. 두 식을 연립하여 $f(x)=-x^2+4x+6$을 얻는다.
- $x>0$일 때, $x+\frac{2}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{2}{x}}=2\sqrt{2}$이다. $f(x)$는 대칭축이 $x=2$이고 위로 볼록한 이차함수의 그래프를 가지므로 $f\left(x+\frac{2}{x}\right)$는 $x+\frac{2}{x}=2\sqrt{2}$일 때, 최댓값 $-2+8\sqrt{2}$를 가진다.

별해

- $2f(x)+f(-x)=-3x^2+4x+18$에 x대신에 $-x$를 대입하여 또 하나의 식 $2f(-x)+f(x)=-3x^2-4x+18$를 얻는다. 두 식을 연립하여 $f(x)=-x^2+4x+6$을 얻는다.

  $f'(x)=-2x+4$이므로 $\left[f\left(x+\frac{2}{x}\right)\right]'=f'\left(x+\frac{2}{x}\right)\cdot\left(x+\frac{2}{x}\right)'=\left\{-2\left(x+\frac{2}{x}\right)+4\right\}\cdot\left(1-\frac{2}{x^2}\right)$이다.
- 모든 $x>0$에 대하여 $x+\frac{2}{x}\neq 2$이므로 $\left[f\left(x+\frac{2}{x}\right)\right]'=0$을 만족하는 x는 $1-\frac{2}{x^2}=0$의 근이다. $1-\frac{2}{x^2}=0$과 $x>0$으로부터 $x=\sqrt{2}$를 얻고 이 때 $f\left(x+\frac{2}{x}\right)$는 최댓값 $-2+8\sqrt{2}$를 가진다.

채점 기준

- $f(x)=-x^2+4x+6$을 정확히 계산하면 +7점.
- $x>0$일 때, $x+\frac{2}{x}$가 취할 수 있는 값의 범위를 정확히 계산하면 +6점.
- $f\left(x+\frac{2}{x}\right)$는 최댓값 $-2+8\sqrt{2}$을 정확히 계산하면 +7점.

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~3점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 20점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

2015학년도 수시 일반 논술(자연계열/의학부)

문제 1 (자연계열)

공과 주사위를 이용하여 상금이 결정되는 게임이 있다. 바구니 안에 1~6까지 번호가 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 들어 있다. 이 바구니에서 임의로 한 개의 공을 꺼낸 후, 주사위를 던져서 4 이하의 눈이 나오면 꺼낸 공의 번호에 1000원을 곱한 금액을 상금으로 받으며, 주사위를 던져서 5 또는 6의 눈이 나오면 바구니에서 꺼낸 공의 번호에 관계없이 2000원을 상금으로 받는다. 특별히 주사위의 눈이 공의 번호와 일치할 경우, 상금은 두 배가 된다. 이 게임에서 상금의 기댓값을 구하시오.

1. 제시문의 분석, 배경 지식, 문제 풀이 과정

이번 문제는 이산확률변수의 기댓값을 구하는 문제이다. 공과 주사위를 이용하여 상금이 결정되는 게임에서 받게 되는 상금을 확률변수 W라고 놓으면 이 확률변수가 취할 수 있는 값은 두 가지 경우로 나누어서 생각해야 한다. 한 가지는 특별 상금이 아닌 일반 상금을 받는 경우이고, 다른 한 가지는 특별 상금을 받는 경우이다. 일반 상금을 받는 경우 받을 수 있는 상금은 1,000원, 2,000원, …, 6,000원이고, 특별 상금을 받는 경우 상금이 일반 상금의 두 배가 되므로 일반 상금을 제외하고 추가적으로 받게 되는 상금은 1,000원, 2,000원, 3,000원, 4,000원이다.

각각의 상금을 받을 확률을 계산하기 위하여 각각의 상금을 받게 되는 경우를 생각해 보면 다음과 같다. 상금이 1,000원인 경우는, 바구니에서 1번이 적혀 있는 공을 꺼내고 주사위를 던져서 4 이하의 눈이 나오는 경우이고, 그 확률은 공을 꺼내는 사건과 주사위를 던지는 사건이 서로 독립이므로 $\frac{1}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{4}{36}$이다. 마찬가지로 상금이 3,000원,…, 6,000원일 경우도 각각 확률은 4/36으로 같다. 하지만 상금이 2,000원인 경우는, 바구니에서 2번이 적혀 있는 공을 꺼내고 주사위를 던져서 4 이하의 눈이 나오는 경우 또는 꺼낸 공의 번호와 상관없이 주사위를 던져서 5나 6의 눈이 나오는 경우이므로, 해당 확률은 $\frac{4}{36}+\frac{2}{6}=\frac{16}{36}$이다. 따라서, 특별 상금을 제외한 일반 상금의 기댓값(x)을 구하면 다음과 같다.

$$x=\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{6}\left(\frac{4}{6}\times 1{,}000i+\frac{2}{6}\times 2{,}000\right)=\frac{4{,}000}{36}\sum_{i=1}^{6}(i+1)=\frac{4{,}000}{36}\left(\frac{56}{2}-1\right)=\frac{108{,}000}{36}\ (\text{원})$$

특별 상금을 받는 경우에서, 추가 상금이 1,000원인 경우는, 바구니에서 1번이 적혀 있는 공을 꺼내고 주사위를 던져서 1의 눈이 나오는 경우이다. 따라서 해당 확률은 $\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$이 된다. 마찬가지로, 추가 상금이 3,000원, 4,000원인 경우도 각각 확률은 1/36으로 같다. 반면에, 추가 상금이 2,000원인 경우는, 바구니에서 2번이 적혀 있는 공을 꺼내고 주사위를 던져서 2의 눈이 나오는 경우 또는 바구니에서 5 가 적혀 있는 공을 꺼내고 주사위를 던져서 5의 눈이 나오는 경우 또는 바구니에서 6이 적혀 있는 공을 꺼내고 주사위를 던져서 6의 눈이 나오는 경우이므로, 해당 확률은 $\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{1}{36}+\frac{2}{36}=\frac{3}{36}$이다. 따라서, 특별 추가 상금의 기댓값($y$)은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$y=\left(\sum_{i=1}^{4}\frac{1000i}{36}\right)+\frac{4{,}000}{36}=\frac{14{,}000}{36}(\text{원})$$

이 게임에서 받게 되는 상금의 기댓값(z)은 두 기댓값을 합해서 구하면 다음과 같다.

$$z = x + y = \frac{108,000}{36} + \frac{14,000}{36} = \frac{122,000}{36} = \frac{30,500}{9} \text{ (원)}$$

2. 문항별 예시 답안 및 채점 기준

예시 답안

- 바구니에서 i번이 적힌 공을 꺼내고 주사위가 1~4의 눈이 나오면 상금은 $1000 \times i$원이고, 주사위의 눈이 5 또는 6이면 2000원이므로, 특별 상금을 제외한 기대 상금(x)은 다음과 같다.

$$x = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6}\left(\frac{4}{6} \times 1,000i + \frac{2}{6} \times 2,000\right) = \frac{4,000}{36}\sum_{i=1}^{6}(i+1) = \frac{4,000}{36}\left(\frac{56}{2} - 1\right) = \frac{108,000}{36} \text{ (원)}$$

- 특별 상금은 각각 1/36의 확률로 공의 번호가 $i\,(1 \le i \le 4)$번의 경우 $1000 \times i$원이 추가되고, 공의 번호가 5번 또는 6번일 경우 2,000원이 추가로 주어진다. 따라서 특별 상금의 기댓값(y)은 다음과 같다.

$$y = \left(\sum_{i=1}^{4} \frac{1000i}{36}\right) + \frac{4,000}{36} = \frac{14,000}{36} \text{ (원)}$$

- 따라서, 총 상금의 기댓값(z)은,

$$z = x + y = \frac{108,000}{36} + \frac{14,000}{36} = \frac{122,000}{36} = \frac{30,500}{9} \text{ (원)}$$

채점 기준

- 확률 및 기댓값에 대한 개념적 이해가 있다고 판단된다 : +5점
  - 36가지의 사건과 적절한 확률값(1/36)을 연관시킨다 : +3점
  - 관련 상금을 곱하는 시도를 한다 : +2점
- 특별상금을 제외한 기본 상금에 대한 기댓값을 정확히 계산 : +10점
  - 주사위의 눈 1~4에 대하여 각각 1000원씩 곱하여 상금 계산 : +3점
  - 5 또는 6일 때는 2000원으로 상금 계산 : +3점
  - 위의 상금들을 관련확률(1/36)과 곱하여 기댓값을 계산 : +4점
- 특별상금에 대한 기댓값을 정확히 계산 : +5점
  - 특별상금을 기본 상금의 2배로 계산 : +2점
  - 적절한 확률(1/36)을 곱하여 계산 : +3점

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~3점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 20점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

문제 1 (의학부)

당신이 아주 깜깜한 방에 갇혔다고 가정해 보자. 당신의 바로 앞에는 두 개의 단추 A와 B가 있다. 단추 A를 누를 경우 1/3의 확률로 2분 후에 방에서 탈출할 수 있으나, 2/3의 확률로는 탈출할 수 없으며 5분의 시간이 지난 후 다시 두 단추 중 하나를 누를 수 있게 된다. 단추 B를 누를 경우, 방에서 탈출할 수 없으며 3분의 시간이 지난 후 다시 두 단추 중 하나를 누를 수 있다. 이전에 누른 단추를 구별할 수 없고 매번 단추를 임의로 선택하여 누른다고 가정할 때, 방에서 탈출하기까지 걸리는 시간(분)의 기댓값을 구하시오.

1. 문제의 배경 지식

이번 문제는 확률변수가 취하는 값이 유한개는 아니지만 자연수와 같이 일일이 셀 수 있는 이산확률변수의 기댓값(교학사 적분과 통계, pp. 103–135)을 구하는 문제이다. 앞에서 이미 설명한 배경 지식 외에 이 문제를 풀기 위해 알아야 할 개념들에 관한 배경 설명은 다음과 같다.

주사위나 동전을 여러 번 던지는 경우와 같이 어떤 시행을 반복할 때, 매번 일어나는 사건이 서로 독립인 경우 그러한 시행을 독립시행이라고 한다. 매회의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p라 할 때, n회의 독립시행에서 사건 A가 r회 일어날 확률은

$${}_nC_r p^r q^{n-r}$$ (단, $q=1-p,\ r=0,1,2,\ldots,n$) 이다.

자연수 n에 대하여 다항식 $(a+b)^n$을 전개한 식에서 항 $a^{n-r}b^r$ (단, $r=0,1,2,\ldots,n$)은 n개의 일차식 $a+b$ 중에서 r개의 일차식에서는 b항을 선택하고, 나머지 $n-r$개의 일차식에서는 a항을 선택하면 얻을 수 있으므로 그 계수는 ${}_nC_r$과 같다. 따라서 다음의 전개식을 얻을 수 있고, 이 식을 이항정리라고 한다. (교학사 적분과 통계, Ⅱ 순열과 조합, pp. 92)

$$(a+b)^n={}_nC_0a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\cdots+{}_nC_nb^n$$
$$=\sum_{r=0}^{n}{}_nC_ra^{n-r}b^r$$

첫째항이 $a\ (a\neq 0)$이고, 공비가 r인 무한등비수열 $\{ar^{n-1}\}$에서 얻은 무한급수

$$\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$$

를 첫째항이 a이고 공비가 r인 무한등비급수라고 한다. 무한등비급수의 수렴 또는 발산을 알아보자.

(지학사 수학 I, Ⅳ 수열의 극한, pp. 176–177)

❶ $|r|<1$일 때

위의 무한등비급수의 제n항까지의 합 S_n은 다음과 같다.

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

그런데 $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r}\lim_{n\to\infty}(1-r^n) = \frac{a}{1-r}$$

따라서 무한등비급수는 수렴하고, 그 합은 $\frac{a}{1-r}$이다.

❷ $|r|\geq 1$일 때

$\lim_{n\to\infty} ar^{n-1} \neq 0$이므로 위의 무한등비급수는 발산한다.

2. 문제의 분석 및 풀이 과정

이번 문제는 방에서 탈출하기 위해서 두 개의 단추 중 하나를 누르고, 주어진 확률로 탈출할 수도 있고 다시 처음 상황으로 돌아갈 수도 있는 상황에서, 탈출하기까지 걸리는 시간(분)의 기댓값을 구하는 문제이다. 탈출하기까지 걸리는 시간은 A단추를 눌러서 한번에 탈출하는 경우 2분이다. 그러나, A단추를 누르고 한번에 탈출하지 못하게 되면 먼저 5분이 지나고 다시 처음 상황으로 돌아가게 되고, B단추를 누르면 탈출하지 못하게 되고 3분이 지나고 다시 처음 상황으로 돌아가게 된다. 두 번째 시도에서 다시 앞의 경우가 반복되게 되므로, 각각의 시도에서 가능한 경우 탈출 시간을 다음과 같이 고려할 수 있다.

❶ 1번째 시도에서 탈출 : 2분

❷ 2번째 시도에서 탈출 :

- 1번째 시도에서 A단추를 누른 경우 : 5 + 2 = 7분
- 1번째 시도에서 B단추를 누른 경우 : 3 + 2 = 5분

❸ 3번째 시도에서 탈출 :

- 1번째 시도에서 A단추를 누르고, 2번째 시도에서 A단추를 누른 경우 : 5 x 2 + 2 = 12분
- 1번째 시도에서 A단추를 누르고, 2번째 시도에서 B단추를 누른 경우 : 5 + 3 + 2 = 10분
- 1번째 시도에서 B단추를 누르고, 2번째 시도에서 A단추를 누른 경우 : 3 + 5 + 2 = 10분
- 1번째 시도에서 B단추를 누르고, 2번째 시도에서 B단추를 누른 경우 : 3 x 2 + 2 = 8분

위의 경우에서 볼 수 있는 것처럼 $(n+1)$번째 시도에서 탈출하는 경우에 가능한 탈출 시간을 계산하기 위해서는 1번째 시도부터 n번째 시도까지의 A단추와 B단추를 누른 경우를 다 고려해야 한다. 설명의 편의상, A단추를 눌러서 탈출하는 경우를 c, 다시 처음 상황으로 돌아오는 경우를 a라고 두고; B단추를 눌러서 다시 처음 상황으로 돌아오는 경우를 b라고 두자. $(n+1)$번째 시도에서 탈출하는 경우에 가능한 각각의 경우 a, b, c가 몇 번씩 걸릴 지와 그 경우의 탈출시간을 다음과 같이 고려할 수 있다.

1. a : n번, b : 0번, c : 1번 → $(5n+3\cdot 0+2)$분
2. a : $n-1$번, b : 1번, c : 1번 → $(5(n-1)+3\cdot 1+2)$분
3. a : $n-2$번, b : 2번, c : 1번 → $(5(n-2)+3\cdot 2+2)$분

...

k. a : $n-k$번, b : k번, c : 1번 → $(5(n-k)+3\cdot k+2)$분

...

n. a : 0번, b : n번, c : 1번 → $(5\cdot 0+3n+2)$분

각각의 탈출 시도에서 일어날 수 있는 사건인 a, b, c가 일어날 확률은 주어진 문제로부터 각각 $p=P\{a\}=1/3$, $q=P\{b\}=1/2$, $r=P\{c\}=1/6$임을 알 수 있다. $(n+1)$번에 탈출한다고 가정하면, a: k번, b: $n-k$번, c: 1번의 과정을 거쳤다고 볼 수 있다; 단, $k=0,\ldots,n;\ n=0,1,\ldots$. 이에 대한 확률은 $(n+1)$번째 시도에서 사건 c가 일어나고, 1번째 시도부터 n번째 시도까지는 탈출하지 못하므로, 그 중에서 k번의 시도를 선택해서 사건 a가 일어나고, 나머지 시도에서는 사건 b가 일어난 것으로 생각할 수 있다. 각각의 탈출 시도는 서로 독립이므로 독립시행의 확률 구하는 공식을 적용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$P(\mathrm{a}=k,\mathrm{b}=n-k,\mathrm{c}=1|n)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}r,\ k=0,\ldots,n;\ n=0,1,\ldots.$$

이 경우에 대한 탈출시간은 $5k+3(n-k)+2=2k+3n+2$(분)이다. 따라서, 탈출시간의 기댓값 x는 다음과 같은 식으로 계산될 수 있다;

$$x=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(2k+3n+2)\binom{n}{k}p^k q^{n-k}r$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{2r\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}p^k q^{n-k}+3rn\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}+2r\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}\right\}$$

큰 괄호 안의 두번째, 세번째 합은 다음과 같은 이항정리를 적용하여 정리할 수 있다.

$$\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k p^k q^{n-k}=(p+q)^n$$

여기서, ${}_nC_k=\binom{n}{k}$이다. 반면에, 첫번째 합은 위의 이항정리를 변형해서 구해야 한다. 위 식의 양변을 p에 대하여 미분하면 다음과 같은 식이 구해진다.

$$\sum_{k=1}^{n}k\,{}_nC_k p^{k-1}q^{n-k}=n(p+q)^{n-1}$$

따라서, 기댓값 x는 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$x=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{2rn(p+q)^{n-1}+3rn(p+q)^n+2r(p+q)^n\right\}$$

$$=\left\{2r+3r(p+q)\right\}\sum_{n=0}^{\infty}n(p+q)^{n-1}+2r\sum_{n=0}^{\infty}(p+q)^n$$

위 식에서 두 번째 합은 첫째 항이 1이고 공비가 $p+q$인 무한등비급수이다. $p+q=5/6<1$이므로, 이 무한등비급수는 수렴하며 그 값은

$$\sum_{n=0}^{\infty}(p+q)^n=\frac{1}{1-(p+q)}$$

이다. 반면에, 첫 번째 합은 무한등비급수를 변형해서 구해야 한다. 앞에서와 마찬가지로 위 식의 양변을 p에 관하여 미분하면 다음과 같은 식이 구해진다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(p+q)^{n-1} = \frac{1}{\{1-(p+q)\}^2}$$

따라서, 기댓값 x는 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$x = \frac{2r+3r(p+q)}{\{1-(p+q)\}^2} + \frac{2r}{1-(p+q)}$$

$$= \frac{2\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}}{\left\{1-\frac{5}{6}\right\}^2} + \frac{2\times\frac{1}{6}}{1-\frac{5}{6}} = 36\left(\frac{1}{9}+\frac{5}{12}\right)+2=21$$

즉, 문제에서 구하는 방에서 탈출하기까지 걸리는 시간(분)의 기댓값은 21분이다.

3. 예시 답안 및 채점 기준

예시 답안

설명의 편의상, A단추를 눌러서 탈출하는 경우를 c, 다시 처음 상황으로 돌아오는 경우를 a라고 두고; B단추를 눌러서 다시 처음 상황으로 돌아오는 경우를 b라고 두자. 이들에 대한 확률은 각각 $p=P\{a\}=1/3$, $q=P\{b\}=1/2$, $r=P\{c\}=1/6$이다.

- $(n+1)$번에 탈출한다고 가정하면, a: k번, b: $n-k$번, c: 1번의 과정을 거쳤다고 볼 수 있다; 단, $k=0,\cdots,n;\ n=0,1,\cdots$.
  따라서, 이에 대한 확률은,

$$P(\mathrm{a}=k,\mathrm{b}=n-k,\mathrm{c}=1|n)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}r. \qquad (*1)$$

- 이 경우에 대한 탈출시간은 $5k+3(n-k)+2=2k+3n+2$이다.
- 따라서, 탈출시간의 기댓값 x는 다음과 같은 식으로 계산될 수 있다;

$$x=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(2k+3n+2)\binom{n}{k}p^k q^{n-k}r \qquad (*2)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{2r\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}p^k q^{n-k}+3rn\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}+2r\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}\right\}$$

$$=2rp\sum_{n=0}^{\infty}n(p+q)^{n-1}+3r(p+q)\sum_{n=0}^{\infty}n(p+q)^{n-1}+2r\sum_{n=0}^{\infty}(p+q)^n \qquad (*3)$$

$$=\frac{2rp+3r(p+q)}{\{1-(p+q)\}^2}+\frac{2r}{1-(p+q)} \qquad (*4)$$

$$=\frac{2\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}}{\left\{1-\frac{5}{6}\right\}^2}+\frac{2\times\frac{1}{6}}{1-\frac{5}{6}}=36\left(\frac{1}{9}+\frac{5}{12}\right)+2=21$$

- 등식 (*3)을 위한 보조식
  - 이항정리: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}=(p+q)^n$
  - p에 관하여 이항정리의 양변을 미분: $\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}p^{k-1}q^{n-k}=n(p+q)^{n-1}$
- 등식 (*4)를 위한 보조식
  - 무한등비급수: $\sum_{n=0}^{\infty}(p+q)^n=\frac{1}{1-(p+q)}$
  - p에 관하여 위 식의 양변을 미분: $\sum_{n=0}^{\infty}n(p+q)^{n-1}=\frac{1}{\{1-(p+q)\}^2}$

채점 기준

다음과 같이 배점한다(개념이해 : 5점, 계산 : 15점)

A. 확률 및 기댓값에 대한 개념적 이해 : +5점

- 3가지의 사건에 대한 이해를 함 : +2점
- 3가지 각 경우에 대한 관련 확률을 계산(1/6, 1/3, 1/2)함 : +3점

B. 무한등비급수를 이용하여 기댓값 계산 : 15점

- (*1)과 같이 탈출하는 경우에 대한 상황의 확률을 계산 : +5점
- 탈출하는 경우의 탈출 시간을 $5k+3(n-k)+2=2k+3n+2$와 같이 표현 : +5점
- (*2)와 같이 $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}$의 형태로 무한히 반복될 수 있는 상황으로 연결하여 기대값을 계산 : +5점

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~3점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 20점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

문제 2

다음 제시문 (가)–(다)를 읽고 문제에 답하시오.

(가) 다항식 A를 다항식 $B(B\neq 0)$로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R이라 하면

$A=BQ+R$(단, R의 차수는 B의 차수보다 낮다.)의 꼴로 나타낼 수 있다

(나) x에 대한 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$ (단, $g(x)\neq 0$)에 대해 $\frac{f(x)}{g(x)}$의 꼴로 나타내어지는 식을 유리식이라 한다.

특히, $g(x)=1$이면 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 다항식이다. 예를 들어, 아래의 식은 모두 유리식이다.

$$\frac{5x-2}{2x^2-3x+4},\quad \frac{2x^3+3}{-2x^2+5x+3},\quad 2x^3+5x^2-8$$

(다) $C\neq D$일 때, $\frac{1}{CD}=\frac{1}{D-C}\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{D}\right)$이 성립한다.

[문제 2–1 (자연계열 I)]

다항식 $x^{10}+x^9+x^8+\cdots+x^2+x+1$을 $(x+1)^3$으로 나눈 나머지를 $a(x+1)^2+b(x+1)+c$라 할 때,

계수 a,b,c를 각각 구하시오. [10점]

[문제 2–1 (의학부)]

다항식 $x^{2n}+x^{2n-1}+x^{2n-2}+\cdots+x^2+x+1$을 $(x+1)^3$으로 나눈 나머지를 $a(x+1)^2+b(x+1)+c$라 할 때,

계수 a,b,c를각각 n에 관한 식으로 표현하시오. [10점]

[문제 2–2]

$\int\frac{10x+p}{x^2(x+1)^2}dx$가 x에 대한 유리식이 되도록 상수 p를 정하시오. [10점]

1. 제시문의 분석, 배경 지식, 문제 풀이 과정

[문제 2-1 (자연계열)]은 다항식의 사칙연산을 잘 이해하고 있는가 묻고 있는 문제이다. 특히, 다항식의 나눗셈을 몫과 나머지로 표현할 수 있고 이를 미분과 연계하여 통합적으로 문제를 해결할 수 있는지 평가하고 있다.

다항식 $x^{10}+x^9+x^8+\cdots+x^2+x+1$을 $(x+1)^3$으로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면,

$x^{10}+x^9+x^8+\cdots+x^2+x+1=(x+1)^3Q(x)+a(x+1)^2+b(x+1)+c$로 쓸 수 있다.

양변을 미분하면, $10x^9+9x^8+8x^7+\cdots+2x+1=3(x+1)^2Q(x)+(x+1)^3Q'(x)+2a(x+1)+b$이다.

여기서, $Q_1(x)=3Q(x)+(x+1)Q'(x)$로 놓으면

$10x^9+9x^8+8x^7+\cdots+2x+1=(x+1)^2Q_1(x)+2a(x+1)+b$를 얻는다.

다시 미분하면, $10\cdot9x^8+9\cdot8x^7+8\cdot7x^6+\cdots+4\cdot3x^2+3\cdot2x+2=2(x+1)Q_1(x)+(x+1)^2Q_1'(x)+2a$ 이다.

위에서 얻은 아래의 세 식에 $x=-1$을 대입하자.

$x^{10}+x^9+x^8+\cdots+x^2+x+1=(x+1)^3Q(x)+a(x+1)^2+b(x+1)+c$

$10x^9+9x^8+8x^7+\cdots+2x+1=3(x+1)^2Q(x)+(x+1)^3Q'(x)+2a(x+1)+b$

$10\cdot9x^8+9\cdot8x^7+8\cdot7x^6+\cdots+4\cdot3x^2+3\cdot2x+2=2(x+1)Q_1(x)+(x+1)^2Q_1'(x)+2a$

그러면,

$$
\begin{aligned}
c&=(-1)^{10}+(-1)^9+(-1)^8+\cdots+(-1)^2+(-1)+1=1\\
b&=10\cdot(-1)^9+9\cdot(-1)^8+8\cdot(-1)^7+\cdots+2\cdot(-1)+1\\
&=(-10+9)+(-8+7)+\cdots+(-2+1)=-5\\
2a&=10\cdot9\cdot(-1)^8+9\cdot8\cdot(-1)^7+8\cdot7\cdot(-1)^6+\cdots+4\cdot3\cdot(-1)^2+3\cdot2\cdot(-1)+2\\
&=(10\cdot9-9\cdot8)+(8\cdot7-7\cdot6)+(6\cdot5-5\cdot4)+(4\cdot3-3\cdot2)+2\\
&=9\cdot(10-8)+7\cdot(8-6)+5\cdot(6-4)+3\cdot(4-2)+2\\
&=2\cdot(9+7+5+3+1)=2\cdot25=50
\end{aligned}
$$

을 얻는다. 이로부터 $a=25,\ b=-5,\ c=1$을 구할 수 있다.

[문제 2-1 (의학부)]는 [문제 2-1 (자연계열)]과 마찬가지로 다항식의 사칙연산을 잘 이해하고 있는가 묻고 있는 문제이다. 특히, 다항식의 나눗셈을 몫과 나머지로 표현할 수 있고 이를 미분과 연계하여 통합적으로 문제를 해결할 수 있는지 평가하고 있다. 난이도 조절을 위하여 다항식의 차수를 일반화하였다.

다항식 $x^{2n}+x^{2n-1}+x^{2n-2}+\cdots+x^2+x+1$을 $(x+1)^3$으로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면,

$\sum_{k=0}^{2n}x^k=(x+1)^3Q(x)+a(x+1)^2+b(x+1)+c$로 쓸 수 있다.

양변을 미분하면, $\sum_{k=1}^{2n}kx^{k-1}=3(x+1)^2Q(x)+(x+1)^3Q'(x)+2a(x+1)+b$ 이다.

여기서, $Q_1(x)=3Q(x)+(x+1)Q'(x)$로 놓으면 $\sum_{k=1}^{2n}kx^{k-1}=(x+1)^2Q_1(x)+2a(x+1)+b$를 얻는다.

다시 미분하면, $\sum_{k=2}^{2n} k(k-1)x^{k-2} = 2(x+1)Q_1(x) + (x+1)^2 Q_1'(x) + 2a$ 이다.

위에서 얻은 아래의 세 식에 $x=-1$을 대입하자.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2n} x^k$$

$$g(x) = \sum_{k=1}^{2n} kx^{k-1} = 10x^9 + 9x^8 + 8x^7 + \cdots + 2x + 1$$

$$h(x) = \sum_{k=2}^{2n} k(k-1)x^{k-2} = 10\cdot 9x^8 + 9\cdot 8x^7 + 8\cdot 7x^6 + \cdots + 4\cdot 3x^2 + 3\cdot 2x + 2$$

그러면,

$$c = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k = (1-1) + (1-1) + \cdots + (1-1) + 1 = 1$$

$$b = \sum_{k=1}^{2n} k(-1)^{k-1} = \sum_{\substack{1\le k\le 2n \\ k:\text{홀수}}} k(-1)^{k-1} + \sum_{\substack{1\le k\le 2n \\ k:\text{짝수}}} k(-1)^{k-1} = \sum_{j=1}^{n} (2j-1)(-1)^{2j-2} + \sum_{j=1}^{n} 2j(-1)^{2j-1}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (2j-1) - \sum_{j=1}^{n} 2j = \sum_{j=1}^{n} (-1) = -n$$

$$2a = \sum_{k=2}^{2n} k(k-1)(-1)^{k-2} = \sum_{\substack{1\le k\le 2n \\ k:\text{홀수}}} k(k-1)(-1)^{k-2} + \sum_{\substack{1\le k\le 2n \\ k:\text{짝수}}} k(k-1)(-1)^{k-2}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} 2j(2j-1)(-1)^{2j-2} + \sum_{j=1}^{n} (2j-1)(2j-2)(-1)^{2j-3} = \sum_{j=1}^{n} 2j(2j-1) - \sum_{j=1}^{n} (2j-1)(2j-2)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} [2j(2j-1) - (2j-1)(2j-2)] = \sum_{j=1}^{n} [2j - (2j-2)](2j-1) = \sum_{j=1}^{n} 2(2j-1)$$

$$= 4\sum_{j=1}^{n} j - \sum_{j=1}^{n} 2 = 4\cdot \frac{n(n+1)}{2} - 2n = 2n^2$$

따라서 $a = n^2, b = -n, c = 1$이다.

[문제 2-2]는 분수의 곱셈을 분해하는 부분분수법과 적분을 연계하여 문제를 출제하였다. 연산능력과 통합적 사고 능력이 있는지 평가하고 있는 문제이다.

$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$을 이용하여 $\frac{1}{x^2(x+1)^2}$을 다음과 같이 전개할 수 있다.

$$\frac{1}{x^2(x+1)^2} = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)^2 = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{x(x+1)}$$

$$= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} - 2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2}{x+1}$$

따라서,

$$\begin{aligned}\frac{10x+p}{x^2(x+1)^2} &= (10x+p)\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\right)+(10x+p)\left(\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{2}{x+1}\right)\\ &= (10x+p)\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\right)+(10(x+1)+(p-10))\left(\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{2}{x+1}\right)\\ &= \frac{10x+p}{x^2}-\frac{20x+2p}{x}+\frac{10(x+1)+(p-10)}{(x+1)^2}+\frac{20(x+1)+2(p-10)}{x+1}\\ &= \frac{10}{x}+\frac{p}{x^2}-20-\frac{2p}{x}+\frac{10}{x+1}+\frac{p-10}{(x+1)^2}+20+\frac{2p-20}{x+1}\\ &= \frac{p}{x^2}+\frac{p-10}{(x+1)^2}+\frac{10-2p}{x}+\frac{2p-10}{x+1}\end{aligned}$$

즉, $\frac{10x+p}{x^2(x+1)^2}=\frac{p}{x^2}+\frac{p-10}{(x+1)^2}+\frac{10-2p}{x}+\frac{2p-10}{x+1}$이다. 양변을 적분하면,

$$\int\frac{10x+p}{x^2(x+1)^2}dx=-\frac{p}{x}-\frac{p-10}{x+1}+(10-2p)\ln x+(2p-10)\ln(x+1)+C$$

이므로 $\int\frac{10x+p}{x^2(x+1)^2}dx$가 x에 대한 유리식으로 주어지려면, $10-2p=2p-10=0$이어야 한다. 즉, $p=5$이다.

2. 문항별 예시 답안 및 채점 기준

[문제 2-1 (자연계열)] 예시 답안

- $f(x)=(x+1)^3Q(x)+a(x+1)^2+b(x+1)+c$라 하고 $g(x)=f'(x), h(x)=g'(x)$라 하자.
- $x=-1$을 대입하여 $f(-1)=c,\ g(-1)=b,\ h(-1)=2a$를 얻는다.
- 한편,

  $f(x)=x^{10}+x^9+x^8+\cdots+x^2+x^1+1$
  $g(x)=10x^9+9x^8+8x^7+\cdots+2x+1$
  $h(x)=10\cdot9x^8+9\cdot8x^7+8\cdot7x^6+\cdots+4\cdot3x^2+3\cdot2x+2$

- $c=f(-1)=(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+1=1$
  $b=g(-1)=(-10+9)+(-8+7)+(-6+5)+(-4+3)+(-2+1)=-5$
  $2a=h(-1)=(10\cdot9-9\cdot8)+(8\cdot7-7\cdot6)+(6\cdot5-5\cdot4)+(4\cdot3-3\cdot2)+2$
  $=18+14+10+6+2=50$

- 따라서 $a=25,\ b=-5,\ c=1$이다.

[별해]

다음의 조립 제법을 이용하여 $a=25,\ b=-5,\ c=1$을 얻는다.

−1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
		−1	0	−1	0	−1	0	−1	0	−1	0
−1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
		−1	1	−2	2	−3	3	−4	4	−5	
−1	1	−1	2	−2	3	−3	4	−4	5	−5	
		−1	2	−4	6	−9	12	−16	20		
	1	−2	4	−6	9	−12	16	−20	25		

채점 기준

- c를 계산하면 +2점.
- b를 계산하면 +3점
- a를 계산하면 +5점

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~3점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 10점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

[문제 2-1 (의학부)] 예시 답안

- $f(x)=(x+1)^3Q(x)+a(x+1)^2+b(x+1)+c$라 하고 $g(x)=f'(x), h(x)=g'(x)$라 하자.
- $x=-1$을 대입하여 $f(-1)=c,\ g(-1)=b,\ h(-1)=2a$를 얻는다.
- 한편,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{2n}x^k$$

$$g(x)=\sum_{k=1}^{2n}kx^{k-1}=10x^9+9x^8+8x^7+\cdots+2x+1$$

$$h(x)=\sum_{k=2}^{2n}k(k-1)x^{k-2}=10\cdot9x^8+9\cdot8x^7+8\cdot7x^6+\cdots+4\cdot3x^2+3\cdot2x+2$$

- $$c=f(-1)=(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+1=1$$

$$b=g(-1)=\sum_{k=1}^{2n}k(-1)^k=\sum_{j=1}^{n}(2j-1)-\sum_{j=1}^{n}2j=\sum_{j=1}^{n}(-1)=-n$$

$$2a=h(-1)=\sum_{k=3}^{2n}k(k-1)(-1)^{k-2}=\sum_{j=1}^{n}2j(2j-1)-\sum_{j=1}^{n}(2j-1)(2j-2)$$

$$=\sum_{j=1}^{n}[2j(2j-1)-(2j-1)(2j-2)]=2\sum_{j=1}^{n}(2j-1)=2\left(2\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n\right)=2n^2$$

- 따라서 $a=n^2,\ b=-n,\ c=1$이다

채점 기준

- c를 계산하면 +2점.
- b를 계산하면 +3점
- a를 계산하면 +5점

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~3점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 10점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

[문제 2-2] 예시 답안

- $\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$
- $\frac{1}{x^2(x+1)^2}=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)^2=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{2}{x(x+1)}=\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{2}{x+1}$
- $\frac{10x+p}{x^2(x+1)^2}=(10x+p)\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\right)+(10(x+1)+(p-10))\left(\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{2}{x+1}\right)$
  $=\frac{p}{x^2}+\frac{10-2p}{x}+\frac{p-10}{(x+1)^2}+\frac{2p-10}{x+1}$
- 따라서 $\int\frac{10x+p}{x^2(x+1)^2}dx$가 x에 대한 유리식으로 주어지려면 $10-2p=2p-10=0$이어야 한다. 즉, $p=5$이다.

채점 기준

- $\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$를 계산하면 +2점.
- $\frac{1}{x^2(x+1)^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{2}{x+1}$를 계산하면 +3점.
- $\frac{10x+p}{x^2(x+1)^2}=\frac{p}{x^2}+\frac{10-2p}{x}+\frac{p-10}{(x+1)^2}+\frac{2p-10}{x+1}$를 계산하면 +3점.
- $p=5$를 계산하면 +2점.

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~3점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 10점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

문제 3

다음 제시문을 읽고 문제에 답하시오.

아래 왼쪽 그림에서 원을 포함하는 평면 m과 이 평면의 x축을 공유하는 평면 n이 있고, 두 평면이 이루는 각이 α이다. 평면 m위의 원을 평면 n위에 정사영하면 타원이 되고, 이 타원의 넓이는 원의 넓이에 $\cos\alpha$를 곱한 것과 같다.

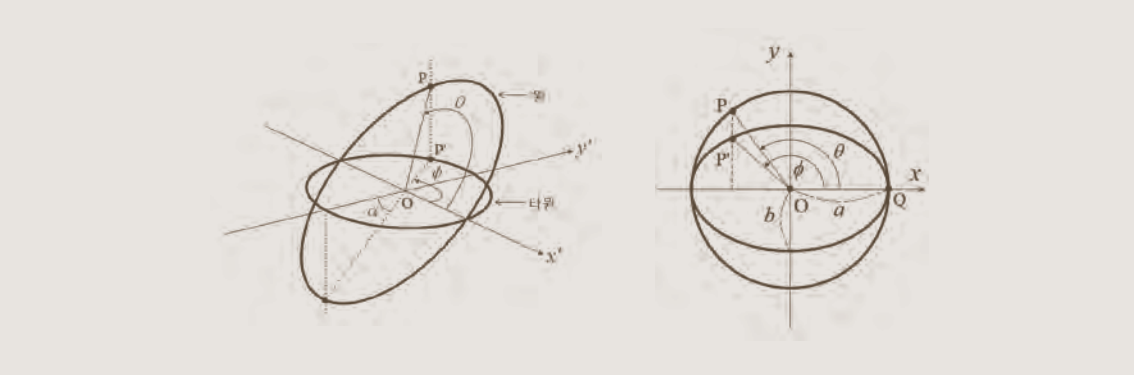
평면 m위에 반지름이 α이며, 중심이 원점인 원이 있을 때, 이 원 위의 점 P의 좌표 (x, y)는 다음과 같다.

$$x = a\cos\theta,\ y = a\sin\theta,\ 0 \le \theta < 2\pi$$

여기서 θ는 원점과 점 P를 연결한 선이 x축과 이루는 양의 각도이다. 이 원을 평면 n위에 정사영하면 장축의 길이가 $2a$이고, 단축의 길이가 $2b$인 타원이 된다. 이때 $\cos\alpha = b/a$이다. 원 위의 점 P는 타원 위의 점 P'로 정사영되고, 타원을 포함하는 평면 n의 좌표계에서 P'의 좌표 (x', y')는 다음과 같다.

$$x' = a\cos\theta,\ y' = b\sin\theta,\ 0 \le \theta < 2\pi$$

평면 m위의 좌표계와 평면 n위의 좌표계를 일치시켜 타원과 원의 관계를 나타내면 아래 오른쪽 그림과 같다.



〈추가 지문 – 의학부 문제에만 해당〉

함수 $f : X \to Y$, $y = f(x)$가 일대일 대응일 때, Y의 각 원소 y에 대하여 $y = f(x)$가 되는 X의 원소 x가 하나씩 존재한다. 그러므로 Y의 각 원소 y에 대하여 이러한 x를 대응시키면 Y에서 X로의 새로운 함수가 얻어진다. 이때 이 새로운 함수를 f의 역함수라 하고 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$f^{-1} : Y \to X,\quad x = f^{-1}(y)$$

[문제 3-1]

제시문에서 ϕ 는 선분 OP'이 x축과 이루는 양의 각도이다.

제시문에 근거하여 P'의 좌표 $(x', y') = (a\cos\theta, b\sin\theta)$를 $\tan\phi$로 나타내시오. 단, $0 \le \phi < \pi/2$이다. [10점]

[문제 3-2 (자연계열)]

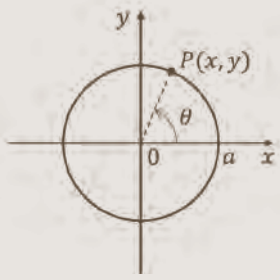
제시문에 주어진 타원의 장축의 길이가 $2\sqrt{3}$, 단축의 길이가 2, $\phi = \pi/4$일 때, 제시문에 근거하여 부채꼴 OQP'의 면적을 구하시오. [20점]

[문제 3-2 (의학부)]

제시문에 주어진 타원에서 임의의 ϕ 에 대해 부채꼴 OQP'의 면적을 위 제시문에 근거하여 구하시오. 단, $0 \le \phi < \pi/2$ 이다. [20점]

1. 제시문의 분석, 배경 지식, 문제 풀이 과정

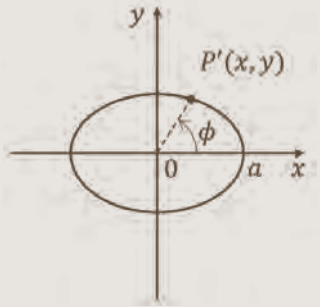
좌표평면 위에서 중심이 원점이고, 반지름의 길이가 α인 원의 방정식은 $x^2 + y^2 = a^2$이다.



원점과 점 P를 연결한 선이 x축과 이루는 각을 θ라고 할 때, 이를 매개변수로 하여 원 위의 점 P의 좌표 (x, y)를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x = a\cos\theta,\ y = a\sin\theta,\ 0 \le \theta < 2\pi$$

장축의 길이가 $2a$, 단축의 길이가 $2b$이고, 장축의 중간 지점과 단축의 중간 지점이 원점인 타원의 방정식은 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$이다.

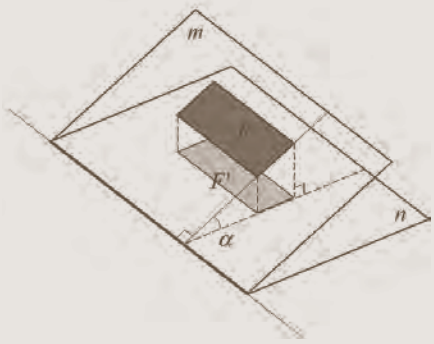


타원 위의 점 P'의 좌표 (x',y')는 어떤 각 θ를 매개변수로 하여 다음과 나타낼 수 있다.

$$x'=a\cos\theta,\ y'=b\sin\theta,\ 0\le\theta<2\pi$$

여기서 θ는 원점과 P'를 연결한 선이 x축과 이루는 각 ϕ와 같지 않다. θ와 ϕ 사이의 관계 그리고 원과 타원 사이의 관계는 다음에 설명하는 정사영의 원리를 이용하여 구할 수 있다.

일반적으로 도형 F에 속하는 각 점의 평면 n위로의 정사영 전체로 이루어진 도형 F'을 도형 F의 평면 n으로의 정사영이라 한다.



그림에서 직사각형 F를 포함하는 평면 m과 직사각형 F'를 포함하는 평면 n이 이루는 예각의 크기를 α라고 하자. F'는 F의 정사영이고, 두 도형의 면적 크기는 다음과 같은 관계가 있다.

$$\text{F'의 면적} = \cos\alpha \times \text{F의 면적}$$

평면 m위에 있고, 평면 m과 n의 교선과 수직한 선분, 예를 들면 직사각형 F의 짧은 변 ℓ을 평면 n으로 정사영하면 선분 ℓ'가 된다고 할 때, 두 선분의 길이는 다음과 같은 관계가 있다.

$$\ell'\text{의 길이} = \cos\alpha \times \ell\text{의 길이}$$

평면 m위에 있는 선분 중 두 평면의 교선과 평행한 것을 평면 n으로 정사영하면 길이가 변하지 않는다.

문제에서 평면 m위에 두 평면 사이의 교선을 x축, 이에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표계가 있고, 원점을 중심으로 하고, 반지름이 α인 원이 있다. 이 원을 평면 n위로 정사영하면 앞서 설명한 선분의 정사영 정리에 따라 장축의 길이가 $2a$이고, 단축의 길이가 $2a\cos\alpha = 2b$인 타원이 된다. 이 타원의 면적은 도형의 정사영 정리에 따라 원의 면적에 $\cos\alpha$를 곱한 것과 같다. 원의 일부를 정사영하여도 이 면적의 비는 같다.

문제에서 원 위의 점 $\mathrm{P}(x,y)$와 타원 위의 점 $\mathrm{P'}(x',y')$사이에는 다음과 같은 관계가 있다.

$$x' = x \text{ 그리고 } y' = y\cos\alpha$$

또한 $\tan\theta = y/x$이고, $\tan\phi = y'/x'$일 때 위의 관계를 이용하면, 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\tan\phi = \frac{y'}{x'} = \frac{y\cos\alpha}{x} = \cos\alpha\tan\theta = \frac{b}{a}\tan\theta$$

2. 문항별 예시 답안 및 채점 기준

[문제 3-1] 예시 답안

- $\tan\phi = \dfrac{y'}{x'} = \dfrac{b\sin\theta}{a\cos\theta} = \dfrac{b}{a}\tan\theta$ (1)
- $\tan\theta = \dfrac{a}{b}\tan\phi$
- $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$
- $\cos\theta = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{a}{b}\right)^2\tan^2\phi}}$ (2)
- $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
- $\sin\theta = \pm\sqrt{\dfrac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}} = \pm\dfrac{\dfrac{a}{b}\tan\phi}{\sqrt{1+\left(\dfrac{a}{b}\right)^2\tan^2\phi}}$ (3)
- $0 \le \theta < \pi/2$일 때, $\mathrm{P'} = (a\cos\theta, b\sin\theta) = \left(\dfrac{a}{\sqrt{1+\left(\dfrac{a}{b}\right)^2\tan^2\phi}}, \dfrac{a\tan\phi}{\sqrt{1+\left(\dfrac{a}{b}\right)^2\tan^2\phi}}\right)$ (4)

[문제 3-1] 별해

- $0 \le x < \pi/2$에 대해 $y = \tan x$의 역함수 $x = g(y)$ 또는 $x = \tan^{-1} y$를 정의하자.

- 식 (1)로부터,

$$\theta = g\left(\frac{a}{b}\tan\phi\right) \text{ 또는 } \theta = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\tan\phi\right) \quad (5)$$

- $$P' = (a\cos\theta, b\sin\theta) = \left(a\cos\left(g\left(\frac{a}{b}\tan\phi\right)\right),\ b\sin\left(g\left(\frac{a}{b}\tan\phi\right)\right)\right)$$

$$= \left(a\cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\tan\phi\right)\right),\ b\sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\tan\phi\right)\right)\right) \quad (6)$$

채점 기준

- 식 (1)을 제시하면 +2점.
- 식 (2)를 제시하면 +3점.
- 식 (3)을 제시하면 +3점.
- 식 (4)를 제시하면 +2점.

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~3점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 10점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

별해 채점 기준

- 식 (1)을 제시하면 +2점.
- 식 (5)를 제시하면 +4점.
- 식 (6)을 제시하면 +4점.

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~3점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 10점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

[문제 3-2 (자연계열)] 예시 답안

- $\phi = \pi/4$일 때, 원에서의 각도 θ를 구하면 다음과 같다.

$$\tan\phi = \frac{b\sin\theta}{a\cos\theta} = \frac{b}{a}\tan\theta,\ \tan(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{3}}\tan\theta,\ \theta = \pi/3 \quad (1)$$

- 반지름이 α인 원에서, 중심각이 θ인 부채꼴의 넓이는 다음과 같다.

$$S = a^2\pi\frac{\theta}{2\pi} \quad (2)$$

- 이 부채꼴을 타원의 평면 위로 정사영하면, 정사영된 부채꼴의 넓이는 제시문에 근거하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$S' = S\cos\alpha = S\frac{b}{a} = a^2\pi\frac{\theta}{2\pi}\frac{b}{a} = \frac{ab}{2}\theta \quad (3)$$

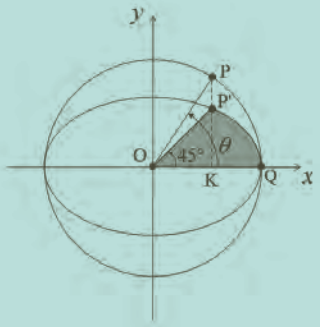
- $a = \sqrt{3},\ b = 1,\ \theta = \pi/3$을 입력하면 다음과 같다.

- $$S' = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}\pi}{6} \quad (4)$$

[문제 3-2 (자연계열)] 별해

- 아래 그림에서 P'는 직선의 식 $(y = x)$과 타원의 식 $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right)$의 교점이다.

$$\mathrm{P}' = (x', y') = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad (5)$$



- 삼각형 KOP'의 넓이는 다음과 같다.

$$\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{8}$$

- 부채꼴 QKP'의 넓이는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\int_{\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}}\sqrt{1 - \frac{1}{3}x^2}\,dx \quad (6)$$

- 식 (6)에서 $x/\sqrt{3} = \cos t$로 치환하면 다음과 같이 적분식을 정리할 수 있다.

$$\int_{\pi/3}^{0} -\sqrt{3}\sin^2 t\,dt = \frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^{\pi/3} 1 - \cos 2t\,dt = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\pi/3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}\pi - \frac{3}{8} \quad (7)$$

- 부채꼴 QOP'의 넓이는 KOP'의 넓이와 QKP'의 넓이를 더한 것과 같다.

$$\frac{3}{8} + \frac{\sqrt{3}}{6}\pi - \frac{3}{8} = \frac{\sqrt{3}}{6}\pi \quad (8)$$

채점 기준

- 식 (1)을 제시하면 +5점.
- 식 (2)를 제시하면 +5점.
- 식 (3)을 제시하면 +5점
- 식 (2)를 제시하면 +5점

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~3점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 20점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

별해 채점 기준

- 식 (5)를 제시하면 +5점.
- 식 (6)을 제시하면 +5점.
- 식 (7)을 제시하면 +5점
- 식 (8)을 제시하면 +5점

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~3점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 20점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

[문제 3-2 (의학부)] 예시 답안

- 제시문 (가)에 근거하여 다음 식을 유도할 수 있다.

$$\tan\phi=\frac{b\sin\theta}{a\cos\theta}=\frac{b}{a}\tan\theta,\ \tan\theta=\frac{a}{b}\tan\phi \quad (1)$$

- 제시문 (나)에 근거하여, $0\le x<\pi/2$에서 $y=\tan x$의 역함수 $x=g(y)$ 또는 $x=\tan^{-1}y$를 정의하면, 위의 (1)로부터 임의의 ϕ, $0\le\phi<\pi/2$에 대해 원에서의 각도 θ를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\theta=g\left(\frac{a}{b}\tan\phi\right) \text{ 또는 } \theta=\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\tan\phi\right) \quad (2)$$

- 반지름이 α인 원에서, 중심각이 θ인 부채꼴의 넓이는 다음과 같다.

$$S=\frac{1}{2}a^2\theta \quad (3)$$

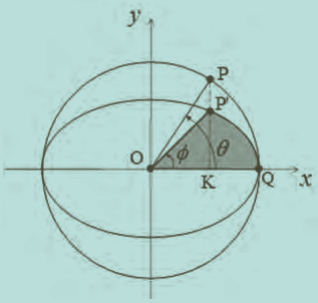
- 이 부채꼴을 타원의 평면 위로 정사영하면, 정사영된 부채꼴의 넓이는 제시문 (가)에 근거하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$S'=S\cos\alpha=S\frac{b}{a}=\frac{b}{a}\frac{1}{2}a^2\theta=\frac{ab}{2}\theta=\frac{ab}{2}\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\tan\varphi\right) \quad (4)$$

[문제 3-2 (의학부)] 별해

- 아래 그림에서 P'는 직선의 식 $(y = x\tan\phi)$과 타원의 식 $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right)$의 교점이다. P의 x좌표는 다음과 같다.

$$\mathrm{K}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{\tan\phi}{b^2}}} \quad (5)$$



- 삼각형 KOP'의 넓이는 $\frac{\mathrm{K}^2\tan\phi}{2}$ 이다.
- 부채꼴 QKP'의 넓이는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\int_{\mathrm{K}}^{Q} b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx \quad (6)$$

- 여기서 $x/a=\cos t$로 치환하고, $0\le t<\pi/2$에 대해 $y=\cos x$의 역함수 $x=g(y)$ 또는 $x=\cos^{-1}y$를 정의하면, $t=g(x/a)$이다.
- $\cos^{-1}(\mathrm{K}/a)=\mathrm{M}$이라 하면, 식 (6)은 다음과 같다.
- $$\int_{\mathrm{K}}^{a} b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx=\int_{\mathrm{M}}^{0}-ab\sin^2 t\,dt=\frac{ab}{2}\int_{0}^{\mathrm{M}}1-\cos 2t\,dt=\frac{ab}{2}\left(\mathrm{M}-\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\mathrm{M}}\right)$$

$$=\frac{ab}{2}\mathrm{M}-\frac{ab}{4}\sin 2\mathrm{M} \quad (7)$$

- 부채꼴 QOP'의 넓이는 QKP'의 넓이와 KOP'의 넓이를 더한 것과 같다.

$$\frac{ab}{2}\mathrm{M}-\frac{ab}{4}\sin 2\mathrm{M}+\frac{\mathrm{K}^2}{2} \quad (8)$$

채점 기준

- 식 (1)을 제시하면 +5.
- 식 (2)를 제시하면 +5.
- 식 (3)을 제시하면 +5.
- 식 (4)를 제시하면 +5.

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~3점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 20점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

별해 채점 기준

- 식 (5)를 제시하면 +5점.
- 식 (6)을 제시하면 +5점.
- 식 (7)을 제시하면 +5점
- 식 (8)을 제시하면 +5점

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~3점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 20점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

2015학년도 수시 일반 논술(자연계열II)

문제 1

50 m 전방에 한 변의 길이가 8 m인 정사각형의 과녁이 있고, 정사각형의 중심을 기준으로 각각 반지름이 1 m, 2 m, 3 m인 원판 A, B, C가 있다. 한 개의 화살을 쏘아 원판 A에 맞힐 경우 10만 원의 상금을, 원판 A를 제외한 원판 B에 맞힐 경우 5만 원의 상금을, 원판 B를 제외한 원판 C에 맞힐 경우 3만 원의 상금을 받는다고 하자. 원판 C를 제외한 과녁에 맞힐 경우에는 상금이 없다. 이 게임의 참가비가 x만 원일 때, 상금에서 참가비를 뺀 이익의 기댓값이 0 이상이기 위한 x의 최댓값을 구하시오. 단, 화살은 언제나 과녁 안에 맞으며, 과녁 안의 모든 부분에 같은 확률로 맞는다.

1. 제시문의 분석, 배경 지식, 문제 풀이 과정

한 개의 화살을 쏘아 과녁의 특정 위치에 맞힐 경우 정해진 상금을 받는 게임에서 상금에서 참가비를 뺀 이익의 기댓값이 0 이상이 되기 위한 참가비의 최댓값을 구하는 문제이다.

먼저 상금의 기댓값을 구하기 위해, 이 게임에 참가했을 때 받을 수 있는 상금을 확률변수 W라고 하자. 이 확률변수가 취할 수 있는 값은 10만원, 5만원, 3만원, 0원이다. 확률변수 W가 이 값을 가지게 되는 경우는 각각 다음과 같다. 한 개의 화살을 쏘았을 때 원판 A에 맞히는 사건, 원판 A를 제외한 원판 B에 맞히는 사건, 원판 B를 제외한 원판 C에 맞히는 사건, 원판 C를 제외한 과녁에 맞히는 사건이다. 각각의 사건이 발생할 확률은 해당 과녁의 (전체 정사각형 과녁의 넓이에 대한) 상대적 넓이로 계산할 수 있다. 즉, 모든 확률의 분모는 전체 정사각형 과녁의 넓이가 되고, 한 변의 길이가 8 m인 정사각형의 과녁이므로 그 넓이는 64 m^2이다. 또한, 각각의 확률의 분자는 해당 과녁의 넓이가 되고, 원판 A, B, C는 정사각형의 중심을 기준으로 각각 반지름이 1 m, 2 m, 3 m인 원이므로 해당 과녁의 넓이는 각각 $\pi\cdot 1^2$, $\pi\cdot(2^2-1^2)$, $\pi\cdot(3^2-2^2)$, $64-\pi\cdot 3^2$ m^2이다. 따라서, 확률변수 W가 10만원, 5만원, 3만원, 0원일 확률은 각각 다음과 같다.

$$\frac{\pi}{64},\ \frac{3\pi}{64},\ \frac{5\pi}{64},\ \frac{64-9\pi}{64}$$

그러므로, 이 게임의 기대 상금은

$$10\times\frac{\pi}{64}+5\times\frac{3\pi}{64}+3\times\frac{5\pi}{64}+0\times\frac{64-9\pi}{64}=\frac{5}{8}\pi$$

이다. 이 게임의 참가비가 x만 원이므로, 상금에서 참가비를 뺀 이익의 기댓값은 $5\pi/8-x$ 이고, 이 값이 0이상이기 위한 x의 최댓값은 $5\pi/8$(만원)이다. 참고: $5\pi/8$(만원) = 약 19,634원.

1. 문항별 예시 답안 및 채점 기준

예시 답안

- 기대할 수 있는 상금은 세가지 종류(10만원, 5만원, 3만원)가 있고, 이들에 대한 확률은 각각 해당 과녁의(전체 정사각형 과녁의 넓이에 대한) 상대적 넓이로 계산할 수 있다. 따라서, 기대 상금은

$$10\times\frac{\pi}{64}+5\times\frac{\pi(4-1)}{64}+3\times\frac{\pi(9-4)}{64}=\frac{40}{64}\pi=\frac{5}{8}\pi$$

- 따라서, 상금에서 참가비를 뺀 이익의 기댓값은, $5\pi/8-x$ 이므로 기댓값이 0 이상이기 위한 x의 최댓값은 $5\pi/8$(만원)이다.
  참고: $5\pi/8$(만원) = 약 19,634원.
- 다음과 같이 기대이익을 한꺼번에 계산할 수도 있다.

$$(10-x)\times\frac{\pi}{64}+(5-x)\times\frac{\pi(4-1)}{64}+(3-x)\times\frac{\pi(9-4)}{64}+(0-x)\times\frac{64-9\pi}{64}$$

$$=10\times\frac{\pi}{64}+5\times\frac{\pi(4-1)}{64}+3\times\frac{\pi(9-4)}{64}-x=\frac{5}{8}\pi-x \qquad \therefore \frac{5}{8}\pi\geq x$$

채점 기준

- 확률 및 기댓값에 대한 개념적 이해 : +5점
  - 3가지 과녁의 확률값 계산을 시도함 : +3점
  - 관련 확률과 상금을 곱하는 시도를 함 : +2점
- 상대적 넓이와 확률과의 관련성 : 10점
  - 각 과녁의 넓이를 정사각형 넓이로 나눔 : +5점
  - 한 원판에 포함되어 있는 다른 원판의 넓이를 제외함 : +5점
- 상금에서 참가비를 뺀 이익이 0이상이어야 함을 고려 : +5점

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~3점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 20점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

문제 2

다음 제시문 (가)–(다)를 읽고 문제에 답하시오.

(가) $x \to \infty$일 때, $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$은 일정한 값에 수렴함이 알려져 있으며, 그 극한값을 e로 나타낸다.

즉, $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$이다.

(나) 수렴하는 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$과 연속함수 $f(x)$에 대하여 다음의 등식이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \quad (\text{단, } b_n \neq 0, \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0)$$

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)$$

(다) 좌표평면 위의 한 점 (x_0, y_0)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는 다음과 같다.

$$d = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

[문제 2-1] 다음 수열의 n번째 항을 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+100a_n}{n+a_n}\right)^n$을 구하시오. [10점]

0.1, 0.101, 0.10101, 0.1010101, ……

[문제 2-2] [문제 2-1]에서 정의된 수열 $\{a_n\}$의 첫째 항부터 n번째 항까지의 합을 S_n이라 하자.

점 $(S_n, S_n^2-6S_n+11)$과 직선 $x-y-10=0$ 사이의 거리가 최소가 되는 자연수 n을 구하시오. [10점]

1. 제시문의 분석, 배경 지식, 문제 풀이 과정

[문제 2-1]은 등비수열의 일반항을 구할 수 있고 극한을 이해하고 있는지 묻는 문제이다. 문제해결을 위하여 효율적인 연산능력이 요구된다.

$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$이라 하면 α는 순환소수 0.101010101…… 이다. 즉, $\alpha = \frac{10}{99}$이다.

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+100a_n}{n+a_n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{100a_n}{n}}{1+\frac{a_n}{n}}\right)^n = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{100a_n}{n}\right)^n}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a_n}{n}\right)^n}$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n/100a_n}\right)^{\frac{n}{100a_n}\cdot 100a_n}}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n/a_n}\right)^{\frac{n}{a_n}\cdot a_n}} = \frac{e^{100\alpha}}{e^{\alpha}} = e^{99\alpha} = e^{10}$$

[문제 2-2]는 등비수열의 합, 점과 직선과의 거리, 이차함수의 최대-최소를 통합적으로 사고하여 주어진 문제를 해결해야 한다.

a_n은, 첫째 항이 0.1 이고 공비가 0.01인 등비수열의 첫째 항부터 n번째 항까지의 합이다. 첫째 항이 α이고 공비가 r인 등비수열의 n번째 항까지의 합을 구하는 공식은 $\frac{a(1-r^n)}{1-r}$ 이므로

$a_n = \frac{0.1(1-0.01^n)}{1-0.01} = \frac{0.1(1-0.01^n)}{0.99} = \frac{10(1-0.01^n)}{99}$이다.

등비수열의 합의 공식을 한번 더 사용하여 다음의 식을 얻는다.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{10(1-0.01^k)}{99} = \frac{10}{99}\left(n - \sum_{k=1}^{n} 0.01^k\right)$$

$$= \frac{10}{99}\left(n - \frac{0.01(1-0.01^n)}{1-0.01}\right) = \frac{10}{99}\left(n - \frac{1-0.01^n}{99}\right)$$

즉, $S_n = \frac{10n}{99} - \frac{10(1-0.01^n)}{99^2}$이다. 제시문에 주어진 점과 직선 사이의 거리공식을 이용하여 점 $(S_n,\ S_n^2 - 6S_n + 11)$과 직선 $x - y - 10 = 0$ 사이의 거리 d를 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$d = \frac{|S_n - S_n^2 + 6S_n - 11 - 10|}{\sqrt{2}} = \frac{|S_n^2 - 7S_n + 21|}{\sqrt{2}} = \frac{(S_n - 7/2)^2 + 35/4}{\sqrt{2}}$$

$S_n = \frac{10n}{99} - \frac{10(1-0.01^n)}{99^2}$ 에서 $\frac{10(1-0.01^n)}{99^2}$은 $0 < \frac{10(1-0.01^n)}{99^2} < \frac{10}{99^2}$이므로 n에 관계없이 매우 작은 수이고 $\frac{10n}{99}$은 $n = 35$일 때, $3.53535\cdots$로서 $\frac{7}{2} = 3.5$에 가장 가깝다. 따라서 점 $(S_n,\ S_n^2 - 6S_n + 11)$과 직선 $x - y - 10 = 0$ 사이의 거리는 $n = 35$일 때 최소이다.

2. 문항별 예시 답안 및 채점 기준

[문제 2-1] 예시 답안

- $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$이라 하면 α는 순환소수 $0.101010101\cdots$이다. 즉, $\alpha = \frac{10}{99}$이다.

- 따라서

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+100a_n}{n+a_n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{100a_n}{n}}{1+\frac{a_n}{n}}\right)^n = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{100a_n}{n}\right)^n}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a_n}{n}\right)^n}$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n/100a_n}\right)^{\frac{n}{100a_n}\cdot 100a_n}}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n/a_n}\right)^{\frac{n}{a_n}\cdot a_n}} = \frac{e^{100\alpha}}{e^{\alpha}} = e^{99\alpha} = e^{10}$$

별해

- a_n은, 첫째 항이 0.1 이고 공비가 0.01인 등비수열의 첫째 항부터 n번째 항까지의 합이다.

- $a_n = \frac{0.1(1-0.01^n)}{1-0.01} = \frac{0.1(1-0.01^n)}{0.99} = \frac{10(1-0.01^n)}{99}$ 이다.

- $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{10}{99}$

- 따라서

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+100a_n}{n+a_n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{100a_n}{n}}{1+\frac{a_n}{n}}\right)^n = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{100a_n}{n}\right)^n}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a_n}{n}\right)^n}$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n/100a_n}\right)^{\frac{n}{100a_n}\cdot 100a_n}}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n/a_n}\right)^{\frac{n}{a_n}\cdot a_n}} = \frac{e^{100\alpha}}{e^{\alpha}} = e^{99\alpha} = e^{10}$$

채점 기준

- α를 계산하면 +4점.
- $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+100a_n}{n+a_n}\right)^n=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{100a_n}{n}\right)^n}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a_n}{n}\right)^n}$를 계산하면 +4점
- $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+100a_n}{n+a_n}\right)^n=e^{100}$를 계산하면 +2점

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~3점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 10점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

[문제 2-2] 예시 답안

- $9.9a_1=0.99,\ 9.9a_2=0.9999,\ 9.9a_3=0.999999,\ \cdots,\ 9.9a_n=1-0.01^n$

$$9.9S_n=9.9\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(1-0.01^k)=n-\sum_{k=1}^{n}0.01^k=n-\frac{0.01(1-0.01^n)}{1-0.01}=n-\frac{1-0.01^n}{99}$$

$$S_n=\frac{10n}{99}-\frac{10(1-0.01^n)}{99^2}$$

- 점 $(S_n,\ S_n^2-6S_n+11)$과 직선 $x-y-10=0$ 사이의 거리 d는 다음과 같다.

$$d=\frac{|S_n-S_n^2+6S_n-11-10|}{\sqrt{2}}=\frac{|S_n^2-7S_n+21|}{\sqrt{2}}=\frac{(S_n-7/2)^2+35/4}{\sqrt{2}}$$

- $S_n=\frac{10n}{99}-\frac{10(1-0.01^n)}{99^2}$에서 $\frac{10(1-0.01^n)}{99^2}$은 n에 관계없이 매우 작은 수이고 $\frac{10n}{99}$은 $n=35$일 때, $3.53535\cdots$로서 $\frac{7}{2}$에 가장 가깝다.
- 따라서 점 $(S_n,\ S_n^2-6S_n+11)$과 직선 $x-y-10=0$ 사이의 거리는 $n=35$일 때 최소이다.

[문제 2-2] 별해

- a_n은, 첫째 항이 0.1 이고 공비가 0.01인 등비수열의 첫째 항부터 n번째 항까지의 합이다.
- $a_n = \frac{0.1(1-0.01^n)}{1-0.01} = \frac{0.1(1-0.01^n)}{0.99} = \frac{10(1-0.01^n)}{99}$ 이다.
- 따라서

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{10(1-0.01^k)}{99} = \frac{10}{99}\left(n - \sum_{k=1}^{n} 0.01^k\right)$$
$$= \frac{10}{99}\left(n - \frac{0.01(1-0.01^n)}{1-0.01}\right) = \frac{10}{99}\left(n - \frac{1-0.01^n}{99}\right)$$ 이다.

  즉, $S_n = \frac{10n}{99} - \frac{10(1-0.01^n)}{99^2}$이다.

- $S_n = \frac{10n}{99} - \frac{10(1-0.01^n)}{99^2}$
- 점 $(S_n,\ S_n^2 - 6S_n + 11)$과 직선 $x - y - 10 = 0$ 사이의 거리 d는 다음과 같다.

$$d = \frac{|S_n - S_n^2 + 6S_n - 11 - 10|}{\sqrt{2}} = \frac{|S_n^2 - 7S_n + 21|}{\sqrt{2}} = \frac{(T_n - 7/2)^2 + 35/4}{\sqrt{2}}$$

- $S_n = \frac{10n}{99} - \frac{10(1-0.01^n)}{99^2}$ 에서 $\frac{10(1-0.01^n)}{99^2}$은 n에 관계없이 매우 작은 수이고 $\frac{10n}{99}$은 $n = 35$일 때, $3.53535\cdots$로서 $\frac{7}{2}$에 가장 가깝다.
- 따라서 점 $(S_n,\ S_n^2 - 6S_n + 11)$과 직선 $x - y - 10 = 0$ 사이의 거리는 $n = 35$일 때 최소이다.

채점 기준

- a_n을 계산하면 +3점.
- S_n을 계산하면 +3점.
- n을 계산하면 +4점.

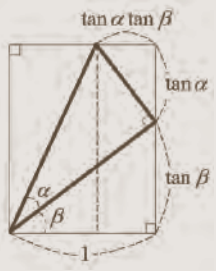
※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~3점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 10점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

문제 3

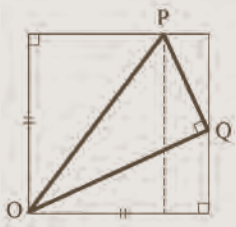
다음 제시문 (가), (나)를 읽고 문제에 답하시오.

(가) 직각삼각형과 한 꼭짓점을 공유하는 직사각형을 이용하여 탄젠트함수의 덧셈정리를 그림으로 나타내면 다음과 같다.

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

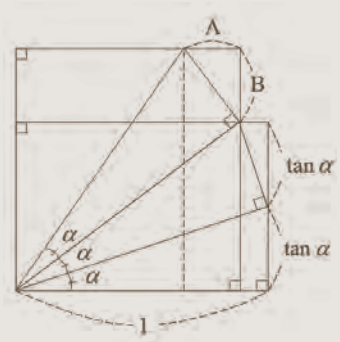


(나) 직각삼각형을 포함하는 최소 정사각형은 다음 그림과 같다. 즉, 직각삼각형의 최소각에 있는 꼭짓점 O와 정사각형의 한 꼭짓점을 일치시켰을 때, 직각삼각형의 다른 두 꼭짓점 P와 Q는 정사각형의 두 변 위에 있어야 한다.



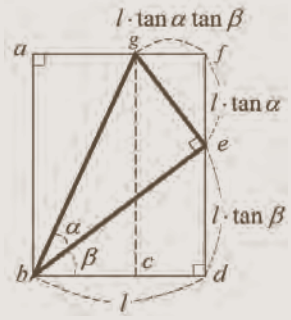
[문제 3-1] 제시문 (나)의 그림에서 직각삼각형 OPQ의 세 변의 길이가 3, 4, 5라고 하자. 이 직각삼각형을 포함하는 최소 정사각형의 한 변의 길이를 위 제시문에 근거하여 구하시오. [10점]

[문제 3-2] 제시문 (가)에 근거하여 다음 그림에서 A와 B의 길이를 구하시오. [20점]



1. 제시문의 분석, 배경 지식, 문제 풀이 과정

제시문에서 직각삼각형과 이를 포함하며 한 꼭짓점을 공유하는 최소 직사각형을 이용하여 탄젠트함수의 덧셈정리를 그림으로 나타내었다. 이를 밑변의 길이가 l인 직사각형을 이용하여 일반화하면 다음 그림과 같다.



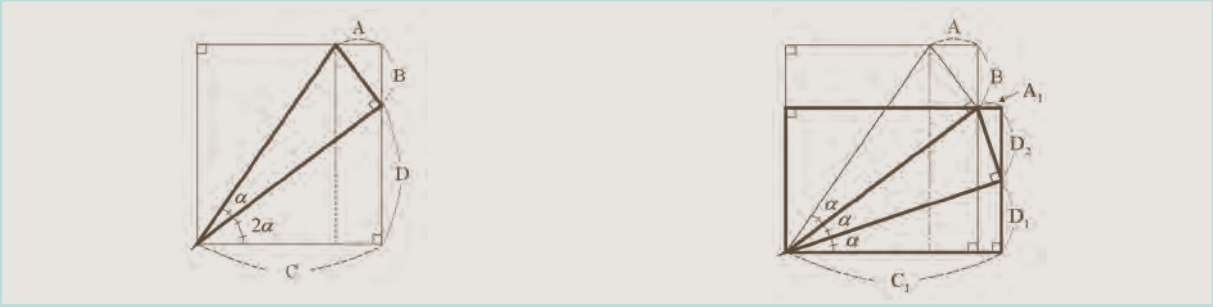
선분 $\overline{be}$의 길이는 $\sqrt{l^2+(l\cdot\tan\beta)^2}=l\cdot\sec\beta$, 선분 $\overline{eg}$의 길이는 $l\cdot\tan\alpha\cdot\sec\beta$, Δbde와 Δefg가 닮음이므로 선분 $\overline{ef}$의 길이는 $\cos\beta\cdot l\cdot\tan\alpha\cdot\sec\beta=l\cdot\tan\alpha$, 선분 $\overline{fg}$의 길이는 $l\cdot\tan\alpha\cdot\tan\beta$이다.

직각삼각형을 포함하는 최소 정사각형은 제시문 (나)에 주어진 것과 같이 직각삼각형과 한 꼭짓점을 공유하며 정사각형의 두 변 위에 직각삼각형의 꼭짓점이 있어야 한다. 제시문 (나)에 주어진 경우는 위에 보인 직각삼각형과 이를 포함하는 최소 직사각형의 특수한 형태이기 때문에, 위에서 구한 선분들 사이의 관계를 이용할 수 있다.

탄젠트함수의 3배각 공식은 제시문 (가)에 있는 탄젠트함수의 덧셈정리를 두 번 이용하여 구할 수 있다.

$$\tan(\alpha+2\alpha)=\frac{\tan\alpha+\tan2\alpha}{1-\tan\alpha\tan2\alpha},\quad \tan(\alpha+\alpha)=\frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha}$$

제시문 (가)에 주어진 그림을 바탕으로 탄젠트함수의 3배각 공식을 보여주기 위해서는 $\tan(\alpha+2\alpha)$과 $\tan(\alpha+\alpha)$을 아래 그림처럼 나타낼 수 있다.

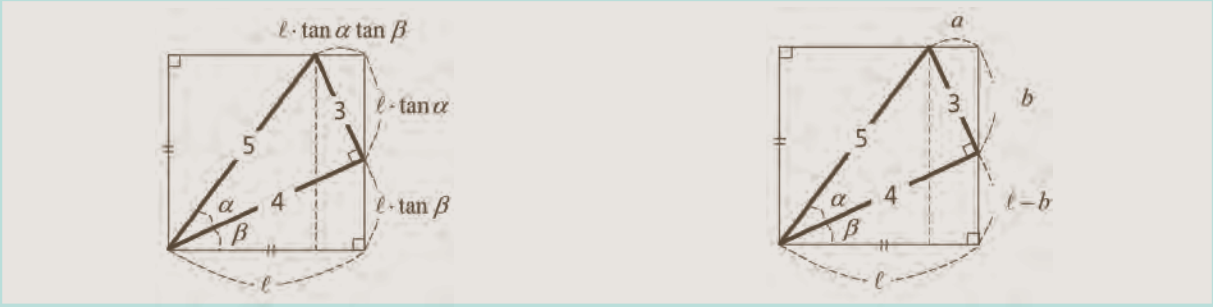


오른쪽 그림에서, 밑변의 길이가 C_1일 때 $D_1=C_1\tan\alpha$과 $D_2=C_1\tan\alpha$, 그리고 $A_1=C_1\tan^2\alpha$을 구할 수 있다. 이것을 이용하여 왼쪽 그림에서 C를 구할 수 있고, 이어서 A와 B를 구할 수 있다.

2. 문항별 예시 답안 및 채점 기준

[문제 3-1] 예시 답안

- 제시문 (가)와 (나)에 근거하여 아래와 같은 그림을 그릴 수 있다.



- 위 왼쪽 그림에서 다음과 같은 식을 유도할 수 있다.

$$\cos\alpha=4/5,\ \sin\alpha=3/5,\ \cos\beta=\ell/4,\ \sin(\alpha+\beta)=\ell/5 \quad (1)$$

- $$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(\frac{\ell}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{16-\ell^2}}{4} \quad (2)$$

- $$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{3}{5}\frac{\ell}{4}+\frac{4}{5}\frac{\sqrt{16-\ell^2}}{4}=\frac{\ell}{5} \quad (3)$$

- 식 (3)의 ℓ에 대한 방정식으로부터 다음을 구할 수 있다.

$$\ell=\frac{16}{\sqrt{17}} \quad (4)$$

[문제 3-1] 별해 1

- 위 오른쪽 그림에서 다음 식을 유도할 수 있다.

$$\cos\beta=\frac{b}{3}=\frac{\ell}{4} \quad (5)$$

- 식 (5)에서 다음 관계를 유도할 수 있다.

$$b=\frac{3}{4}\ell \quad (6)$$

- $\sin\beta=\frac{\ell-b}{4}=\frac{\ell}{16}$ (7)
- $\cos^2\beta+\sin^2\beta=\left(\frac{\ell}{4}\right)^2+\left(\frac{\ell}{16}\right)^2=1$ (8)
- 식 (7)의 ℓ에 대한 방정식으로부터 다음을 구할 수 있다.

$$\ell=\frac{16}{\sqrt{17}} \quad (9)$$

[문제 3-1] 별해 2

- 위 오른쪽 그림에서 삼각형의 닮은꼴을 이용하여 다음 비례식을 유도할 수 있다.

$$\ell:\ell-b=b:a \quad (10)$$

- 식 (1)로부터 다음의 관계식을 유도할 수 있다.

$$a=\frac{b(\ell-b)}{\ell} \quad (11)$$

- 피타고라스 정리를 이용하여 다음의 관계식을 유도할 수 있다.

$$a^2+b^2=3^2 \quad (12)$$

$$\ell^2+(\ell-b)^2=4^2 \quad (13)$$

- 식 (10)을 식 (11)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{b^2(\ell-b)^2}{\ell^2}+b^2=9 \quad (14)$$

$$\frac{b^2}{\ell^2}\left((\ell-b)^2+\ell^2\right)=9 \quad (15)$$

- 식 (13)을 식 (12)를 이용하여 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{b^2}{\ell^2}16=9$$

$$b=\frac{3}{4}\ell \quad (16)$$

- 식 (14)를 식 (12)에 대입하면 다음을 구할 수 있다.

$$\ell^2+(\ell-\frac{3}{4}\ell)^2=4^2$$

$$\ell=\frac{16}{\sqrt{17}} \quad (17)$$

채점 기준

- 식 (1)을 제시하면 +2.5점
- 식 (2)를 제시하면 +2.5점
- 식 (3)을 제시하면 +2.5점
- 식 (4)를 제시하면 +2.5점

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~3점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 10점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

별해 1 채점 기준

- 식 (5)을 제시하면 +2점
- 식 (6)를 제시하면 +2점
- 식 (7)을 제시하면 +2점
- 식 (8)를 제시하면 +2점
- 식 (9)를 제시하면 +2점

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~3점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 10점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

별해 2 채점 기준

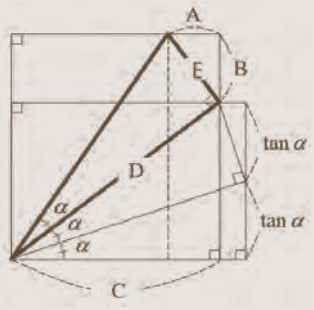
- 식 (11)을 제시하면 +2점
- 식 (14)를 제시하면 +2점
- 식 (15)를 제시하면 +2점
- 식 (16)을 제시하면 +2점
- 식 (17)을 제시하면 +2점

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~3점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 10점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

[문제 3-2] 예시 답안

아래 그림에서와 같이 가장 상단 삼각형에 포함하는 직사각형의 아랫 변 C의 길이는 제시문 (가)에 근거하여 다음과 같다.

변 C의 길이 = $1-\tan^2\alpha$ (1)



가장 상단 삼각형의 아랫 변 D의 길이는 다음과 같다.

변 D의 길이 = $\frac{1-\tan^2\alpha}{\cos 2\alpha}$ (2)

가장 상단 삼각형의 짧은 변 E의 길이는 다음과 같다.

변 E의 길이 = $\tan\alpha\frac{1-\tan^2\alpha}{\cos 2\alpha}$ (3)

B의 길이는 $(1-\tan^2\alpha)\tan\alpha$ (4)

A의 길이는 $(1-\tan^2\alpha)\tan\alpha\tan 2\alpha = 2\tan^2\alpha$ (5)

채점 기준

- 식 (1)을 제시하면 +4점
- 식 (2)를 제시하면 +3점
- 식 (3)를 제시하면 +3점
- 식 (4)를 제시하면 +5점
- 식 (5)를 제시하면 +5점

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~3점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 20점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

02_물리

2015학년도부터 논술 전형이 개별 교과형으로 변경됨에 따라 과학 선택 교과목의 하나인 물리 논술 시험이 2015학년도 모의 논술, 2015학년도 수시 일반 논술 자연계열I/의학부, 자연계열II 등 3회 출제되었다. 이하에서는 기 시행되었던 물리 논술 시험의 제시문과 문항 설명, 예시 답안과 채점 기준을 통해, 과학 선택으로 물리를 고려하고 있는 학생들에게 올바른 준비 방향을 제시하려 한다.

[참고도서]

고등학교 물리I : 교학사, 금성출판사, 천재교육
고등학교 물리II : 교학사

2015학년도 모의 논술

문제 4

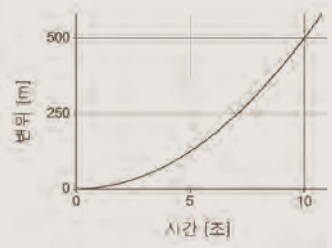
다음 제시문 (가)–(다)를 읽고 문항에 답하시오.

(가) 물체가 움직이면 시각에 따라 위치가 변하므로 움직이는 물체의 위치를 시각의 함수로 나타낼 수 있다. 이 위치의 변화를 변위라고 한다. 물체에 크기와 방향이 일정한 힘을 가하여 물체가 힘의 방향으로 이동했을 때 물체에 한 일의 양은 물체의 변위에 힘을 곱한 것이다.

(나) 순간 속도는 시간–위치 그래프의 특정 시각에서 접선의 기울기이며, 속도의 순간적인 값을 의미한다.

(다) 비스듬히 위로 던진 물체는 포물선을 그리며 날아간다. 포물선 운동은 중력에 의한 자유 낙하 운동의 하나이다. 포물선 운동을 하는 물체의 변위를 분석하면, 포물선 운동은 수직 방향으로는 중력에 의한 등가속도 운동이고 수평 방향으로는 등속도 운동임을 알 수 있다.

[문제 4-1] 마찰이 없는 공간에 정지해 있던 질량 1 kg 인 물체에 일정한 크기의 힘이 가해져 힘의 방향으로 아래 그래프와 같은 운동을 하였다. 시간 5초~10초 사이 물체에 해 준 일의 양을 구하는 과정을 논리적으로 설명하시오. 단, 일의 단위는 J(줄)을 사용하시오. [10점]



[문제 4-2] 시각 t = 0 에서 10 m/s 의 속력과 θ의 각도로 원점에서 던져진 물체가 그림 A와 같이 중력에 의해 포물선 운동을 하였다. 그림 B의 그래프는 포물선 운동을 하는 동안 원점에서 물체까지의 직선 거리를 시간에 따라 측정한 결과이며, 기울기가 순간적으로 0 이 되는 상황이 t = t_1 에서 1회 관측되었다. 이 물체가 y = 0 위치에 도착했을 때 x 방향 도달 거리를 구하는 과정을 논리적으로 설명하시오. 단, 공기 저항은 무시하고, 중력가속도는 10 m/s^2 으로 계산하시오. [20점]

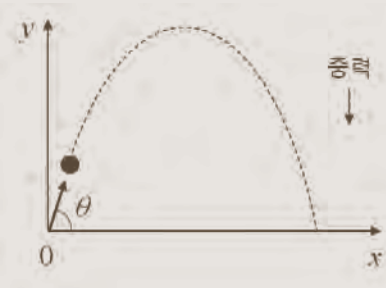


그림 A

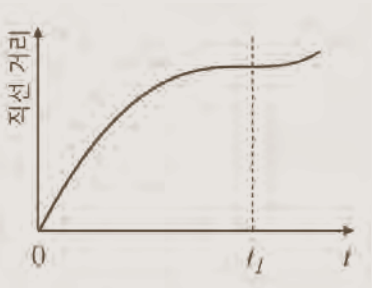


그림 B

1. 논제의 분석

2015학년도 물리 모의 논술에 출제된 문항들은 'XX를 구하는 과정을 논리적으로 설명하라'의 형식으로 되어 있다. 이러한 형식의 문항들은 '설명 및 정답 요구형'으로 분류할 수 있는 문항들로서 개별 교과 형 출제가 시행되기 전 다년간 출제되었던 중앙대학교 논술 시험 방식인 통합형 논술과 동일한 형식을 갖는다. '설명 및 정답 요구형' 문항이 주어진 경우 다음과 같은 사항에 유의하여 답안을 작성해야 한다.

- 제시문에 주어진 사항들을 우선적으로 숙지한 후 문제 풀이를 시도해야 함.
- 답안을 얻기 위한 사고 진행 과정을 각 단계 별로 설명해야 함.
- 풀이 과정이 수리적 계산인 경우 설명에 반드시 수식이 제시되어야 함.
- 'XX를 구하는 과정을 논리적으로 설명하시오'의 XX에 해당하는 답안이 최종적으로 제시되어야 함.

2. 제시문의 분석 및 배경 지식

(가)–(다)의 제시문은 물리Ⅰ의 첫 단원을 구성하고 있는 시간, 공간, 운동(교학사 물리Ⅰ, pp. 29–31, p. 51)과 물리Ⅱ의 첫 단원을 구성하고 있는 힘과 운동(교학사 물리Ⅱ, pp. 30–31)에서 각각 발췌되었는데, 개별 교과형 출제가 시행되면서 물리Ⅱ의 내용이 출제에 포함될 수 있다는 점을 보여 준다. 제시문의 주제인 속도, 가속도, 운동량, 힘 등은 물리학, 특히 역학의 근본 개념들로서 고전 물리학의 체계를 세운 뉴턴의 '자연 철학의 수학적 원리(Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, 1687)'에서 운동량과 가속도, 힘의 관계가 수학적으로 정의된 후 이를 통해 대부분의 가시적인 자연 현상이 성공적으로 설명되었다. 제시문에서 주어진 개념들에 관한 배경 설명은 다음과 같다.

제시문 (가)에서는 변위와 일을, 제시문 (나)에서는 순간 속도를 설명하고 있다. 시간은 두 시각의 사이, 거리는 두 위치의 사이에 해당하는데, 일반적으로 어느 물체가 일정한 시간 동안에 움직인 거리의 비율을 빠르기라고 한다. 즉 물체의 운동을 비교할 때, 같은 시간 동안에 더 멀리 이동한 물체가 더 빠르다고 한다. 물체가 움직이면 시각에 따라 위치가 변하므로 움직이는 물체의 위치를 시각의 함수로 나타낼 수 있다. 즉 위치 S를 S(t)로 나타낼 수 있다. 이 때 위치의 변화를 변위라고 한다. 예를 들어 어떤 물체가 시각 t_1에서 $S_1 = S(t_1)$이라는 곳에 있다가 시각 t_2에서 $S_2 = S(t_2)$라는 곳으로 이동했다고 가정하자. 두 지점 사이의 변위는 $\Delta S = S_2 - S_1 = S(t_2) - S(t_1)$이고, 두 지점을 이동하는 데 걸린 시간은 $\Delta t = t_2 - t_1$ 이다. 여기서 주의할 점은 변위와 이동 거리의 차이이다. 변위는 시작 지점과 끝 지점에 의해서만 정의되는 개념으로서 t_1과 t_2사이의 시간 동안 물체가 어떠한 경로로 진행하였는가는 변위에 아무런 영향을 주지 않는다. 변위는 (+) 또는 (–)의 부호를 모두 가질 수 있는 벡터로서, 방향은 S_1에서 S_2를 향하는 방향이고 크기는 S_1과 S_2를 연결한 직선 거리이다. 이에 비해 이동 거리는 S_1에서 출발한 물체가 중간에 어떠한 경로를 거쳐 S_2에 도달했는지에 따라 달라지며, (–)의 부호를 가질 수 없는 스칼라이다. 변위와 이동 거리가 같은 경우는 물체가 1차원인 직선 위에서 운동의 방향이 변하지 않는 상태로 움직이는 경우뿐이다. 참고로, 고등학교 물리 교육 과정의 역학 부분에서는 물리Ⅰ에서 1차원 운동을, 물리Ⅱ에서 2차원 운동을 공부한다.

소요된 시간에 대한 변위의 비율 값을 평균 속도라고 하며 다음과 같이 정의된다.

$$v_{\text{평균}} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1}$$

시간에 대한 위치를 그래프로 나타냈을 때 두 지점 사이의 기울기가 평균 속도에 해당하며, 단위는 m/s, km/h 등을 사용한다.

두 물체의 움직이는 빠르기가 일정하지 않을 때에는 평균 속도로 비교하기가 쉽지 않은데, 어느 시점에서 비교하느냐에 따라 결과가 달라지기 때문이다. 이럴 때에는 어느 특정 시각의 순간적인 값으로 비교할 수 있다. 따라서 속도를 순간적인 값으로 계산할 필요가 있을 때, 걸린 시간을 최소화 한 시간 동안의 물체의 변위 비율을 구하게 된다. 이 값을 순간 속도라고 한다. 즉, 순간 속도는 위치–시간 그래프에서 특정 시각의 접선의 기울기에 해당한다. 순간 속도는 변위와 관련된 물리량으로서 벡터이다. 일반적으로 특정 시각의 속도란 순간 속도를 가리킨다. 여기서 주의할 점은 속도와 속력의 차이이다. 만일 일정 시간 동안 방향을 바꿔가며 운동하였을 경우 변위와 실제로 움직인 이동 거리는 다르다. 변위 대신 물체의 이동 거리를 대입하여 빠르기를 계산한 스칼라 값을 속력이라 하며, 속도와 동일한 단위를 사용한다.

공이나 운동 선수가 점점 더 빨라지는 운동을 한다고 하자. 이러한 경우에는 속도가 일정하지 않고 시각에 따라 변하므로 속도를 시각의 함수 v(t)로 나타낼 수 있다. 이 때 속도가 변화하는 비율을 가속도라고 한다. 평균 속도의 경우와 같은 방식으로 평균 가속도를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$a_{\text{평균}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

순간 속도와 마찬가지로 순간 가속도를 정의할 수 있으며, 이는 속도–시간 그래프에서 특정 시각의 접선의 기울기에 해당한다. 가속도는 속도를 시간으로 나눈 개념이기 때문에 m/s^2, cm/s^2 등의 단위를 사용하여 나타낸다. 특별히 물체의 가속도가 일정한 운동을 등가속도 운동이라 하는데, 이것은 속도가 시간에 따라 일정한 비율로 변하는 운동이다. 그 예로는 자유 낙하 운동이 있는데, 이는 지표면 근처에서 중력에 의해 물체의 가속도의 크기가 약 10 m/s^2으로 일정하고 방향이 아래 방향인 운동을 의미한다. 고등학교 물리 교육 과정에서 다루어지는 운동 중 가속도가 시간에 따라 지속적으로 변하는 운동의 예로는 단진동 운동과 등속 원운동 등이 있다.

운동량은 물체의 운동 규모와 관련된 물리량으로서, 질량이 m이고 속도가 v인 물체의 운동량은 $p = mv$로 정의하고 단위로는 $kg \cdot m/s$를 사용한다. 만일 물체가 운동하는 동안 질량(m)이 변하지 않는다면, 힘(F)과 운동량(p), 가속도(a)의 관계를 설명하고 있는 뉴턴 운동 제2법칙은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$F = \frac{dp}{dt} = m\frac{dv}{dt} = ma$$

즉, 물체에 작용한 힘은 그 물체의 운동량의 시간에 따른 변화율이다. 따라서 물체에 알짜힘이 작용하지 않는다면 그 물체의 운동량은 보존된다. 이를 운동량 보존 법칙이라고 한다. 뉴턴 운동 제2법칙은 힘을 받은 물체에 가속도가 발생하는 현상을 설명해 준다. 물체에 주어진 힘을 알면 물체의 가속도를 알게 되고, 이렇게 구해진 가속도를 통해 물체의 시간 별 속도나 위치 등과 같은 운동 상황을 구체적으로 알 수 있다. 참고로, 변위, 속도, 가속도, 운동량, 힘 등의 물리량은 모두 벡터이다.

일이란 단어는 일상 생활에서 다양한 의미로 쓰인다. 그러나 물리에서 일이란 용어는 특별한 의미로 사용되는데, 힘이 작용하여 물체를 일정 거리만큼 이동시켰을 때 생긴 물리량을 가리킨다. 보다 정확히 일(W)은 벡터인 힘(F)과 변위(S)의 내적으로 정의된다.

$$W = \vec{F} \cdot \vec{S} = FS\cos\theta$$

위 식의 θ는 힘과 변위 사이의 각이다. 일의 단위는 J(줄)이며, $1\ J = 1\ N \cdot m = 1\ kg \cdot m^2/s^2$이다.

제시문 (다)에서는 자유 낙하 운동의 하나인 포물선 운동을 설명한다. 앞서 설명한 바와 같이 자유 낙하 운동은 대표적인 등가속도 운동이며, 포물선 운동은 일정한 크기의 가속이 발생하는 수직(y) 방향 운동과 일정한 속도가 유지되는 수평(x) 방향 운동으로 구분된다. 따라서 포물선 운동은 xy 평면에서 진행되는 2차원 운동으로 볼 수 있다. 비스듬한 각도로 투사된 물체와 같이 한 물체가 x 방향으로 속도 v_0인 등속도 운동을, y 방향으로 초기 속도 v_1이고 가속도 a인 등가속도 운동을 하는 경우를 생각해 보자. 물체가 t = 0에서 원점에 있었다고 가정하면 각 방향의 변위는 시간에 따라 다음과 같다.

$$x(t) = v_0 t$$
$$y(t) = v_1 t + \frac{1}{2}at^2$$

위 식은 x, y가 모두 t만의 함수인 매개변수 방정식으로서 $t = x/v_0$를 y에 대입하면 다음과 같은 x의 2차 방정식, 즉 포물선에 해당하는 물체의 궤적을 얻게 되어 비스듬히 투사된 물체가 포물선 운동을 한다는 것을 알 수 있다.

$$y = \frac{v_1}{v_0}x + \frac{a}{2v_0^2}x^2$$

3. 문항별 분석 및 풀이 과정

[문제 4-1]

[문제 4-1]은 물체에 일정한 크기의 힘이 가해 진 상황에서 물체에 행한 일의 양을 구하는 과정을 묻는 문제이다. 우선 문제에서 주어진 조건을 정확히 파악해야 한다. '마찰이 없는 공간'이라는 표현은 마찰력이 없는 상황을 가리키며, 이는 문제에서 언급한 '일정한 크기의 힘'을 제외한 다른 힘은 고려하지 않는다는 의미이다. '정지해 있던'이라는 표현에서 물체의 초기 속도가 0임을 알 수 있다. 힘은 크기와 방향을 모두 가지고 있는 벡터이다. 문제에서 힘의 크기가 일정하다고 했는데 힘의 방향에 대한 언급은 되어 있지 않다. 일이 힘과 변위의 내적을 통해 계산하는 값이고, 물체가 힘의 방향으로 운동했다고 설명되어 있으므로 물체가 힘을 받으며 움직이는 동안 계속 θ = 0인 상황이 되었다는 것을 의미하므로 힘의 방향을 고려할 필요가 없음을 알 수 있다. F = ma의 식에서 힘이 일정하기 때문에 가속도 a가 일정함을 알 수 있다.

물체의 운동을 다루는 문제에서 주어지는 그래프를 분석할 때에는 각 좌표 축이 무엇인지 파악하는 것이 가장 우선적이다. 그래프에서 특정 지점의 기울기는 y축 물리량을 x축 물리량으로 나눈 물리량의 순간 크기에 해당하며, 그래프 곡선 밑의 면적은 y축 물리량과 x축 물리량을 곱한 물리량의 크기에 해당한다. 주어진 그래프는 시간-변위의 그래프인데, 초기 속도가 0이고 가속도 a가 일정한 운동에서 변위의 식에 해당하는 $S = at^2/2$의 그래프임을 알 수 있다. 그래프에서 알 수 있는 특정 좌표를 대입하면 가속도 a를 계산할 수 있고, 질량 1 kg을 곱하면 힘의 크기를 알 수 있다. 변위의 식에 시간 5초, 10초를 대입하여 그 차이를 계산하면 주어진 시간 동안 발생한 변위가 된다. 이를 힘의 크기와 곱하면 최종적으로 일의 양을 구할 수 있다. 따라서 문제 풀이에는 다음과 같은 논리의 진행 과정 및 계산 과정이 포함되어야 한다.

- 힘의 크기가 일정하고, 물체의 이동 방향이 힘의 방향과 동일하므로 가속도의 크기가 일정하다.
- 초기 속도가 0이므로 주어진 그래프는 $S = at^2/2$이다.
- 주어진 좌표 (10, 500)을 이용하여 가속도 a를 구한다.
- $S = at^2/2$의 식을 이용하여 t = 5와 t = 10에서 변위를 각각 구한 후 그 차이 ΔS를 구한다. 두 벡터의 차이가 또 하나의 벡터인 것처럼 변위의 차이인 ΔS는 또 하나의 변위로서 두 시각 사이에 발생한 물체의 변위이다.
- $W = F \cdot \Delta S$를 통해 물체에 해 준 일의 양을 구한다.

[문제 4-2]

[문제 4-2]는 중력이 있는 공간에서 물체가 비스듬히 투사된 후 발생하는 운동에 관한 내용을 묻는 문제이다. 중력 가속도가 y축 방향으로 -g인 공간에서 물체가 수평면 즉 x축과 θ의 각도로 투사된 경우, 물체의 운동은 xy 평면에서의 2차원 운동으로 생각할 수 있다. 뉴턴 운동 제2법칙에서 특정 방향으로 힘이 없는 경우 그 방향으로의 가속도가 0이 되므로 아무런 힘이 작용하지 않는 x축 방향의 운동은 초기 속도가 유지되는 등속도 운동이다. y축 방향으로는 일정한 크기의 중력 가속도가 작용하므로 y축 방향의 운동은 등가속도 운동이다. 따라서 물체가 투사될 때 초기 속력을 v_0라고 하면, x(t)와 y(t)를 각각 등속도 운동의 식과 등가속도 운동의 식으로부터 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$x(t) = v_0 \cos\theta \cdot t$$

$$y(t) = v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

위 식의 y(t)에서 중력 가속도의 방향이 −y 방향이기 때문에 (−)부호가 사용되었다. x(t)와 y(t)는 시간을 매개 변수로 하는 매개 변수의 방정식이며, $t = x/(v_0 \cos\theta)$를 y(t)에 대입하면 y(x)의 식, 즉 물체의 운동 궤적의 식을 얻을 수 있다. 이는 앞서 설명한 바와 같이 포물선의 방정식이 되며, 이러한 상황이 그림 A에 나타나 있다.

문제에서는 투사된 물체의 x축 방향 도달 거리를 구하는 과정을 묻고 있다. 투사된 물체의 x축 방향 도달 거리는 초기 속도와 소요 시간의 곱이고, 소요 시간을 알기 위해서는 y축 방향의 변위가 다시 0이 되는 시간을 계산하면 된다. 즉 $t > 0$ 에서 $y(t) = 0$이 되는 t를 구한 후 이를 x(t)의 식에 대입하면 도달 거리를 구할 수 있다. 그러나 투사각 θ가 미지수로서 이와 관련된 $\sin\theta$나 $\cos\theta$가 미지수로 남아 있는 상황이며 문제에서 추가로 제시된 조건을 통해 그 값을 찾아야 한다.

그림 B의 그래프는 원점에서 물체까지의 직선 거리, 즉 xy 평면에서 물체의 변위의 크기를 시간에 따라 나타낸 그래프이다. 이 변위의 크기를 S라고 하면, S는 원점에서 (x(t), y(t))를 연결한 선분의 길이이므로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$S(t) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2\theta \cdot t^2 + v_0^2 \sin^2\theta \cdot t^2 + \frac{g^2 t^4}{4} - v_0 \sin\theta \cdot gt^3}$$
$$= \sqrt{v_0^2 t^2 - v_0 \sin\theta \cdot gt^3 + \frac{g^2 t^4}{4}}$$

문제에서는 그림 B의 그래프에서 접선의 기울기가 0이 되는 상황이 $t > 0$인 특정한 t_1에서 1회 발생하였다. 그림 B는 시간–변위 그래프이므로 접선의 기울기가 0이 되었다는 것은 제시문 (나)에서 설명한 순간 속도가 0이 되었다는 의미 이다. 그림 B의 그래프는 시간에 따라 꾸준히 증가하는 단조 증가 함수로서, 그 기울기는 (+)에서 서서히 감소하여 t_1에서 일시적으로 0이 되었다가 다시 (+)로 증가한다. S(t)를 시간으로 미분한 dS(t)/dt를 구하면 다음과 같다.

$$\frac{dS(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{v_0^2 t^2 - v_0 \sin\theta \cdot gt^3 + \frac{g^2 t^4}{4}} = \frac{2v_0^2 t - 3v_0 \sin\theta \cdot gt^2 + g^2 t^3}{2\sqrt{v_0^2 t^2 - v_0 \sin\theta \cdot gt^3 + \frac{g^2 t^4}{4}}}$$
$$= \frac{t(2v_0^2 - 3v_0 \sin\theta \cdot gt + g^2 t^2)}{2\sqrt{v_0^2 t^2 - v_0 \sin\theta \cdot gt^3 + \frac{g^2 t^4}{4}}}$$

설명된 바와 같이 그래프의 기울기가 특정한 $t_1(> 0)$을 중심으로 변하는 특징을 갖기 위해서는 계산된 dS(t)/dt의 분자에서 괄호 안에 포함된 t의 2차 방정식이 중근을 가져야 한다. 이를 통해 수식의 $\sin\theta$의 값을 구할 수 있으며, 그 결과를 통해 $\cos\theta$도 삼각 함수의 공식에서 구할 수 있게 되어 문제에서 요구하는 x축 방향의 도달 거리를 최종적으로 얻게 된다. 따라서 문제 풀이에는 다음과 같은 논리의 전개 과정 및 계산 과정이 포함되어야 한다.

- x축, y축 방향의 운동의 성격을 각각 설명하고, x(t)와 y(t)를 t의 함수로 표현한다.
- x축 방향의 도달 거리를 투사각 θ의 함수로 표현한다.
- 원점에서 (x(t), y(t))까지의 직선 거리 S를 t의 함수로 표현한다.
- 제시된 조건에서 dS(t)/dt가 중근을 갖는다는 점을 이용하여 $\sin\theta$와 $\cos\theta$의 값을 구한다.
- 구한 $\sin\theta$와 $\cos\theta$의 값을 적용하여 x축 방향의 도달 거리를 최종적으로 얻는다.

4. 문항별 예시 답안 및 채점 기준

[문제 4-1 예시 답안]

- 물체에 일정한 힘이 가해지는 상황이므로 가속도가 일정하다.
- 초기 속도가 0 이므로 가속도를 a 라고 할 때 시간 t 에 따른 변위 S는 다음과 같다.

$$S = \frac{1}{2}at^2$$

- 그래프를 참고하면 t = 10 에서 S = 500 이므로 a = 10 (m/s^2) 이고, 물체의 질량이 1 kg 이므로 힘은 10 (N) 이다.
- 5 초 ~ 10 초 사이의 변위는 500 − 125 = 375 이므로 일의 양은 10 x 375 = 3750 (J) 이다.

[문제 4-1] 채점 기준

- 등가속도 운동에서 시간에 따른 변위의 식을 바르게 쓰면 +2점.
- 가속도와 변위의 식을 이용하여 가속도의 크기를 맞게 구하면 +3점.
- 변위와 힘을 곱하여 일의 양을 바르게 구하면 +5점. (최종 답안에서 일의 단위를 쓰지 않으면 감점 −2점.)

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~2점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 10점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

[문제 4–2 예시 답안]

- 각도 θ로 던진 물체가 중력에 의해 포물선 운동을 하므로 x, y 방향 변위는 시간에 따라 다음과 같이 변한다.

$$x = 10 \cdot \cos\theta \cdot t$$

$$y = 10 \cdot \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 10 \cdot \sin\theta \cdot t - 5t^2$$

- 원점에서 물체까지 직선 거리를 S라고 하면, 다음과 같이 계산된다.

$$S = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{100 \cdot t^2 - 100 \cdot \sin\theta \cdot t^3 + 25 \cdot t^4}$$

- 순간 속도에 해당하는 기울기 dS/dt를 구하면 다음과 같다. (단, t 〉 0)

$$dS/dt = \frac{200 \cdot t - 300 \cdot \sin\theta \cdot t^2 + 100 \cdot t^3}{2 \cdot \sqrt{100 \cdot t^2 - 100 \cdot \sin\theta \cdot t^3 + 25 \cdot t^4}} = \frac{50 \cdot t \cdot \left(2 - 3 \cdot \sin\theta \cdot t + t^2\right)}{\sqrt{100 \cdot t^2 - 100 \cdot \sin\theta \cdot t^3 + 25 \cdot t^4}}$$

그림 B에서 *dS/dt* 는 단조증가함수이고 *dS/dt = 0* 이 되는 상황이 1회만 발생했으므로, *dS/dt* 의 분자에 있는 $2-3\cdot\sin\theta\cdot t+t^3$ 항이 중근을 가져야 함을 알 수 있다. 따라서 던진 각도에 관한 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3},\quad \cos\theta=\frac{1}{3}$$

던진 물체가 다시 지상에 도착하는 시간은 다음과 같다.

$$y=10\cdot\sin\theta\cdot t-5t^2=0 \qquad \therefore\ t=2\cdot\sin\theta=\frac{4\sqrt{2}}{3}(\text{초})$$

x 방향 운동은 등속도 운동이므로, 도달 거리는 다음과 같다.

$$x=10\cdot\cos\theta\cdot t=\frac{40\sqrt{2}}{9}(\text{m})$$

[문제 4-2] 채점 기준

- x, y 방향 변위의 식을 바르게 쓰면 각각 +3점.
- 직선 거리의 식을 바르게 구하면 +2점, 그 미분을 통해 식을 전개하면 +2점.
- 미분된 식과 그래프의 형태를 통해 $\sin\theta$의 값을 바르게 계산하면 +5점.
- x 방향 도달 거리를 바르게 구하면 +5점. (최종 답의 단위가 빠진 경우 감점 –2점).

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~2점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 20점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

2015학년도 수시 일반 논술

문제 4

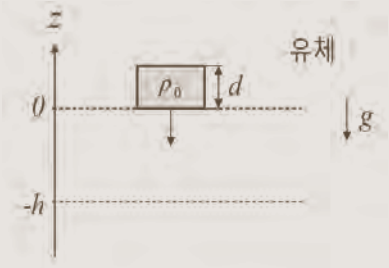
다음 제시문 (가)–(다)를 읽고 문제에 답하시오.

(가) 유체에 잠긴 물체에 작용하는 부력은 잠긴 부분의 부피에 해당하는 유체의 무게와 같다. 밀도가 ρ인 유체에 부피 V만큼 물체가 잠겼을 때, 이 물체가 받는 부력은 $F=\rho Vg$가 된다. 여기서 g는 중력 가속도이며, 중력과 부력의 합이 물체에 작용하는 알짜힘이다.

(나) 용수철에 힘이 작용하여 용수철이 x만큼 늘어났을 때 x는 용수철에 작용한 힘에 비례한다. 따라서 길이가 x만큼 늘어난 용수철이 원래의 길이로 되돌아가려는 탄성력은 $F=-kx$이다. 이를 훅의 법칙이라고 한다. 여기서 (–)는 탄성력과 용수철의 변위가 반대 방향이라는 의미이며, k는 용수철의 특성에 따라 정해지는 용수철 상수이다. 용수철 상수가 k인 용수철에 질량 m인 물체를 매달아 진동시키면 주기는 $T=2\pi\sqrt{m/k}$이다.

(다) 가속도가 일정한 운동을 등가속도 운동이라 하는데, 이것은 속도가 시간에 따라 일정하게 변하는 운동이다. 가속도가 a로 일정한 경우, 처음 시각을 0, 나중 시각을 t, 처음 속도를 v_0, 나중 속도를 v라고 하면 $v=v_0+at$의 식이 성립한다. 시간 t동안 움직인 변위는 속도–시간 그래프의 아래 면적에 해당하며, 등가속도 운동에서 처음 시각을 0, 나중 시각을 t, 처음 속도를 v_0, 처음 위치를 0, 나중 위치를 s라고 하면 $s=v_0t+at^2/2$이 성립한다.

[문제 4–1] 넓은 공간에 밀도가 ρ_1인 유체가 가득 차 있다. 이 공간에서 다음 그림과 같이 $z=0$에 정지해 있던 직육면체 형태의 물체가 낙하를 시작하였다. 물체의 두께가 d, 밀도가 ρ_0일 때 물체가 h만큼 낙하하여 $z=-h$에 도달할 때까지 소요되는 시간을 구하는 과정을 위 제시문에 근거하여 논리적으로 설명하시오. 단, $\rho_1<\rho_0$이고, 중력 가속도는 g이며, 부력과 중력을 제외한 다른 힘은 없다고 가정한다. [10점]



[문제 4–2] [문제 4–1]에서 유체의 밀도가 $z\geq 0$에서 ρ_1, $z<0$에서 ρ_2이고, [문제 4–1]에서와 동일한 물체가 위 그림과 같이 $z=0$에 정지해 있다가 낙하를 시작한다고 하자. 위 제시문에 근거하여 이 물체의 운동이 주기 운동이 됨을 보이고, 그 주기를 구하는 과정을 논리적으로 설명하시오. 단, $\rho_1<\rho_0<(\rho_1+\rho_2)/2$이고, 중력 가속도는 g이며, 부력과 중력을 제외한 다른 힘은 없다고 가정한다. [20점]

1. 논제의 분석

2015학년도 수시 일반 논술(자연계열)에 출제된 물리 문항들은 'XX를 구하는 과정을 논리적으로 설명하라'의 형식과 'XX가 됨을 보이시오'의 형식이 함께 나타난다. 전자의 형식은 '설명 및 정답 요구형'으로 분류할 수 있는 문항들로서 앞서 설명된 바와 같이 다음의 사항에 유의하여 답안을 작성해야 한다.

- 제시문에 주어진 사항들을 우선적으로 숙지한 후 문제 풀이를 시도해야 함.
- 답안을 얻기 위한 사고 전개 과정을 각 단계 별로 설명해야 함.
- 풀이 과정이 수리적 계산인 경우 설명에 반드시 수식이 제시되어야 함.
- 'XX를 구하는 과정을 논리적으로 설명하시오'의 XX에 해당하는 답안이 최종적으로 제시되어야 함.

[문제 4-2]에 나타나는 'XX가 됨을 보이시오'의 형식은 '증명 및 설명 요구형'으로 분류할 수 있다. 물리 문항에서 요구하는 증명은 수학에서의 증명과 달리 발생하는 현상의 원인 또는 결과를 물리 법칙에 근거하여 설명하는 것이 핵심이며, 다음의 사항에 유의하여 답변을 작성해야 한다.

- 제시문에 주어진 사항들을 우선적으로 숙지해야 함.
- 증명이 요구되는 사항에 적용될 물리 법칙이나 정리를 바르게 선택해야 함.
- 증명의 각 단계는 적절한 수식을 통해 타당성의 근거를 제시해야 함.
- 'XX가 됨을 보이시오'의 XX에 해당하는 현상이 수식을 통해 최종적으로 설명되어야 함.

2. 제시문의 분석 및 배경 지식

제시문 (가)는 물리Ⅰ, 단원 Ⅳ 에너지, 소단원 2 힘과 에너지의 이용의 유체에서의 압력(교학사 물리Ⅰ, p.327), 제시문 (나)는 물리Ⅲ, 단원 Ⅰ 운동과 에너지, 소단원 4 힘과 운동 법칙의 용수철 진자에 작용하는 힘(교학사 물리Ⅲ, p.52), 제시문 (다)는 물리Ⅱ, 단원 Ⅰ 시공간과 우주, 소단원 1 시간, 공간, 운동의 가속도(교학사 물리Ⅰ, pp.35-36)에서 각각 발췌되었다. 부력, 탄성력, 중력 등 외부의 힘에 의한 물체의 운동을 설명하는 뉴턴 역학이 중심 내용이며, 과목 별 문항의 형태로 변경되어 시행되는 첫 해라는 점과 물리Ⅲ의 내용을 공부하지 않은 수험생들을 고려하여 물리Ⅲ의 내용 보다는 물리Ⅰ의 내용을 위주로 발췌되었다는 점이 특징이다. 물리Ⅲ에서 발췌된 제시문 (다)의 경우에도, 주기를 구하는 식이 주어진 부분을 제외한 나머지 설명은 물리Ⅰ, 단원 Ⅰ 시공간과 우주, 소단원 1 시간, 공간, 운동의 탄성 퍼텐셜 에너지(교학사 물리Ⅰ, p.54) 부분에 동일하게 나타나 있다. 각 제시문의 내용에 대한 배경 설명은 다음과 같다.

제시문 (가)는 유체에 잠긴 물체에 작용하는 부력을 계산하는 방법을 설명한다. 유체란 일정한 형태가 없이 흐를 수 있는 물질을 가리키며, 액체와 기체가 포함된다. 일정한 모양을 가지지 않는 유체의 특성을 서술할 때에는 고체를 서술할 때 사용하는 질량과 힘이라는 개념보다 밀도와 압력이라는 개념을 사용하는 것이 더 유용하다. 밀도란 단위 부피당 질량을 의미한다. 물질의 밀도를 ρ, 질량을 M, 부피를 V라고 할 때 $\rho = M/V$로 정의되며 단위로는 kg/m^3이나 g/cm^3을 사용한다. 고체나 액체의 밀도는 기체에 비해 약 1000배정도 크며, 이는 기체에서 분자 사이의 거리가 고체나 액체를 이루는 분자 사이의 거리보다 10배 정도 크다는 것을 의미한다. 밀도는 온도의 함수인데, 예를

들면 물의 경우 4℃에서 약 1000kg/m^3의 가장 큰 밀도를 갖는다. 그 이하에서는 0℃까지 점차 감소하다가 얼음이 된 후 급격히 줄어들어 917kg/m^3까지 감소하고 그 이하의 온도에서는 얼음이 수축하여 점차 증가하는 형태로 변한다. 일상 생활에서는 밀도 대신 '비중'이라는 용어를 많이 사용하는데, 비중은 어떤 물질의 밀도와 4℃ 물의 밀도의 비율로 정의되며, 단위는 없다.

유체는 외부로부터 힘을 받을 때 연속적으로 변형되는 특징을 지니고 있기 때문에 고체처럼 한 점에 힘을 줄 때 나타나는 현상을 볼 수 없다. 대신 유체에서는 압축에 의해 힘이 전달되기 때문에 유체의 운동을 설명할 때에는 압력을 사용한다. 압력은 단면에 수직으로 작용하는 힘과 그 힘을 받는 면적의 비로 나타낸다. 즉 압력을 P, 수직으로 작용하는 힘을 F, 힘이 작용하는 면적을 A라고 하면 다음의 식이 성립한다. 이 때, 힘이 벡터이므로 압력도 벡터임을 알 수 있다. 압력의 단위로는 Pa(파스칼)을 사용하는데, 1 Pa = 1 N/m^2이다.

$$\vec{P} = \frac{\vec{F}}{A}$$

프랑스의 과학자였던 파스칼은 유체 표면에서 압력이 가해지면 유체 내의 모든 지점에 이와 같은 크기의 압력이 전달된다는 것을 발견하였다. 이를 파스칼 법칙이라고 한다. 파스칼 법칙은 일상 생활에서 작은 힘으로 큰 힘을 낼 때에 매우 유용하다. 유체의 작은 면적 부분에 일정한 압력을 가하면 압력과 면적의 곱에 해당하는 힘은 작아진다. 가해진 압력은 파스칼 법칙에 의해 유체의 모든 부분에 작용하므로, 유체가 넓게 접하고 있는 부분에 작용하는 힘은 다음 그림과 같이 면적에 비례하여 증가한다.



위 그림에서 힘의 크기에는 차이가 있지만, 작은 힘이 유체에 행한 일과 유체가 큰 힘을 통해 외부에 행한 일의 양은 같다. 유체의 총량은 보존되므로 작은 힘이 밀어낸 유체의 부피가 큰 힘을 통해 확장된 유체의 부피와 같아야 하며, 따라서 작은 힘이 작용한 변위가 큰 힘이 작용한 변위보다 크다. 즉, 변위가 힘의 크기에 반비례하므로 변위와 힘을 곱한 일이 같아지는 것이다. 유압 장치를 이용하면 작은 힘으로도 큰 힘을 낼 수 있기 때문에 대형 굴삭기의 작동, 자동차의 브레이크와 조향 장치 등에 파스칼 법칙을 이용한 유압 장치가 적용되고 있다.

파스칼 법칙에 의해 외부에서 유체에 압력을 가하면 유체 모든 곳에 같은 크기의 압력이 작용하지만, 유체 자체의 무게 때문에 유체 내에서는 깊이에 따라 달라지는 압력도 작용한다. 밀도가 ρ인 유체가 h만큼의 깊이로 담겨있고 유체의 단면적이 A라고 하면 유체의 무게로 인한 압력 P는 다음과 같다.

$$P = \frac{F}{A} = \frac{\rho hAg}{A} = \rho gh$$

위의 식에서 g는 중력 가속도이다. 즉 밀도가 ρ인 유체 속 깊이 h인 지점에서 중력에 의해 발생하는 압력의 크기는 ρgh이다.

유체 내부에 물체가 존재하는 경우, 물체의 위와 아래 지점이 받는 압력은 깊이 차이로 인해 달라진다. 물체 위와 아래의 압력 차이로 인해 힘의 차이가 발생하며, 그 방향은 압력이 높은 쪽에서 낮은 쪽으로, 즉 아래에서 위를 향하는 방향으로서 중력의 반대 방향이다. 이로 인해 물체에 뜨는 힘이 발생하는데 이를 부력이라고 한다. 유체 속에 있는 물체의 모든 부분에 작용하는 압력의 벡터 합을 구하면, 그 크기는 물체의 부피에 해당하는 유체의 무게와 같다. 본래의 유체가 물체 대신 들어 있을 경우 아무런 힘을 받지 않아야 하는데, 이는 유체에 작용하는 중력과 부력이 정확히 평형을 이루기 때문이다. 따라서 물체의 부피에 해당하는 유체의 무게가 부력과 같아진다는 것을 직관적으로 이해할 수 있다.

제시문 (나)는 훅의 법칙으로 알려져 있는 용수철의 복원력에 의한 단진동 운동에 관한 내용이다. 용수철에 매달린 물체를 당겼다가 놓으면 물체는 용수철이 늘어나고 압축되면서 주기적인 왕복 운동을 한다. 물체의 이러한 운동을 단진동(simple harmonic oscillation)이라고 한다. 단진동에서 물체는 용수철이 최대로 늘어났을 때와 최소로 압축되었을 때 순간적으로 정지하고, 평형 상태일 때 가장 빠른 운동을 한다. 이러한 단진동 운동은 원운동을 하고 있는 물체를 옆에서 본 모습과 같다. 즉 원운동하는 물체에 평행 광선을 비출 때 벽에 생긴 그림자의 운동이다. 물체의 그림자 위치는 시간에 따라 주기적으로 변하게 되며, 수식적으로는 $x = A\sin\omega t$로 표현된다.

단진동하는 물체가 1초 동안 진동하는 횟수 f를 진동수라 하고, 1회 진동하는 데 걸리는 시간 T를 주기라고 한다. $x = A\sin\omega t$에서 주기 T 동안 변화된 위상은 2π이므로 진동수와 주기의 관계는 다음과 같다.

$$\omega T = 2\pi, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

단진동하는 물체의 속도 v(t)와 가속도 a(t)는 변위 x(t)를 시간으로 각각 한 번, 두 번 미분하면 얻을 수 있다. 따라서 단진동 운동에서는 다음의 식이 성립한다.

$$x(t) = A\sin\omega t$$
$$v(t) = A\omega\cos\omega t = A\omega\sqrt{1-\sin^2\omega t} = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$$
$$a(t) = -A\omega^2\sin\omega t = -\omega^2 x$$

용수철에 추를 연결하여 마찰이 없는 바닥에서 추를 당기거나 압축시켰다 놓으면 용수철은 주기적인 왕복 운동을 한다. 이러한 진자를 용수철 진자라고 한다. 용수철 진자는 용수철이 작용할 수 있는 한계인 탄성 한계 내에서 용수철의 늘어난 길이 x에 비례하는 복원력 F 가 작용하며, 그 크기는 F = −kx 로서 이를 훅의 법칙이라고 한다. 이 때 k는 비례 상수로 용수철 상수 또는 탄성 계수라고 한다. 복원력은 매달린 추의 질량 m과 가속도 a(t)의 곱이므로, 추의 질량과 용수철 상수로부터 용수철 진자의 진동수 f와 주기 T 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$F = ma = -m\omega^2 x = -kx, \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$$
$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

제시문 (다)는 등가속도 직선 운동에서 나타나는 속도와 변위에 관한 내용이며, 이에 관한 배경 지식은 앞서 설명된 2015학년도 모의 논술 제시문 (가)–(나)의 배경 지식과 동일하다.

3. 문항별 분석 및 풀이 과정

[문제 4–1]

[문제 4–1]은 낙하하는 물체에 일정한 크기의 부력이 가해질 때, 물체가 낙하하는 데 소요되는 시간을 구하는 과정을 묻는 문제이다. 문제에서 주어진 조건을 살펴보면 밀도가 ρ_1인 유체로 가득 찬 공간을 가정하고 있으며, 제시문 (가)의 내용을 고려하면 유체 내부에 존재하는 물체는 $\rho_1 Vg$에 해당하는 부력을 받게 됨을 알 수 있다.

이 공간에 두께가 d인 직육면체 형태의 물체가 정지해 있다가 낙하하기 시작하였다. 물체의 부피 V 대신 두께 d가 주어졌기 때문에 물체의 수직 단면적을 A로 가정할 때 물체가 받게 되는 부력의 크기는 $\rho_1 Adg$가 되며 방향은 중력의 반대 방향이므로 z축의 (+) 방향이다. 물체의 질량은 밀도와 부피의 곱이므로 $\rho_0 Ad$ 이고, 중력의 크기는 $\rho_0 Adg$, 방향은 z축의 (–) 방향이다. 문제의 조건에서 $\rho_1 < \rho_0$이므로 중력의 크기가 부력의 크기보다 큼을 알 수 있는데, 이는 물체가 낙하한다는 조건과도 잘 부합한다.

제시문 (가)에 의하면 물체가 낙하하는 동안 물체에 가해지는 알짜힘은 중력과 부력의 합이고 두 힘 모두 위치나 시간과 관계없이 일정하기 때문에 물체는 가속도가 일정한 등가속도 직선 운동을 함을 알 수 있다. 알짜힘을 물체의 질량 $\rho_0 Ad$ 로 나누면 물체의 가속도를 구할 수 있는데, 이 단계에서 Ad가 제거되어 물체의 가속도가 물체의 부피와는 무관하고 물체의 밀도에 따라서만 달라짐을 알 수 있다.

가속도를 구한 후 제시문 (다)에 주어진 등가속도 운동에서의 시간과 변위의 관계식에 변위 –h와 함께 대입하면, 시간 t에 관한 2차식을 얻을 수 있으며 그 해를 찾으면 낙하에 소요되는 시간을 구할 수 있다. 따라서 문제 풀이에는 다음과 같은 논리의 전개 과정 및 계산 과정이 포함되어야 한다.

- 유체 속의 물체는 일정한 크기의 부력을 받는다.
- 유체 속의 물체에 가해지는 알짜힘은 부력과 중력의 합이다.
- 알짜힘을 물체의 질량으로 나누어 가속도 a를 구한 후 물체의 운동이 등가속도 운동임을 확인한다.
- 제시문에 주어진 $S = at^2/2$의 식에 변위와 가속도를 대입하여 낙하에 소요되는 시간을 구한다.

[문제 4–2]

[문제 4–2]는 [문제 4–1]과 유사한 상황이지만 유체의 밀도가 z = 0 면을 경계로 달라져 물체의 밀도보다 작은 영역(z 〉 0)과 큰 영역(z 〈 0)으로 나뉘는 경우 발생하는 물체 운동의 주기성을 예측하고 이에 관한 수식 전개를 통해 운동의 주기를 구하는 문제이다. 제시된 환경에서의 물체의 운동을 이해하기 위해서는 시간에 따른 물체의 변위와 물체에 가해지는 힘을 단계적으로 살펴보아야 한다. 문제에서 주어진 조건을 우선적으로 살펴 보면, $\rho_1 < \rho_0 < (\rho_1 + \rho_2)/2$이고, 각 항에 2를 곱한 후 ρ_1을 빼면 $\rho_1 < 2\rho_0 - \rho_1 < \rho_2$이다. $\rho_1 < \rho_0 < \rho_0 + \rho_0 - \rho_1 < \rho_2$이므로 이 조건으로부터 $\rho_1 < \rho_0 < \rho_2$임을 알 수 있고, 부력과 중력을 제외한 다른 힘은 없으므로, 마찰 등으로 인한 에너지 손실이 발생하지 않는 상황이다.

밀도가 ρ_0이고 수직 방향 단면적이 A인 물체가 [문제 4–1] 그림의 초기 위치에 놓여 있을 경우, 물체의 모든 부분이 물체보다 밀도가 낮은 영역에 있다. 제시문 (가)의 식을 사용하여 이때 받는 부력의 크기를 구하면 $\rho_1 Adg$이고 방향은 중력의 반대 방향이다. 중력의 크기는 물체의 부피, 밀도, 중력 가속도의 곱이므로 $\rho_0 Adg$이다. 문제의 조건에서 $\rho_1 \langle \rho_0$라고 하였으므로 중력이 부력보다 큰 상태임을 알 수 있다. 따라서 중력과 부력을 합한 알짜힘은 중력과 같은 방향, 즉 z축의 (–) 방향으로 작용하여 물체는 낙하하기 시작한다.

물체가 낙하하기 시작하면 물체의 일부분이 물체의 밀도보다 큰 영역에 존재하게 된다. 예를 들어 물체가 z축의 (−) 방향으로 x 만큼 낙하한 경우 물체에서 (d−x) 만큼의 두께는 여전히 밀도가 ρ_1인 영역에 있으나, x 만큼의 두께는 밀도가 ρ_2인 영역에 들어간다. $\rho_0 < \rho_2$이기 때문에 밀도가 ρ_2인 영역에 있는 물체의 일부분이 받는 부력은 동일한 부분이 받는 중력보다 크다. 이 상황에서 알짜힘 F는 '밀도가 ρ_1인 영역의 부력 + 밀도가 ρ_1인 영역의 부력 + 중력'이며, 그 식을 구해 보면 다음과 같다.

$$F = (d-x)A\rho_1 g + xA\rho_2 g - dA\rho_0 g = (\rho_2 - \rho_1)Agx - (\rho_0 - \rho_1)Agd$$

$$= -(\rho_2 - \rho_1)Agz - (\rho_0 - \rho_1)Agd$$

$$= -(\rho_2 - \rho_1)Ag\left[z + \frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}d\right]$$

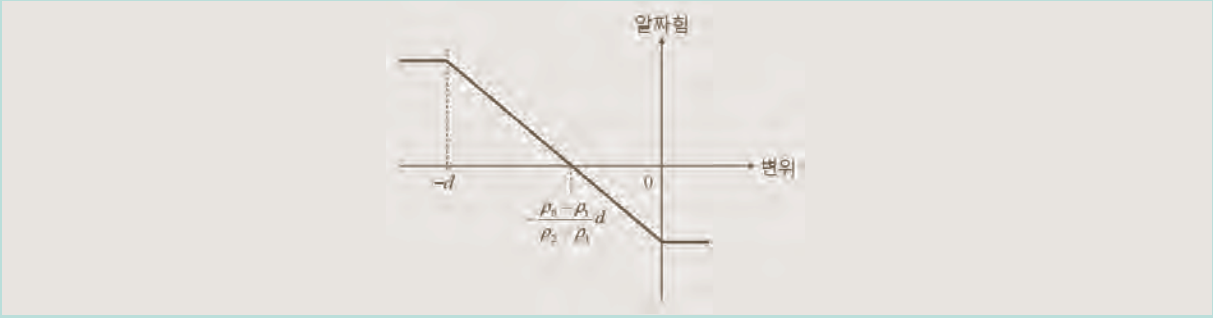
물체가 z축의 (−)방향으로 x만큼 낙하한 상황이므로 위 식에서 두 번째 줄은 z = −x 를 대입하였다. 위 식의 세 번째 줄에서 $k = (\rho_2 - \rho_1)Ag$, $S = (\rho_0 - \rho_1)d/(\rho_2 - \rho_1)$라고 놓으면 다음과 같이 단순화할 수 있다.

$$F = -k(z+S)$$

이 식은 제시문 (나)에 설명된 훅의 법칙이 적용되는 상황에서 탄성력의 식과 동일한 형태이며, 진동의 중심 지점이 z = 0에서 z = −S로 이동한 진동 운동을 나타낸다. 또한 z = −S에서 F = 0 이므로 이 진동 운동의 진폭은 S이다.

만일 물체의 낙하 거리가 물체의 두께 d를 초과하면, 물체는 밀도가 ρ_2인 영역에 완전히 들어가며, 물체가 받는 부력은 물체가 받는 중력보다 크다. 이 경우 물체에 가해지는 알짜힘은 물체의 위치와 무관하게 일정하며, 힘의 방향은 z축의 (+) 방향으로서 물체를 초기 위치로 되돌리는 방향의 힘이다.

설명된 사항을 고려하여 물체의 변위에 따라 물체에 가해지는 알짜힘의 그래프를 그려 보면 그 형태는 다음과 같다.



훅의 법칙이 적용되는 중간 영역에서만 진동 운동이 진행되는 경우 낙하하는 최대 변위는 진폭의 두 배인 −2S가 될 것이다. 문제에서 주어진 조건 $\rho_0 < (\rho_1 + \rho_2)/2$,의 양변에서 ρ_1을 뺀 후$(\rho_2 - \rho_1)$로 나누면 다음의 부등식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} < \frac{1}{2}$$

위 부등식에 의해 S 〈 d / 2이므로, 물체의 최대 변위는 −2S 〉 −d 가 되어, 물체는 훅의 법칙이 적용되는 중간 영역에서 진동 운동을 하게 됨을 알 수 있다. 진동 운동의 주기는 물체의 질량 m과 용수철 상수 k에 해당하는 수식을 제시문(나)의 식에 대입하면 구할 수 있다. 따라서 문제 풀이에는 다음과 같은 논리의 전개 과정 및 계산 과정이 포함되어야 한다.

- 유체 속의 물체에 가해지는 알짜힘은 부력과 중력의 합이다.
- 유체 속의 물체는 크기가 일정한 중력과 위치에 따라 달리지는 부력을 받는다.
- 물체의 변위에 따른 알짜힘을 구하면 훅의 법칙과 동일한 형태의 식을 얻는다.
- 문제의 조건으로부터 물체의 최대 운동 범위가 훅의 법칙이 적용되는 구간에 있음을 확인할 수 있다. 이상의 식에서 물체가 단진동 운동을 함을 증명한다.
- 물체의 질량과 용수철 상수에 해당하는 수식을 대입하여 진동 운동의 주기를 구한다.

4. 문항별 예시 답안 및 채점 기준

[문제 4–1 예시 답안]

물체의 부피를 V 라고 할 때, 부력은 $+z$ 방향이며, 크기는 $\rho_1 Vg$이다.

물체에 가해지는 알짜힘은 부력과 중력의 합으로 $\rho_1 Vg - \rho_0 Vg = -(\rho_0 - \rho_1)Vg$이다.

물체의 가속도는 알짜힘을 물체의 질량으로 나눈 값이므로 다음과 같다.

$$a = -\left(\frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_0}\right)g = -\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_0}\right)g$$

물체의 초기 속도가 0이고, 변위가 $-h$ 이므로 낙하에 소요되는 시간은 다음과 같다.

$$-h = \frac{1}{2}at^2, \quad t = \sqrt{\frac{-2h}{a}} = \sqrt{\frac{2h\rho_0}{(\rho_0 - \rho_1)g}}$$

[문제 4-1] 채점 기준

- 부력을 바르게 구하면 +2점.
- 물체에 가해지는 전체 힘(알짜힘)을 바르게 구하면 +3점.
- 알짜힘을 물체의 질량으로 나누어 가속도를 바르게 구하면 +2점.
- 낙하에 소요되는 시간을 바르게 구하면 +3점. (문제에 주어지지 않은 물체의 질량이나 부피 등으로 표현했으면 +1점만 부여).
- 힘의 방향에 따라 알짜힘, 가속도 등의 +/− 부호가 혼동되어 잘못 표기되었더라도, 크기가 맞으면 그 부분에 해당하는 점수를 모두 부여함.

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~2점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 10점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

[문제 4-2 예시 답안]

물체에 가해지는 힘의 합(알짜힘)은 부력과 중력의 합이다.

물체의 변위 z가 $-d<z<0$인 경우, 물체가 잠겨 있는 부분이 z에 따라 나누어 지며, 부력 $F_{부력}$은 물체의 부피를 V라고 하면 다음과 같다.

$$F_{부력}=\rho_1\frac{V}{d}(d+z)g-\rho_2\frac{V}{d}zg=\rho_1Vg+(\rho_1-\rho_2)\frac{V}{d}zg$$

물체에 가해지는 합력(알짜힘)은 부력과 중력을 합하여 다음과 같다.

$$F=F_{부력}+F_{중력}=\rho_1Vg+(\rho_1-\rho_2)\frac{V}{d}zg-\rho_0Vg=-(\rho_2-\rho_1)\frac{V}{d}g\left(z+\frac{\rho_0-\rho_1}{\rho_2-\rho_1}d\right)$$

이 힘은 $\frac{(\rho_2-\rho_1)Vg}{d}\equiv k$라고 할 때, 제시문 (나)에 주어진 스프링에 작용하는 $F=-kx$형태의 힘이며, 변위에 반대 방향으로 복원력이 작용하는 운동으로 주기 운동임을 알 수 있다. 진동의 중심은 $z=-\frac{\rho_0-\rho_1}{\rho_2-\rho_1}d$이며, 진폭은 $\frac{\rho_0-\rho_1}{\rho_2-\rho_1}d$이다.

물체가 많이 낙하하여 변위 z가 $-d>z$인 경우, 물체의 모든 부분이 밀도가 ρ_2인 영역에 있으므로, 부력 $F_{부력}$은 물체의 부피를 V라고 하면 다음과 같다.

$$F_{부력}=\rho_2Vg$$

이 경우 물체에 가해지는 합력(알짜힘)은 부력과 중력을 합하여 다음과 같이 (+)로 일정함을 알 수 있다.

$$F=F_{부력}+F_{중력}=(\rho_2-\rho_0)Vg$$

그런데, $-d<z<0$ 구간에서 진폭의 두 배를 계산하면, $\frac{2\rho_0-2\rho_1}{\rho_2-\rho_1}d$이며, 문제의 조건에서 $2\rho_0<\rho_2+\rho_1$이기 때문에,

$\frac{2\rho_0-2\rho_1}{\rho_2-\rho_1}d<\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_2-\rho_1}d=d$이다. 진폭의 두 배는 진동 운동에서 물체의 최대 변위 이므로, 이 물체의 운동은 $-d<z<0$

영역에만 한정되며, 용수철의 운동과 동일한 진동 운동임을 알 수 있다.

제시문에서 진동 운동의 주기 $T=2\pi\sqrt{m/k}$ 이므로, 대입하면 주기를 구할 수 있다.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\rho_0Vd}{(\rho_2-\rho_1)Vg}}=2\pi\sqrt{\frac{\rho_0d}{(\rho_2-\rho_1)g}}$$

[문제 4-2] 채점 기준

- 물체에 가해지는 합력(알짜힘)이 부력과 중력의 합이라고 표현하면 +3점.
- $-d<z<0$ 영역에서 변위에 따른 부력의 식을 바르게 구하면 +3점.
- $-d>z$ 영역에서 변위에 따른 부력의 식을 바르게 구하면 +2점.
- 각 영역에서 부력과 중력을 합하여 물체에 가해지는 알짜힘을 바르게 구하면 각각 +1점.
- $-d<z<0$ 영역에서 계산된 힘이 스프링에 작용하는 복원력과 동일한 형태임을 언급하면 +3점.
- 운동이 $-d<z<0$ 영역에만 국한됨을 지적하면 +2점.
- k와 질량을 대입하여 주기를 바르게 구하면 +5점.
- 변위의 +/− 부호가 혼동되었더라도, 크기가 맞으면 그 부분의 점수를 모두 부여함.

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~2점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 20점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

03_생명과학

중앙대학교 자연계열 논술 전형은 2014학년도까지 통합형으로 출제되어 왔으나 2015학년도부터 개별 교과형으로 변경되었다. 2016학년도 중앙대학교 자연계열 수시 논술 전형을 준비하는 학생들에게 도움이 될 수 있도록 기 시행되었던 생명과학 논술 시험 기출 문제의 제시문과 문항 설명, 예시 답안과 채점 기준을 자세히 설명하여 생명과학을 과학 선택 과목으로 고려하고 있는 학생들에게 올바른 준비 방향을 제시하려 한다. 제시문 분석과 배경지식 설명은 아래의 고등학교 교과서와 EBS 교재를 참고하였으며 모든 기출 및 예시 문항은 고교 교육과정의 범위를 벗어나지 않도록 유의하였다.

[참고도서]

생명과학 : 교학사 (권혁빈; 박희송), 천재교육
생명과학 I : 교학사, 상상아카데미, 천재교육
EBS 수능특강 과학탐구영역 생명과학I
EBS 수능특강 과학탐구영역 생명과학II
EBS 탐스런 생명과학I

2015학년도 모의 논술

문제 4

다음 제시문 (가)–(라)를 읽고 문항에 답하시오.

(가) 소화기관을 통한 3대 영양소의 소화과정은 다음과 같다. 입안의 침샘에서 분비되는 침의 pH는 약 5.0 정도이며 아밀레이스가 많이 포함되어 있어서 탄수화물을 엿당으로 분해한다. 위의 위샘에서 분비되는 위액의 pH는 약 2.0 정도이며, 위액에 의해 펩신이 활성화되어 단백질이 주로 분해된다. 소장으로 이동한 음식물은 소화액과 섞여서 pH 7.0 정도의 상태로 바뀌며 다양한 소화 효소 작용에 의해 3대 영양소가 모두 소화된다.

(나) 리소좀은 여러 가지 가수분해 효소가 들어 있는 소낭이다. 리소좀은 주로 골지체로부터 떨어져 나와 만들어진다. 리소좀 내의 효소들은 강산 또는 중성의 환경에서는 잘 작용하지 못한다. 만약 리소좀이 터지거나 열려서 효소들이 새어 나오면 빠져 나온 효소의 활성은 약화되는데, 그 이유는 세포질의 pH가 중성이기 때문이다.

(다) 핵은 세포에서 일어나는 모든 생명 활동의 중추로서, 세포의 물질 합성과 분비를 포함한 여러 가지 기능을 조절하고 유전형질을 결정한다. 인은 핵 내에서 뚜렷하게 관찰되는 구조로서 DNA에 있는 정보를 통해 리보솜 RNA(rRNA)가 합성되는 장소이다. rRNA는 핵에서 단백질과 결합하여 리보솜으로 조립된 후 핵공을 통해 세포질로 빠져 나가서 단백질 번역 과정에 참여한다.

(라) 분비 단백질은 거친면 소포체에 부착된 리보솜에서 만들어진 후 소포체 내로 들어가 3차원 형태로 접히게 된다. 형성된 단백질은 소낭막에 싸인 채 소포체에서 떨어져 나온 후 소포체 근처에 있는 골지면의 막과 융합되어 물질을 골지체로 전달한다.

[문제 4-1] 리소좀에 있는 효소를 성분으로 한 소화제를 만든다면 어느 단계의 소화 과정에서 가장 효과적으로 작용할 수 있을지를 제시문 (가)와 (나)에 근거하여 논리적으로 설명하시오. [10점]

[문제 4-2] 단백질 분비가 비정상적인 돌연변이 세포 I, II와 정상세포에, ^{32}P로 표지된 핵산과 ^{35}S로 표지된 아미노산을 일정 시간 공급한 후 새로운 배양 용액에 옮기고 나서 세포 소기관 별 방사능 검출 여부를 조사하여 아래 표에 정리하였다. 세포 소기관 A, B C, D의 종류와 각각의 돌연변이 세포에서 단백질 분비가 정상적으로 되지 않는 이유를 제시문 (다)와 (라)에 근거하여 구체적으로 설명하시오. (O : 방사능 다량 검출, △ : 방사능 소량 검출, X : 방사능 검출 안됨) [20점]

		세포 소기관			
		A	B	C	D
정상세포	^{32}P	X	O	O	X
	^{35}S	O	X	O	O
돌연변이 세포 I	^{32}P	X	O	△	X
	^{35}S	X	X	△	X
돌연변이 세포 II	^{32}P	X	O	O	X
	^{35}S	X	X	O	O

1. 논제의 분석

2015학년도 생명과학 모의 논술에 출제된 문항들은 '~을 제시문에 근거하여 논리적으로 설명하시오'의 형식으로 되어 있다. 이러한 형식은 다시 두 가지로 나눌 수 있는데 i)주어진 제시문 만을 분석하여 해답을 제시하도록 요구하는 경우와 ii)문제에 주어진 실험의 결과를 분석하여 해답을 제시해야 하는 경우가 있다. 이러한 형식의 문항들은 모두 '논리적 추론형'으로 분류할 수 있는 문항들로서 단순한 지식의 암기만으로는 해결하기 어려운 형태의 문항들이다. 이는 개별 교과형 출제가 시행되기 전 다년간 출제되었던 중앙대학교 논술 시험 방식인 통합형 논술과 유사한 형식을 갖는다. '논리적 추론형' 문항이 주어진 경우 다음과 같은 사항에 유의하여 답안을 작성해야 한다.

- 모든 제시문은 교과서와 EBS 교재에서 발췌한 것으로 학생들에게 익숙한 내용이지만, 답안을 작성할 때 제시문에 주어진 핵심 용어들과 개념을 사용해야 하기 때문에 본인의 사전 지식에 의존하여 답안을 작성하기 보다는 제시문에 주어진 사항들을 숙지한 후 문제 풀이를 시도해야 함.
- 문제에서 요구하는 답안이 무엇인지 정확히 파악하여 제시하여야 하며, 최종 답안만을 제시하는 것이 아니라 답을 얻기 위한 사고 전개 과정을 각 단계 별로 논리적으로 설명해야 함.

2. 제시문의 분석 및 배경지식

[제시문 (가)]

- **출전 :** EBS 수능특강 생명과학Ⅰ, 소화, 순환, 호흡, 배설과 에너지, p.106
- **배경지식**

  소화계의 작용 : 우리가 섭취한 음식물은 입, 위, 십이지장, 소장 등의 소화 기관을 거치면서 이동한다. 3대 영양소인 탄수화물, 단백질, 지방은 분자의 크기가 커서 세포막을 통과하지 못하므로 소화 과정을 거쳐 체내로 흡수될 수 있는 작은 분자로 분해되어야 한다. 소화는 큰 덩어리의 음식물을 작은 덩어리로 부수는 기계적 소화와, 소화 효소를 통해 영양소를 최종 산물로 분해시키는 화학적 소화로 나눌 수 있다. 탄수화물은 포도당, 과당, 갈락토스와 같은 단당류로, 단백질은 아미노산으로, 지방은 지방산과 모노글리세리드로 분해되어 흡수된다. 제시문에 설명된 바와 같이 각 소화 기관에는 다른 종류의 소화 효소들이 존재하고 있으며, 이 효소들은 각각의 기관이 가진 환경(pH 등)에서 최적의 활성을 가진다.

[제시문 (나)]

- **출전 :** 생명과학Ⅱ, 교학사, 박희송, 세포와 물질대사, p.28
- **배경지식**

  효소의 작용 : 효소는 생물체 내에서 물질을 분해하거나 합성하는 작용을 한다. 또한, 효소는 분자 내의 작용기를 떼어 다른 분자로 옮겨 주거나, 분자의 원자 구조를 바꿔 성질이 다른 물질로 변화시키는 등 다양한 기능을 한다. 효소를 이루는 단백질은 대부분 열과 pH에 의해 쉽게 입체 구조가 변한다. 입체 구조가 변하면 효소–기질 복합체의 형성이 어렵게 되고, 그 결과 반응 속도가 감소하거나 반응이 일어나지 않게 된다. 효소의 반응이 가장 잘 일어나는 온도와 pH가 있는데 이를 각각 최적 온도, 최적 pH라고 한다. 사람 몸에 존재하는 효소의 경우, 대개 최적 온도는 체온 정도이며, 최적 pH는 중성 부근이다. 그러나 위에서 작용하는 펩신의 경우는 위의 환경과 비슷한 pH2에서 활발히 작용한다.

[제시문 (다)–(라)]

- **출전 :** 생명과학Ⅱ, 교학사, 박희송, 세포와 물질대사, pp. 24~27
- **배경지식**

  세포 소기관의 구조와 기능: 대표적인 세포 소기관의 구조와 기능은 다음과 같다.

  - 핵 : 핵은 세포에서 일어나는 모든 생명 활동의 중추로서, 세포의 물질 합성과 분비를 포함한 여러 가지 기능을 조절하고 유전 형질을 결정한다. 핵은 핵막에 의해 세포질과 구분되는데, 핵막은 2중막이고, 핵공이라고 하는 작은 구멍들이 뚫려 있다. 핵공을 통해 RNA, 단백질, 그리고 고분자 물질이 출입할 수 있다. 핵 속에는 유전 물질인 DNA가 있다. 핵에 있는 유전 정보에 따라 mRNA가 합성되며 합성된 mRNA는 핵공을 통해 세포질로 이동된다. 세포질에 있던 리보솜이 이 mRNA의 유전 정보를 이용하여 아미노산을 결합시켜 단백질을 만든다.
  - 리보좀 : 리보좀은 rRNA와 단백질이 합쳐져 만들어진 것으로, 단백질을 합성하는 세포 소기관이다. 리보솜 중에는 세포질에 떠다니는 것과 소포체 막에 부착되어 있는 것이 있다. 세포질에 떠 있는 리보좀에서 합성된 단백질은 세포질 내에서 기능을 하며, 소포체 막에 붙어 있는 리보좀에서 합성된 단백질은 소포체 막에 삽입되거나 리소좀 내의 가수 분해 효소처럼 소기관 내에 포함되거나 세포로부터 외포 작용에 의해 분비된다.

- 소포체 : 소포체에는 구조와 기능이 다른 매끈면 소포체와 거친면 소포체가 있다. 매끈면 소포체는 바깥 표면에 리보솜이 없어서 매끄러워 보이며, 거친면 소포체는 막의 바깥 표면에 리보솜이 붙어 있어서 전자 현미경으로 보면 매우 거칠게 보인다. 매끈면 소포체에서는 인지질, 스테로이드 등의 지질이 합성된다. 거친면 소포체는 부착된 리보솜을 통해 분비 단백질을 만들 뿐만 아니라 막에 박힌 단백질을 만들기도 하고, 세포에 필요한 막을 만들기도 한다.
- 골지체 : 골지체는 생산, 저장, 분류 및 분비를 담당하는 기관이다. 소포체에서 온 생산물이 수정되거나 변화되어 최종적으로 어느 곳으로 갈 것인지 분류가 된다. 소포체에서 나온 수송낭은 소포체 근처에 있는 골지면의 막에 융합되어 물질을 골지체로 전달한다. 반대쪽 면에서는 소낭들이 성장한 후 떨어져 나가 다른 장소로 이동한다.

3. 문항별 분석 및 풀이 과정

[문제 4-1]

[문제 4-1]은 주요 소화 과정을 담당하는 효소와 그들의 활성에 관여하는 화학적 최적 조건을 설명하는 제시문 (가)와 리소좀 내에 존재하는 가수분해 효소의 활성 기전을 서술한 제시문 (나)의 내용을 통합적으로 이해하고 논리적으로 추론할 수 있는 능력을 평가하는 문제이다.

리소좀에 있는 효소를 이용하여 소화제를 만들려고 하면 먼저 이 효소가 작용할 수 있는 최적의 조건을 찾아야 한다. 제시문 (나)에서 리소좀에 있는 효소들은 강산 또는 중성 pH 환경에서 잘 작용하지 못한다는 정보를 찾을 수 있다. 제시문 (가)에 의하면 입 안은 pH 5.0정도의 약산성, 위는 pH 2.0정도의 강산성, 소장은 pH 7.0의 중성이라는 것을 알 수 있다. 제시문 (가)와 (나)의 내용을 종합해 보면 리소좀에 있는 효소는 위나 소장에서는 작용하기 어렵다는 것을 알 수 있다. 따라서 이 효소로 소화제를 만들게 되면 입 안에서 일어나는 소화 작용을 돕는 목적의 소화제가 될 것이라고 추론할 수 있다. 따라서 문제 풀이에는 다음과 같은 논리의 전개 과정이 포함되어야 한다.

- 각 소화 기관의 pH 환경이 다르다.
- 모든 효소는 최적 조건을 가지며 리소좀에 존재하는 효소는 강산 및 중성 pH 환경에서 잘 작용하지 못한다.
- 따라서 리소좀 효소는 강산, 중성이 아닌 입 안에서 가장 잘 작용할 것이다.

[문제 4-2]

[문제 4-2]는 문제에서 소개된 방사선 검출된 정도를 측정한 표를 가지고 실제 세포 안에서 일어나는 단백질의 분비 경로를 제시문 (다)와 (라)를 읽고 추론할 수 있어야 한다. 특히, 제시문 (다)에 설명된 리보솜은 핵산과 단백질로 구성되어 있으므로 ^{32}P 표지를 통해서 리보솜의 이동을 예측 가능하다는 것을 이해할 수 있어야 한다. 본 문제는 기존의 지식을 응용하여 실험 결과를 분석, 합리적인 결과를 도출해내는 능력을 평가하는 것으로서 통합적, 논리적 사고력을 평가하는 문제이다.

이 문제를 해결하기 위해서는 우선 제시문에 설명된 방사선 동위원소를 사용한 핵산과 단백질 추적법에 대한 기본적인 이해가 필요하다.

P는 핵산에는 존재하지만 단백질에는 존재하지 않는 구성 원소이며, S는 단백질에는 존재하지만 핵산에는 존재하지 않는 구성 원소이기 때문에 방사성 동위원소인 ^{32}P와 ^{35}S는 각각 세포에서 핵산(DNA, RNA)과 단백질의 합성과 이동을 분석하는 도구로 유용하게 사용될 수 있다.

A, B, C, D가 각각 어떤 소기관인지 알아내기 위해서는 먼저 정상세포의 A, B, C, D에서 ^{32}P와 ^{35}S의 검출 정도를 살펴봐야 한다. 특히 세포 소기관 중 핵산이 많이 발견되는 소기관이 어떤 것인지에 초점을 맞추면 ^{32}P 이 다량으로 검출되는 기관인 B와 C 중 하나는 핵, 나머지 하나는 리보솜이 존재하는 거친면 소포체 임을 유추할 수 있다. 제시문 (다)에서 리보솜은 핵산인 rRNA와 단백질이 결합하여 만들어 진다고 했으므로 ^{32}P와 ^{35}S가 모두 다량 검출되는 C가 거친면 소포체일 것이고, 그렇다면 ^{32}P만 다량 검출된 B는 핵이라고 유추할 수 있다.

A와 D가 어떤 소기관인지에 대한 정보는 돌연변이 세포 Ⅱ의 결과를 통해 얻을 수 있다. 제시문 (라)에서 핵과 소포체를 제외하고 남은 것은 소낭과 골지체인데, 돌연변이 세포 Ⅱ의 경우 소기관 D에서는 ^{35}S로 표지된 단백질이 검출되었지만 소기관 A에서는 검출되지 않았으므로, 분비 단백질의 이동 순서를 고려하면 소기관 D는 소포체에서 골지체로 단백질을 이동시켜주는 소낭이고 소기관 A는 골지체임을 알 수 있다.

이와 같이 A, B, C, D 각각이 어떤 소기관인지를 파악하고 나면 돌연변이 세포 Ⅰ, Ⅱ에서 어떤 문제가 발생했는지는 쉽게 추론할 수 있다. 돌연변이 세포 Ⅰ의 경우는 핵공이 작아지거나, 또는 리보솜의 수송 과정에 문제가 생기거나 하는 여러 가지 원인에 의해 리보솜이 핵에서 거친면 소포체로 이동하는 과정에 문제가 생긴 경우로 추론할 수 있다. 돌연변이 세포 Ⅱ의 경우는 거친면 소포체에서 골지체로의 이동에 문제가 생긴 경우로 추론하는 것이 논리적이다. 따라서 문제 풀이에는 다음과 같은 논리의 전개 과정이 포함되어야 한다.

- 정상세포의 A, B, C, D에서 ^{32}P와 ^{35}S의 검출 정도에 의거하여 B와 C 중에서 핵과 거친면 소포체를 구분해 내는 과정.
- 돌연변이 세포들을 비교하여 A와 D 중에서 골지체와 소낭을 구분해 내는 과정.
- 제시문에 근거하여 단백질 분비 과정 중 어떤 단계에 문제가 생겼는지 유추해 내는 과정.

4. 문항별 예시 답안 및 채점 기준

[문제 4-1] 예시 답안

제시문 (나)에서 리소좀의 가수분해 효소는 중성이나 강산성 환경에서는 잘 작용하지 못한다고 언급했고, 제시문 (나)에서 소개된 소화기관인 입, 위, 소장은 각각 약산, 강산, 중성의 환경이므로 리소좀에 존재하는 가수분해 효소는 위의 강산성 환경이나 소장의 중성 환경이 아닌, 입안의 약상성 환경에서 음식물 소화작용에 효과적으로 작용할 것이다.

채점 기준

- 각 소화기관의 pH환경이 약산성, 강산성, 중성 환경이라는 표현이 있으면 +5점
- 리소좀 효소는 입안에서 잘 작용할 것이라는 문장이 있으면 +5점

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~2점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 10점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

[문제 4-2] 예시 답안

- 제시문(다)에 근거하여 ^{32}P가 포함되어 있는 핵산은 rRNA이고 이는 리보솜을 구성하고 있으므로 세포 소기관 B, C는 리보솜이 존재하는 세포 소기관이다.
- 표에서 소기관 B는 ^{32}P만 검출되는 반면 소기관 C에서는 ^{32}P와 ^{35}S가 다 검출되므로, 소기관 B는 핵이고 소기관 C는 거친면 소포체이다.
- 돌연변이 세포 I의 경우 소기관 B에서 많이 검출된 ^{32}P가 소기관 C에서는 소량 검출되었으므로 핵공에 의한 리보좀의 이동이 저해되어 단백질의 합성 자체가 감소한 경우이다.
- 제시문(라)에 근거하여 소기관 A와 소기관 D는 소낭과 골지체인데, 돌연변이 세포 II의 경우 소기관 D에서는 ^{35}S로 표지된 단백질이 검출되었지만 소기관 A에서는 검출되지 않았으므로 소기관 D는 소포체에서 골지체로 단백질을 이동시켜주는 소낭이고 소기관 A는 골지체임을 알 수 있다.
- 따라서 돌연변이 세포 II는 소낭이 골지면과 융합되는 과정이 억제되는 돌연변이가 생긴 세포이다.

채점 기준

- ^{32}P의 이동 비교를 통해 B가 핵이고, C가 거친면 소포체임을 유추했으면 +5점
- 돌연변이 세포 I은 핵공을 통한 리보솜 이동에 이상이 생겨서 단백질 합성이 저해되어 분비가 안된다는 내용이 있으면 +5점
- ^{32}S의 이동 비교를 통해 A가 골지체이고, D가 소낭인 것을 유추했으면 +5점
- 돌연변이 세포 II는 소낭과 골지면의 융합에 문제가 있어서 단백질 분비가 안 된다는 내용이 있으면 +5점

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~3점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 20점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

2015학년도 수시 일반 논술 (자연계열)

문제 4

다음 제시문 (가)–(라)를 읽고 문항에 답하시오.

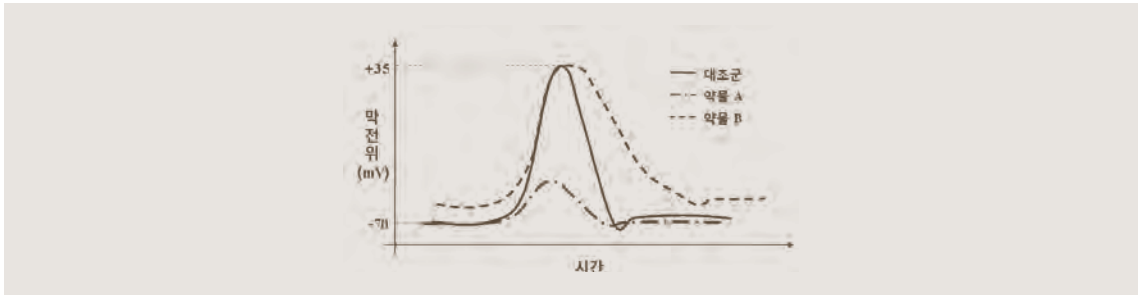
(가) 자극을 받지 않았을 때 신경세포(뉴런)의 세포막에 형성되어 있는 막전위를 측정해 보면 뉴런의 내부는 음(−)으로, 외부는 양(+)으로 대전되어 전위차가 나타난다. 이때 형성되는 세포막 내외의 전위차를 휴지 전위라고 한다. 사람의 경우 휴지 전위는 약 −70 mV이며, Na^+–K^+ 펌프와 Na^+ 통로 및 K^+ 통로에 의해 유지되고 있다. 세포 안팎의 농도 차에 따라 Na^+은 세포 내부로, K^+은 세포 외부로 확산되려고 하는데, 이온은 지질 성분의 세포막을 통과하지 못하므로 각각 Na^+ 통로와 K^+ 통로를 통해 세포 안팎으로 확산된다. 이때 Na^+ 통로에 비해 K^+ 통로가 열려 있는 것이 더 많아 Na^+에 비해 K^+의 투과도가 더 높다. 이 때문에 K^+이 세포 외부로 빠져나가고, 또 내부에 존재하는 단백질이 (−) 전하를 띠고 있기 때문에 뉴런 내부는 (−), 뉴런 외부는 (+)가 되며, 막 내외의 전위차가 −70 mV 정도가 되면 평형을 이루게 된다.

(나) 활동 전위는 뉴런의 막전위가 휴지 전위에서 시작하여 최대치로 올라갔다가, 다시 휴지 전위로 되돌아오는 신경 신호를 말한다. 활동 전위를 이루는 전기적 변화를 살펴보면, 충분히 강한 자극을 뉴런에 주면 일부 Na^+ 통로가 열려 세포 외부의 Na^+이 세포 내부로 확산되어 들어와 막전위가 역치 전위인 −50 mV까지 올라간다. 역치 전위에 이르면 더 많은 Na^+ 통로가 열리게 되며, 세포 외부의 Na^+이 세포 내부로 대량 확산되어 들어오게 되고, 이에 따라 이 부분의 막전위가 +35 mV로 역전된다. 막전위가 최고점에 이르면 세포막의 투과성이 변하고 Na^+ 통로가 닫혀 불활성화되며, K^+ 통로가 열려 K^+이 세포 밖으로 확산되어 나가게 된다. 이에 따라 막전위는 빠른 속도로 원래의 휴지 전위 이하로 떨어지는 재분극이 일어난다. 재분극 이후 세포막의 투과성이 원래대로 회복됨에 따라 Na^+–K^+ 펌프가 Na^+을 세포 밖으로, K^+을 세포 안으로 이동시켜 이온을 재배치함으로써 막전위는 휴지 전위 상태를 회복한다.

(다) 흥분이 축삭 돌기 말단에 도달하면 Ca^{2+}이 유입되면서 말단에 있는 시냅스 소포에서 아세틸콜린과 같은 신경 전달 물질이 시냅스 틈으로 분비된다. 신경 전달 물질은 시냅스 틈으로 확산되어, 다음 뉴런 또는 근육과 같은 흥분성 세포의 세포막에 있는 이온 통로가 열리게 한다. 충분한 양의 이온 통로가 열리면, 다음 뉴런의 세포막에서 탈분극이 일어나 흥분이 전달된다. 한편, 시냅스에서 흥분은 축삭 돌기에서 다음 뉴런의 가지 돌기나 세포체로만 전달되며 반대 방향으로는 전달되지 않는다. 그 이유는 신경 전달 물질을 분비하는 시냅스 소포가 축삭 돌기 말단에만 있기 때문이다.

(라) 운동 뉴런의 말단은 근육 섬유막과 시냅스처럼 좁은 틈을 두고 접해 있다. 흥분이 운동 뉴런을 따라 전도되어 축삭 돌기 말단에 도달하면 시냅스 소포에서 아세틸콜린이 분비되고, 아세틸콜린이 근육 섬유막으로 확산되면 근육 섬유막에 있는 아세틸콜린 수용체를 활성 시켜서 근육 섬유막이 탈분극됨으로써 활동 전위가 발생한다. 이 활동 전위가 근육 원섬유에 전달되면 근육 원섬유 마디가 짧아져 근육이 수축하게 된다. 근육 섬유는 역치 이상의 자극에서는 자극의 세기와 관계없이 반응의 크기가 항상 일정하다.

[문제 4-1] 다음 그래프는 뉴런에 약물 A와 약물 B를 각각 처리한 후, 자극이 주어졌을 때 막전위의 변화를 측정한 결과이다. 약물 A와 약물 B에 의해 막전위의 변화가 대조군과 다르게 나타난 이유를 제시문(가)와 (나)에 근거하여 논리적으로 설명하시오. 단, 대조군에는 약물을 처리하지 않았다. [10점]



[문제 4-2] 초파리 유전자 a, b, c가 신경 활성과 근육 수축에 미치는 영향을 알아보기 위해, 정상 초파리, 한 개의 유전자만 조작된 단일 돌연변이 초파리, 두 개의 유전자가 조작된 이중 돌연변이 초파리를 이용하여 실험을 수행하였다. 초파리의 운동 뉴런에서 활동 전위의 생성 여부와 근육의 수축 여부를 측정하여 〈표 1〉에 정리하였다. 추가로, 초파리의 근육에 아세틸콜린을 처리한 후, 근육의 수축 여부를 〈표 2〉에 정리하였다. 이 결과들을 종합하여 활동 전위 생성 및 근육 수축 과정에서 유전자 a, b, c로부터 발현되는 단백질의 역할을 제시문 (다)와 (라)에 근거하여 논리적으로 설명하시오. [20점]

〈표 1〉

	정상 개체	단일 돌연변이			이중 돌연변이	
		a	b	c	a, b	b, c
활동 전위 생성	O	X	O	O	X	O
근육 수축	O	X	X	X	X	X

O : 있음 X : 없음

〈표 2〉

	정상 개체	단일 돌연변이			이중 돌연변이	
		a	b	c	a, b	b, c
아세틸콜린 처리 후 근육 수축	O	O	O	X	O	X

O : 있음 X : 없음

1. 논제의 분석

2015학년도 생명과학 수시 논술 (자연계열)에 출제된 문항들은 이전에 출제되었던 모의 논술과 마찬가지로 '~을 제시문에 근거하여 논리적으로 설명하시오'의 형식으로 출제되었다. 두 문제 모두 주어진 실험의 결과를 분석하여 해답을 제시해야 하는 '논리적 추론형'으로 분류할 수 있는 문항들로서 제시문에 주어진 기본적인 내용을 응용하여 실험 결과를 논리적으로 해석해야만 답변할 수 있는 문항들이다. 이는 이전 모의 논술에 출제되었던 형식을 더욱 발전시킨 것이다. 모의 논술과 마찬가지로 다음과 같은 사항에 유의하여 답안을 작성해야 한다.

- 모든 제시문은 교과서와 EBS 교재에서 발췌한 것으로 학생들에게 익숙한 내용이지만, 답안을 작성할 때 제시문에 주어진 핵심 용어들과 개념을 사용해야 하기 때문에 본인의 사전 지식에 의존하여 문제를 풀이하기 보다는 제시문에 주어진 사항들을 숙지한 후 문제 풀이를 시도해야 함.
- 문제에서 요구한 답안뿐 아니라, 이를 얻기 위한 사고 전개 과정을 각 단계 별로 논리적으로 설명해야 함.

2. 제시문의 분석 및 배경 지식

[제시문 (가)]

- **출전 :** 생명과학I, 교학사, 권혁빈 외 공저, p.137, 휴지전위
- **배경 지식**

  휴지 전위 : 자극을 받고 있지 않은 신경세포(뉴런)는 안정 상태일 때 세포막의 안쪽이 상대적으로 음(−)전하를, 바깥쪽이 양(+)전하를 띠고 있다. 이러한 상태를 분극이라고 하고, 이때 나타나는 막전위를 휴지 전위라고 한다. 본 제시문은 신경세포의 휴지 전위가 유지되는 원인 즉, 분극이 일어나게 되는 기본 원리를 설명하고 있다. 휴지전위 형성에 가장 중요한 역할을 하는 요소는 Na^+–K^+ 펌프, Na^+ 통로, 그리고 K^+ 통로이다. Na^+–K^+ 펌프는 에너지(ATP)를 이용하여 Na^+를 세포 외부로 배출하고 K^+은 세포 내부로 유입시킨다. 이에 따라 세포 내부에는 K^+이 상대적으로 많이 존재하게 되고 외부에는 Na^+이 상대적으로 많이 존재하게 된다. 이 이온들은 농도 기울기에 따라 K^+은 세포 외부로 Na^+은 세포 내부로 확산하려고 한다. 하지만 세포막을 통해 이온이 이동하기 위해서는 각 이온에 대한 통로가 존재하고, 또 그 통로가 열려있어야만 한다. 아래 그림과 같이 뉴런의 휴지 상태에서는 K^+통로는 일부가 열려 있어 K^+은 막 바깥으로 확산될 수 있지만, Na^+통로는 닫혀 있어 Na^+은 막 안으로 확산되지 못해 세포막 안팎의 이온 분포가 불균등해진다. 또한, 제시문에 설명된 바와 같이 내부에 존재하는 단백질이 (−)전하를 띠고 있기 때문에 뉴런 내부는 (−), 뉴런 외부는 (+)가 되며, 막 내외의 전위차가 −70 mV 정도가 되면 평형을 이루게 된다.

[제시문 (나)]

- **출전 :** 생명과학I, 교학사, 권혁빈 외 공저, p.138, 활동 전위
- **배경 지식**

활동 전위 : 이 제시문에서는 뉴런의 활동 전위의 발생과 소멸(탈분극과 재분극)에 대하여 설명하고 있다. 활동 전위를 이해하기 위해서는 막전위의 변화에 따른 Na^+ 통로와 K^+ 통로의 투과성 변화를 올바로 이해하는 것이 중요하다. 휴지 상태에 있던 뉴런이 자극을 받으면 그 부위의 닫혀 있던 Na^+ 통로가 열리면서 Na^+에 대한 투과성이 증가하고 이에 따라 Na^+이 세포막 안쪽으로 이동하게 된다. 따라서 세포막 안쪽에 양이온 농도가 증가하게 되어 분극 상태에서 벗어나 세포 내부의 막전위가 상승하는 탈분극이 일어나게 된다. 탈분극이 역치 이상으로 진행되면서 세포막의 Na^+ 통로가 더 많이 열려 세포 외부에 많이 존재하고 있던 Na^+이 대량으로 유입된다. 양전하가 유입됨에 따라 세포 막 내부의 전위가 상승하게 되는 것이다. 탈분극이 진행되어 뉴런 세포막의 막전위가 최고점에 이르게 되면 Na^+통로는 불활성화되어 빠른 속도로 닫히게 되므로 Na^+에 대한 투과성은 급격히 감소한다. 이와 동시에 K^+ 통로가 열리면서 K^+에 대한 투과성이 증가하여 세포 내부에 많이 존재하던 K^+이 세포막 외부로 빠르게 이동하게 된다. 그 결과 막전위는 다시 낮아지게 되며, 이를 재분극이라고 한다. 막전위의 재분극에 관여하는 K^+통로는 휴지 전위의 형성에 중요한 역할을 하는 K^+통로와는 종류가 다른 것으로, 휴지 상태에는 닫혀 있다가 막전위가 탈분극되었을 때에만 열렸다가 재분극되면 다시 닫히는 특징을 지니고 있다. 활동 전위가 발생한 후에 재분극이 일어날 때 막전위의 변화를 자세히 관찰하면 막전위가 처음 휴지 전위 때 보다 조금 더 낮아졌다가 휴지 전위로 돌아오는 것을 발견할 수 있을 것이다. 이는 휴지 전위 때 열려 있는 K^+통로 이외에 재분극에 관여하는 K^+통로가 추가적으로 열려 있어 안정적인 휴지 전위 때보다 K^+의 투과성이 더 높기 때문에 발생하는 현상이다.

[제시문 (다)]

- **출전 :** 생명과학I, 교학사, 박희송 외 공저, p.160, 시냅스에서의 흥분 전달
- **배경 지식**

신경 전달 물질의 분비 : 하나의 뉴런에서 활동 전위가 발생하게 되면 흥분이 축삭 돌기를 거쳐 다음 뉴런의 가지 돌기로 전달되게 되는데 이를 시냅스를 통한 흥분의 전달이라고 한다. 대부분의 경우 뉴런과 뉴런은 직접 연결되어 있는 것이 아니라 시냅스라고 부르는 좁은 틈을 사이에 두고 맞닿아 있기 때문에 활동 전위와 같은 전기적 신호가 한 뉴런에서 다음 뉴런으로 직접 전달될 수가 없다. 따라서 뉴런은 다음 뉴런으로 흥분을 전달하기 위해 화학적 신경 전달 물질을 분비한다. 이 제시문에서는 축삭 돌기 말단에서 시냅스 틈으로 신경 전달 물질이 분비되는데 Ca^{2+}의 유입이 중요한 역할을 하는 것을 설명하고 있다.

시냅스를 통한 뉴런의 신호 전달 : 축삭 돌기 말단에 활동 전위가 도달하여 Ca^{2+}의 유입이 일어나고, 그 결과 신경 전달 물질이 시냅스 틈으로 분비되면, 다음 뉴런 또는 근육이 분비된 신경 전달 물질에 반응하여 흥분(탈분극)하게 된다. 이와 같이 한 뉴런의 흥분은 시냅스를 통해 다음 뉴런으로 전달되거나 근육 세포와 같은 표적 세포에 정보를 전달하게 된다.

[제시문 (라)]

- **출전 :** EBS 탐스런 생명과학I, 김진표 외 공저, p.143, 근수축의 원리
- **배경 지식**

  운동 뉴런에서 근육 섬유막으로의 자극 전달 : 이 제시문에서는 운동 뉴런의 활성이 어떻게 근육의 수축을 유도하는지 설명하고 있다. 제시문 (다)에서 설명한 바와 같이 뉴런은 신경 전달 물질을 분비하여 정보를 전달하는데 근육 세포와 맞닿아 있는 운동 뉴런은 아세틸콜린을 분비한다. 운동 뉴런과 맞닿아 있는 근육 섬유막 표면에는 아세틸콜린에 대한 수용체가 존재하는데 아세틸콜린이 이 수용체와 결합하면 수용체가 활성화되어 근육 섬유막이 탈분극된다. 이때 발생하는 활동 전위가 근육 원섬유에 전달되어 근육이 수축한다.

3. 문항별 분석 및 풀이 과정

[문제 4–1]

[문제 4–1]에서는 제시문을 읽고 Na^+통로가 활동 전위의 생성에 중요한 역할을 하고, K^+통로가 활동 전위의 소멸 단계에 관여함을 이해하는 능력과, 주어진 실험 결과를 바르게 해석하여 약물 A와 B가 각각 Na^+통로와 K^+통로에 작용하는 것을 논리적으로 추론할 수 있는지 평가하는 문제이다.

문제에 제시된 '자극이 주어졌을 때 막전위의 변화를 측정한 결과'는 곧 '활동 전위'를 말한다. 대조군의 그래프는 전형적인 활동 전위의 모습으로 제시문(나)에서 활동 전위의 생성과 소멸 원리가 설명되어 있다. 제시문(나)에 의하면 막전위가 역치 전위 이상으로 상승하면 Na^+통로가 열려 막전위가 빠르게 상승해야 활동 전위가 생성된다. 우선 약물 A를 처리했을 때를 대조군과 비교해 보면 휴지 전위에는 변화가 없고 막전위가 상승하다가 정상적인 활동 전위가 생성되지 못하고 다시 재분극되는 것을 알 수 있다. 따라서 약물 A는 Na^+통로가 열리는 것을 막거나 활성을 저해하는 기능을 한다고 추론할 수 있다.

약물 B를 처리했을 때는 두 가지 변화가 나타나고 있다. 첫 번째는 활동 전위가 발생한 후에 재분극이 천천히 일어나 활동 전위가 대조군에 비해서 긴 시간 지속되고 있고, 두 번째는 휴지 전위가 대조군에 비해 상승해 있다. 제시문(나)에 의하면 활동 전위의 소멸 즉, 재분극이 일어나기 위해서는 K^+통로가 열려 K^+이 세포막 바깥으로 이동해야 한다. 따라서 약물 B는 K^+통로가 열리는 것을 막거나 활성을 저해하는 역할을 한다고 추론할 수 있다. 휴지 상태에서는 일정한 수의 K^+통로가 열려 있어 K^+이 세포막 밖으로 이동하여 휴지 전위가 음의 값을 가지게 되는데 만약 열려 있는 K^+통로의 수가 줄어 들거나 K^+통로의 활성이 줄어들게 되면 휴지 전위는 상승하게 될 것이다. 문제 풀이에는 다음과 같은 논리의 전개 과정이 포함되어야 한다.

- 약물 A를 처리하면 활동 전위가 발생하지 않는 것을 통해 약물 A는 Na^+통로를 통한 Na^+의 세포막 안쪽으로의 유입을 억제하여 막전위의 상승과 그에 따른 활동 전위 발생을 억제하는 기능을 함을 추론하는 과정.
- 약물 B를 처리하면 활동 전위의 재분극이 느리게 나타나고, 휴지막 전위가 상승하는 것을 통해 약물 B는 K^+통로를 통한 K^+의 세포막 밖으로의 유출을 억제하는 기능을 한다고 추론하는 과정.

[문제 4-2]

[문제 4-2]에서는 제시문 (다)와 (라)를 읽고 근육 수축이 일어 날 때 운동 뉴런에서 일어나는 신경 전달 물질의 분비와 이에 의한 근육 섬유막의 수용체 활성화 과정을 바르게 이해하고 있는지 평가하고자 하였다. 근육 수축의 각 과정에 관여하는 유전자들에 돌연변이가 일어난 초파리를 이용한 실험 결과를 바르게 해석하고, 제시문의 내용과 통합하여 논리적으로 설명할 수 있는지 평가하는 문제이다.

근육 수축이 정상적으로 일어나기 위해서는 i) 운동 뉴런에서 활동 전위가 발생하여 ii) 운동 뉴런 축삭 말단에서 아세틸콜린이 분비되고, iii) 분비된 아세틸콜린이 근육 섬유막에 존재하는 아세틸콜린 수용체에 결합하여 근육 섬유막에 활동 전위를 발생시키고, iv) 섬유막에서 발생한 활동 전위가 근육 원섬유에 전달되는 과정이 모두 성공적으로 일어나야 한다. 이 순서에 따라 〈표〉에 제시된 유전자들의 기능을 유추해 볼 수 있다. 먼저 단일 돌연변이에 대한 실험 결과를 분석하여 근 수축의 어떤 단계에 문제가 생겼는지를 파악한다. 한 가지로 결론이 내려지지 않는 경우는 이중 돌연변이의 실험 결과를 살펴보면 각 유전자들이 어떤 단계에 관여하고 있는지 논리적으로 추론할 수 있다. 실제 초파리에는 각 단계에 관여하는 많은 종류의 유전자들이 있지만 문제에서는 특정 유전자나 단백질이 아니라 그들의 기능을 묻고 있기 때문에 답안 작성에 필요한 모든 정보들은 제시문에서 찾을 수 있다. 문제 풀이에는 다음과 같은 논리의 전개 과정이 포함되어야 한다.

- 유전자 a, b, c가 암호화하는 단백질이 운동 신경과 근 섬유막 중 어디에 발현되는 지를 추론하는 과정.
- 제시문과 실험 결과에 근거하여 각 단백질이 근 수축 과정 중 어디에 관여하는 지를 추론하는 과정.

4. 문항별 예시 답안 및 채점 기준

[문제 4-1] 예시 답안

- 제시문 (나)에 근거하여 신경세포의 활동 전위는 Na^+ 통로가 열려 막전위가 상승하면서 일어나는데, 약물 A를 처리한 신경세포는 막전위가 상승하는 정도가 대조군에 비해 부족하여 활동 전위가 거의 생성되지 않았으므로 약물 A는 Na^+ 통로가 열리는 것을 막거나 활성을 저해하는 역할을 한다.
- 약물 B를 처리한 세포는 휴지 전위가 대조군에 비하여 올라가 있고 활동 전위가 원상태로 돌아가는 재분극에도 시간이 더 오래 걸리는 양상을 가지고 있다. 제시문 (가)에 의하면 휴지 전위 생성은 K^+의 투과성에 의하여 결정되고 제시문 (나)에 의하면 활동 전위의 재분극도 K^+이 세포막 외부로 이동할 때 일어나므로 약물 B는 K^+통로가 열리는 것을 막거나 활성을 저해하는 역할을 한다는 것을 알 수 있다.

※ 이외에 제시문 (나)에 근거하여 약물 B가 Na^+통로가 다시 닫히는 것을 저해하여 막전위의 재분극이 천천히 일어나게 한다고 유추할 수도 있으나 이 경우 대조군에 비해 휴지 전위가 상승한 것을 설명할 수 없으므로 올바른 답안이라고 보기는 어렵다.

채점 기준

- 활동 전위와 Na^+ 또는 Na^+통로와의 상관 관계에 대한 표현이 있으면 +2점
- 약물 A가 Na^+통로 활성 저해제라는 표현이 있으면 +3점
- 휴지 전위 및 재분극과 K^+ 또는 K^+통로와의 관계에 대한 표현이 있으면 +2점
- 약물 B가 K^+통로 활성 저해제라는 표현이 있으면 +3점

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~2점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 10점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

[문제 4-2] 예시 답안

- a 유전자 돌연변이에서는 운동 신경의 활동 전위와 근 수축이 일어나지 않았지만, 아세틸콜린에 대한 근 수축 반응은 정상적으로 일어났으므로 a 유전자는 신경 세포에서 활동 전위 생성에 관여하는 단백질(예를 들면 Na^+통로)이다.
- b 유전자 돌연변이는 활동 전위는 생성되나 근 수축은 일어나지 않았으므로 이렇게 될 수 있는 가능성을 제시문 (다)와 (라)에서 유추하면 1) 축삭 돌기 말단에서 Ca^{2+}의 유입 이상에 의한 아세틸콜린 분비가 안되거나 2) 축삭 돌기 말단에서 아세틸 콜린의 분비 이상, 또는 3) 근육 섬유막에서 아세틸콜린 수용체가 이상해서 활동전위가 안 생길 수 있을 가능성이 있다. 그런데, 〈표 1〉에서 b, c 유전자 이중 돌연변이는 활동 전위는 생겼으나 자체적인 근 수축은 일어나지 않은 반면, 〈표 2〉에서 아세틸콜린을 첨가하면 근 수축은 정상적으로 일어났으므로 신경 세포에서 아세틸콜린 분비가 잘 되지 않는 돌연변이이고, 제시문 (다)에 근거하여 유전자 b는 Ca^{2+} 유입에 관여하는 이온 통로 또는 아세틸콜린 분비에 관여하는 유전자이다.
- 마지막으로 c 유전자 돌연변이는 활동 전위 생성에는 문제가 없으나 근 수축이 일어나지 않고, 아세틸콜린을 첨가해도 근 수축이 일어나지 않으므로 제시문 (라)에 근거하여 근육 세포에서 아세틸콜린 수용체의 이상으로 근 수축이 일어나지 않는 것으로 유추할 수 있다. 그러므로 유전자 c 는 근 세포막의 아세틸콜린 수용체이다.

채점 기준

- 결과 1과 2를 분석해서 a 유전자에 대한 유추를 논리적으로 했으며 답이 맞았을 경우 +5점
- a 유전자에 대한 답은 맞았으나 설명이 틀렸으면 부분점수 +1~2점
- 결과 1과 2를 분석해서 b 유전자에 대한 유추를 논리적 설명했으며, 답이 맞았을 경우 +10점 (Ca2+ 유입 또는 아세틸콜린 분비 둘 중 하나만 썼으면 +5점)
- b 유전자에 대한 답은 맞혔으나 설명이 틀렸으면 부분 점수 +3~5점
- 결과 1과 2를 분석해서 c 유전자에 대한 유추를 논리적으로 했으며 답이 맞았을 경우 +5점
- b 유전자에 대한 답은 맞혔으나 설명이 틀렸으면 부분 점수 +1~2점
- 답과 설명이 다 틀리면 0점

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 2~3점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 20점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

04_화학

2015학년도부터 논술 전형이 개별 교과형으로 변경됨에 따라 과학 선택 교과목의 하나인 화학 논술 시험이 2015학년도 모의 논술, 2015학년도 수시 일반 논술 자연계열/의학부, 자연계열II 등 3회 출제되었다. 이하에서는 기 시행되었던 화학 논술 시험의 제시문과 문항 설명, 예시 답안과 채점 기준을 통해, 과학 선택으로 화학을 고려하고 있는 학생들에게 올바른 준비 방향을 제시하려 한다. 제시문의 분석과 배경 지식 설명은 아래의 고등학교 교과서와 EBS 교재를 참고하였으며 모든 기출 및 예시 문항들은 고교 교육의 범위를 벗어나지 않도록 유의하였다.

[참고도서]

화학 I : 교학사, 비상교육, 상상아카데미, 천재교육
화학 II : 교학사, 비상교육, 상상아카데미
EBS 탐스런 화학 I
EBS 탐스런 화학 II

2015학년도 모의 논술

문제 4

다음 제시문 (가)–(다)를 읽고 문항에 답하시오.

(가) 루이스는 화학결합을 나타내기 위해서 원자들의 원자가 전자를 점으로 나타내는 방법을 이용하였는데, 이것을 루이스 전자점식이라고 한다. 원자의 최외각 전자 껍질에 존재하는 원자가 전자 중에서 쌍을 이루지 않는 전자를 홀전자라고 하는데, 원자들이 공유 결합을 할 때에는 홀전자들이 전자쌍을 이루어 공유 전자쌍을 만든다. 공유 결합을 가지는 원자는 다른 원자들과 전자를 공유함으로써 비활성 기체와 같이 안정된 전자 배치를 이루면서 옥텟 규칙을 만족시킨다.

(나) 1940년 시지윅은 공유 결합으로 형성된 분자에서 중심원자를 둘러싸고 있는 전자쌍들은 그들 사이의 반발력 때문에 가능한 한 서로 멀리 떨어져 있으려고 한다는 전자쌍 반발 원리를 제안하였다. 루이스 전자점식과 전자쌍 반발 원리를 적용하면 공유 결합 화합물의 분자 구조를 예측할 수 있다.

(다) 화학 반응에서 산소가 관여하는 반응을 산화–환원 반응이라고 하는데, 이때 산소를 얻는 반응은 산화 반응이라고 하고 산소를 잃는 반응을 환원 반응이라고 한다. 산소가 관여하지 않는 산화–환원 반응도 존재하는데 이 경우 전자의 이동으로 산화–환원 반응을 설명할 수 있다. 즉, 어떤 물질이 전자를 잃는 반응을 산화 반응이라 하고, 전자를 얻는 반응을 환원 반응이라고도 한다.

(라) 여러 가지 산화–환원 반응을 모두 설명하기 위하여 산화수를 사용한다. 산화수는 어떤 물질 속에서 원소가 어느 정도로 산화되었는지를 나타내는 가상적인 전하량이다. 공유 결합 화합물에서 산화수는 전기 음성도가 큰 원자가 공유 전자쌍을 모두 차지했다고 가정할 때 각 원자가 가지는 전하수로 나타낸다. 산화 반응에서는 산화수가 증가하고 환원 반응에서는 산화수가 감소한다.

[문제 4–1] 웃음 가스로 알려진 아산화 질소[$N_2O(g)$]는 주로 질산암모늄[$NH_4NO_3(s)$]을 분해시켜서 만든다. 질산암모늄[$NH_4NO_3(s)$]과 아산화 질소[$N_2O(g)$]의 루이스 전자점식을 각각 한 개씩만 제시하고 각 전자점식에 해당하는 구조를 예측하시오. [10점]

[문제 4–2] 산화수 규칙에 의하면 아산화 질소[$N_2O(g)$]의 질소 원자는 '+1', 산소 원자는 '–2'의 산화수를 갖는다. 제시문 (가)와 (라)에 근거하여 질산암모늄[$NH_4NO_3(s)$]을 구성하는 각 원자의 산화수를 구하고, 아래의 산화–환원 반응에서 산화되는 원소와 환원되는 원소의 산화수 변화를 논리적으로 설명하시오.
단, 전기 음성도 세기는 O 〉 N 〉 H 이다. [20점]

$$NH_4NO_3(s) \rightarrow 2H_2O(g) + N_2O(g)$$

1. 논제의 분석

2015학년도 화학 모의 논술에 출제된 문항들은 'XX를 예측하시오' 혹은 'XX를 논리적으로 설명하시오'의 형식으로 되어 있다. 이러한 형식의 문항들은 '설명 및 정답 요구형'으로 분류할 수 있는 문항들로서 개별 교과형 출제가 시행되기 전 다년간 출제되었던 중앙대학교 논술 시험 방식인 통합형 논술과 동일한 형식을 갖는다. '설명 및 정답 요구형' 문항이 주어진 경우 다음과 같은 사항에 유의하여 답안을 작성해야 한다.

- 제시문에 주어진 사항들을 우선적으로 숙지한 후 문제 풀이를 시도해야 함.
- 답안을 얻기 위한 사고 진행 과정을 각 단계 별로 설명해야 함.
- 풀이 과정이 수리적 계산인 경우 설명에 반드시 수식이 제시되어야 함.
- 'XX를 논리적으로 설명하시오'의 XX에 해당하는 답안이 최종적으로 제시되어야 함.

2. 제시문의 분석 및 배경지식

[제시문 (가)]

- **출전** : 고등학교 화학I, 단원 3 아름다운 분자 세계 (천재교육, p.142)
- **배경지식**

원자들이 서로 전자를 내어 전자쌍을 만들고 이 전자쌍을 공유함으로써 형성되는 공유 결합은 분자를 구성하는 각 원자들이 비활성 기체의 전자 배치와 같이 가장 바깥 껍질에 8개의 전자를 가져 안정화 되려는 옥텟 규칙으로 설명할 수 있다. 이러한 전자 배치를 쉽게 나타내기 위하여 전자를 점으로 표시한 루이스 전자점식을 이용한다.

루이스 전자점식을 나타내는 방법

❶ 모든 원자들의 원자가 전자수를 더한다. 원자가 전자수는 주기율표에서 각 원소가 속하는 족 번호의 일의 자리 숫자와 같다. 만약 음이온이라면 음의 전하수의 절댓값만큼 더하고, 양이온이라면 양의 전하수만큼 빼준다.
❷ 중심원자를 결정하고 주위에 바깥 원자들은 배치한다. 수소(H)는 항상 바깥에 배치되고 전기 음성도가 작은 원자들이 중심에 위치한다.
❸ 중심원자와 바깥 원자들을 하나의 공유 전자쌍으로 연결한다.
❹ 모든 원자들이 옥텟규칙을 만족하도록 전자를 배치한다.
❺ 전체 원자가 전자수에서 사용한 전자수를 빼서 부족한 전자의 수를 구한다.
❻ 전자가 부족한 경우 이웃한 두 쌍의 비공유 전자쌍을 공유하여 다중결합을 만든다.
❼ 전자가 남지 않았으면 모든 원자가 옥텟규칙을 만족하는지 검토한다. 만약 옥텟규칙을 만족하지 않으면 옥텟규칙을 만족시키기 위해 다중결합이 되도록 한다.

[제시문 (나)]

- **출전** : 고등학교 화학I, 단원 3 아름다운 분자 세계(비상교육, p.136)
- **배경지식**

공유 결합으로 이루어진 분자에서 중심 원자는 공유 결합 전자쌍이나 비공유 결합 전자쌍에 의해 둘러싸여 있고 중심 원자 주변의 공유 결합 전자쌍과 비공유 전자쌍의 개수를 파악하여 아래의 표와 같이 분자의 구조를 예측할 수 있다.

전자쌍 개수			기하학적 구조
공유 전자쌍	비공유 전자쌍	전체	
2	0	2	직선형
3	0	3	평면 삼각형
4	0	4	정사면체형
3	1	4	삼각뿔형
2	2	4	굽은형

[제시문 (다)]

- **출전** : 고등학교 화학I, 단원 4 닮은꼴 화학 반응 (비상교육, p.192–199)
- **배경지식**

석유나 석탄의 연소, 철의 부식, 전기 분해 등은 서로 관련이 없는 화학 반응인 것처럼 보인다. 그러나 이들은 모두 산화와 환원 반응으로 분류하고 설명할 수 있다. 이러한 산화 환원 반응은 산소(O)와 수소(H)가 관여하거나 전자를 주고 받는 화학 반응으로 분류될 수 있다. 우선 산소(O)가 관여하는 반응의 경우는 어떤 물질이 산소(O)와 화합하는 반응을 산화라고 하고, 반대로 산소(O)를 잃는 반응을 환원이라고 한다. 수소(H)가 관여하는 반응의 경우는 어떤 물질이 수소(H)와 화합하는 반응을 환원이라 하고, 반대로 수소(H)를 잃는 반응을 산화라고 한다.

과거에는 산화 환원 반응을 위와 같이 산소(O) 혹은 수소(H)와 관계 있는 반응 만으로 생각하였다. 그러나 산소(O)와 관계 없이 일어나는 산화 환원 반응이 많다는 것이 알려졌다. 특히 이온 결합물을 생성하는 금속 원소와 비금속 원소의 반응은 산소(O) 혹은 수소(H)와 관계 없이 전자의 흐름으로 산화 환원 반응을 구별할 수 있다. 산화 반응에서 물질은 전자를 잃고, 환원 반응에서는 물질이 전자를 얻는다. 산화와 환원은 동시에 진행되며, 이 과정에서 산화된 물질이 잃은 전체 전자수와 환원된 물질이 얻은 전체 전자수는 동일하다.

[제시문 (라)]

- **출전** : 고등학교 화학II, 단원 3 화학 평형(교학사, pp.198–199)
- **배경지식**

산화수는 물질 내에서 전자의 교환이 완전히 일어났다고 가정하였을 때 특정 원자가 이론적으로 갖게 되는 전하를 말하며, 물질을 구성하는 원소의 상대적 산화 상태를 숫자로 나타낸 것이다. 일반적을 원자나 이온의 산화수를 정하는 규칙은 다음과 같다.

❶ 원소를 구성하는 원자의 산화수는 0이다. 예) $H_2(g)$, $O_2(g)$, $O_3(g)$, Na(s), Hg(l) 등.
❷ 단원자 이온의 산화수는 그 이온의 전하와 같다. 예) Na^+은 산화수가 +1이고 Cl^-은 산화수가 −1이다.
❸ 화합물에서 1족 원소(알칼리 금속)의 산화수는(수소 제외) +1이고, 2족 원소(알칼리 토금속)의 산화수는 +2이다. 알루미늄(Al)은 모든 화합물에서 산화수가 +3이며, 플루오린(F)의 경우 항상 −1이다.
❹ 수소(H)의 산화수는 금속과 이온성 화합물을 이룰 때를 제외하고는 +1이며, 대부분의 화합물에서 산소(O)의 산화수는 −2이다. 수소(H)가 금속과 이온성 화합물을 이룰 때의 산화수는 −1이다.
❺ 중성 분자(혹은 화합물)에서 원자들의 산화수의 합은 0이다. 또한, 다원자 이온에서 원자들의 산화수의 합은 다원자 이온의 전하와 같다.

탄소 화합물과 같이 여러 비금속 원소들이 공유결합으로 이루어진 화합물에서는 산화수 규칙을 이용하여 구성 원자 각각의 산화수를 결정하는 것이 곤란한 경우가 많다. 이런 경우에는 전기 음성도를 이용하여 구성 원자 각각의 산화수를 결정하는 것이 편리하다. 기본 원리는 분자의 루이스 전자점식에서 공유 결합을 이루는 결합 전자쌍을 전기 음성도가 큰 원소가 모두 소유한다고 가정하고, 중성 원자 상태와 전자수를 비교하여 산화수를 정한다.

3. 문항별 분석 및 풀이 과정

[문제 4-1]

고등학교 화학Ⅰ 교과 과정은 주로 화학의 기본적인 언어를 습득하는 것에 주 목적을 두고 있다. 화학의 기본적인 언어 중에서 루이스 전자점식은 화학 결합의 생성 원리 및 원자가 전자의 배치, 분자의 구조 예측 등 화학 전분야에 걸쳐서 이용되는 화학의 필수적인 기본 언어이다. 문제 4-1은 제시문 (가)에 주어진 지식을 이용하여 루이스 전자점식을 정확히 그릴 수 있어야 한다. 또한, 제시문 (나)에 주어진 전자쌍 반발 원리를 이용하여 루이스 전자점식에서 공유결합 분자의 구조를 예측할 수 있는 지를 평가한다.

- 제시문 (가)에 근거하여 가능한 질산암모늄[$NH_4NO_3(s)$]과 아산화 질소[$N_2O(g)$]의 루이스 전자점식을 구하는 과정은 다음과 같다.

  질산암모늄[$NH_4NO_3(s)$]은 질산 음이온 (NO_3^-)과 암모늄 양이온 (NH_4^+)으로 이루어진 이온결합 화합물이다. 그러나 각 이온들은 모두 다원자 이온으로서 이온을 구성하는 원자 사이에 공유 결합과 배위결합을 이루고 있어서 하나의 단위인 것처럼 행동한다. 암모늄 이온(NH_4^+)과 같은 다원자 이온의 루이스 구조식을 그릴 때는 다원자 이온의 전체 전하를 표시하기 위하여 루이스 구조식에 대괄호를 씌우고 전하에 대한 기호를 표시한다.

  질산 음이온(NO_3^-)과 암모늄 양이온(NH_4^+) 및 아산화 질소[$N_2O(g)$]의 루이스 점자점식을 구하는 과정은 다음과 같다.

  ❶ 암모늄 양이온(NH_4^+)의 원자가 전자수의 합 : 5(N) + 4x1(H) −1 (1가 양이온) = 8

  질산 음이온(NO_3^-)의 원자가 전자수의 합 : 5(N) + 3x6(O) + 1(1가 음이온) = 24

  아산화 질소[$N_2O(g)$]의 원자가 전자수의 합 : 2x5(N) + 6(O) = 16

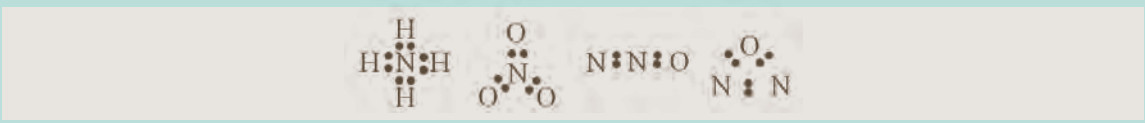
  ❷ 규칙에 따라 원자들을 배치한다.

  암모늄 양이온(NH_4^+) : 질소(N) 주위에 수소(H)를 배치함.

  질산 음이온(NO_3^-) : 전기음성도가 작은 질소(N)를 중심으로 주변에 산소(O) 원자를 배치한다.

  아산화 질소[$N_2O(g)$] : 다양한 원자의 배열이 가능하다. 우선 세 원자를 직선형으로 배치하는 경우에는 중심에 전기 음성도가 작은 질소를 배치하여 N N O 와 같은 배열을 유지한다. 다른 경우는 세 원자들을 삼각형으로 배치할 수 있다.

  ❸ 아래의 그림과 같이 중심 원자와 바깥 원자들을 하나의 공유 전자쌍으로 연결한다.



  ❹ 바깥 원자들이 옥텟규칙을 만족하도록 전자를 배치한다.



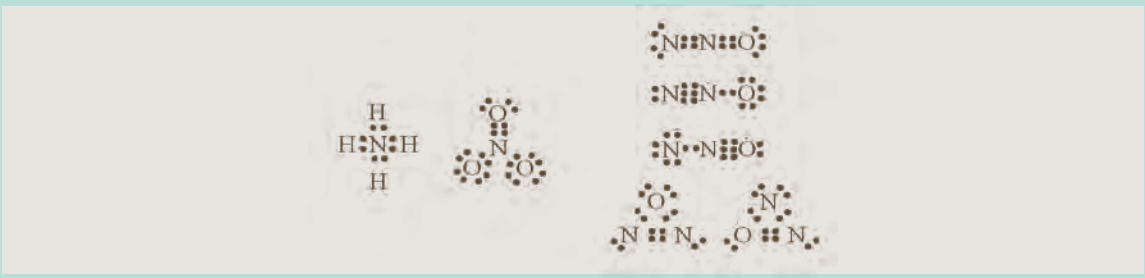
  ❺ 전체 원자가 전자수에서 사용한 전자수를 빼서 남은 전자수를 구한다.

  암모늄 양이온(NH_4^+) : 8 − 8 = 0

  질산 음이온(NO_3^-) : 24 − 26 = −2

  아산화 질소[$N_2O(g)$] : 16 − 20 = −4, 16 − 18 = −2

❻ 암모늄 양이온(NH_4^+)은 부족한 전자수가 없으므로 모든 원자들이 옥텟규칙을 만족하는 전자 배치를 이루고 있다. 질산 음이온(NO_3^-)은 2개의 전자가 부족하므로 이웃하는 산소(O)와 질소(N)의 비공유 전자쌍 2쌍을 공유하여 하나의 공유 전자쌍으로 만든다. 아산화 질소[$N_2O(g)$]의 경우는 아래의 그림과 같이 다양한 방법으로 비공유 전자쌍을 공유하여 부족한 4개 혹은 2개의 전자를 보충함으로써 각 원자들이 옥텟규칙을 만족하게 할 수 있다.



❼ 모든 원자들이 옥텟규칙을 만족하는지 확인한다.

❽ 다원자 이온의 경우 대괄호를 이용하여 전체 전하를 표시한다. 필요에 따라서 각 원자의 형식 전하를 루이스 전자점식을 이용하여 구할 수도 있고 아래의 그림과 같이 전체 전하와 구별하기 위하여 각 원자 위에 형식 전하를 표시한다.



- 제시문 (나)의 전자쌍 반발 이론을 이용하면 질산암모늄[$NH_4NO_3(s)$]의 암모늄 양이온(NH_4^+)과 질산 음이온(NO_3^-) 및 아산화 질소[$N_2O(g)$]의 구조를 예측할 수 있다. 각 물질들의 루이스 전자점식을 바탕으로 중심원자를 둘러싸고 있는 비공유 전자쌍과 공유 전자쌍의 개수를 파악하여야 한다.

  암모늄 양이온(NH_4^+)은 중심의 질소(N) 원자 주변에 4개의 공유 전자쌍이 배치되어 있다. 네 개의 공유 전자쌍들이 반발하여 서로 가장 먼 거리에 위치하려고 하므로 정사면체 구조를 가지게 된다.

  질산 음이온(NO_3^-)도 네 개의 공유 전자쌍을 가지지만 전자쌍 반발 이론에서는 다중 결합에 의한 공유 전자쌍은 고려하지 않는다. 즉 질소(N)를 3개의 공유 전자쌍이 둘러싸고 있다고 생각한다. 3개의 공유 전자쌍이 공간상에서 반발력에 의해서 서로 가장 멀어지기 위한 구조는 평면 삼각형의 각 꼭짓점에 공유전자쌍을 하나씩 배치하는 것이다. 따라서 질산이온은 평면 삼각형 구조를 가진다.

  아산화 질소[$N_2O(g)$]는 위의 루이스 전자점식에서 제시된 바와 같이 두 가지의 원자 배열 방식을 가진다. 하나는 원자들이 일렬로 연결된 구조와 다른 하나는 구성 원자들이 서로 연결되어 있는 삼각형 구조를 가진다. 원자들이 일렬로 연결된 경우의 중심 원자 질소는 다중 결합에 이용된 공유 전자쌍을 제외하면 두 쌍의 공유 전자쌍 만을 가지므로 직선형 구조를 가진다. 다른 하나는 세 개의 원자들이 서로 공유 결합 전자쌍으로 연결되어야 하므로 삼각형 구조를 가진다.

[문제 4-2]

산화 환원 반응은 전자를 주고 받는 화학의 가장 기본적인 반응으로서 산화 환원 반응의 자세한 분석을 위해서 원자의 산화수라는 개념을 이용한다. 각 원자의 산화수를 구하기 위해서 산화수 규칙을 주로 이용하지만 루이스 전자점식과 제시문 (라)의 규칙을 이용해서도 산화수를 구할 수 있다는 것을 제시문을 통해서 이해해야 한다. [문제 4-2]는 주어진 제시문을 이용하여 산화수를 구하고 산화 환원 반응에 수반되는 산화수 변화를 파악하여 복잡한 산화 환원 반응을 이해할 수 있는 지를 평가하는 문제이다.

- 일반적으로 산화수는 산화수 규칙에 따라 결정될 수 있다. 산화수 규칙은 산화수가 변하지 않는 원소들의 산화수와 전체 물질의 산화수는 전체 물질의 전하수와 같다는 사실을 이용하여 주변 환경에 따라 변하는 원자들의 산화수를 결정하는 것이다.

  루이스 전자점식을 이용한 산화수의 결정은 산화수 규칙의 적용이 어려운 경우에 적용한다고 되어 있으나, 복잡한 공명 구조를 가지지 않는 경우에 있어서는 대부분의 경우 루이스 구조식과 전기 음성도를 이용하면 산화수를 구할 수 있다. 산화수 결정에서 가장 중요한 것은 전자의 이동을 파악하는 것인데 원자 간 이동이 가능한 전자는 두 원자가 함께 공유하고 있는 공유 전자뿐이다. 산화수는 이러한 공유 전자의 이동이 완전히 이루어졌다고 가정한 상태에서 원자가 가지게 되는 전하를 의미하므로 두 원자 사이에서 공유 전자가 어느 원자로 이동할 것인가를 파악하는 것이 중요하다. 이러한 공유 전자의 이동은 두 원자의 전기 음성도를 비교함으로써 예측할 수 있다. 즉 제시문 (라)에 주어진 바와 같이 전기 음성도가 큰 원자가 공유 전자쌍을 모두 소유한다.

  주어진 산화 환원 반응에서 반응물인 질산암모늄[$NH_4NO_3(s)$]은 질소(N) 원자를 2개 포함하고 있는데 각각의 산화수가 다르다. [문제 4-1]의 설명과 같이 질산 음이온(NO_3^-)과 암모늄 양이온(NH_4^+)으로 구분하여 고려해야 한다. 산화수 규칙을 이용하면 암모늄 양이온(NH_4^+)과 질산 음이온(NO_3^-)에 포함된 질소(N) 원자의 산화수를 다음과 같이 구할 수 있다.

  암모늄 양이온(NH_4^+)의 질소(N) 원자의 경우 +1(전체 전하수) = x(N의 산화수) + 4 x 1 (H의 산화수)이므로, 암모늄 양이온(NH_4^+)에 포함된 질소(N) 원자의 산화수는 −3이다. 또한, 질산 음이온(NO_3^-)의 질소(N) 원자의 경우는 −1(전체 전하수) = x(N의 산화수) + 3(−2) (O의 산화수) 이므로, 질산 이온(NO_3^-)에 포함된 질소(N) 원자의 산화수는 +5이다.

  루이스 전자점식을 이용하면 다음과 같이 각 원자의 산화수를 구할 수 있다.



- 루이스 전자점식을 이용할 경우는 전체 전하에 대한 고려 없이 원자 주변의 전자를 더하여 산화수를 구할 수 있다. 먼저 암모늄 양이온(NH_4^+)의 경우, 질소(N)가 수소(H)보다 전기 음성도가 높기 때문에 질소(N)와 수소(H) 사이의 공유 전자쌍은 모두 질소(N)가 소유하게 된다. 수소(H)는 원자가 전자가 없으므로 중성인 상태보다 전자의 개수가 하나 적어서 +1의 전하량을 가지게 되고 이것은 수소(H)의 산화수가 된다. 질소(N)는 8개의 전자를 소유하게 되어 중성인 상태보다 3개 더 많은 전자를 소유하고 있으므로 −3의 전하량을 가지고 산화수는 −3이 된다.

  질산 음이온(NO_3^-)의 경우도 산화수 규칙에 대한 사전 지식 없이 루이스 전자점식에서 모든 산화수를 결정할 수 있다. 이번에는 중심의 질소(N) 원자의 전기 음성도가 바깥 원자인 산소(O)보다 작으므로 모든 공유 전자를 산소(O)에게 빼앗기게 된다. 위의 그림에서 표시된 바와 같이 산소(O)는 8개의 최외각 전자를 소유하고 있어서 중성인 상태보다 전자가 2개 많아서 −2의 산화수를, 질소(N)는 전자를 모두 빼앗겨 중성인 상태보다 5개의 전자가 모자라므로 +5의 산화수를 가지게 된다.

  아산화 질소[$N_2O(g)$]의 경우에는 다양한 공명 구조를 통하여 여러 개의 전자 배치가 기여하게 된다. 이러한 경우는 산화수 규칙을 이용하는 것이 편리하다.

  아산화 질소[$N_2O(g)$]의 질소(N) 원자의 경우 0 (전체 전하수) = 2 x x(N의 산화수) + (−2) (O의 산화수)이므로, 질소(N) 원자의 산화수는 +1로 결정할 수 있다. 이제 아래의 화학 반응에서 반응물과 생성물의 각 구성 원자들의 산화수가 모두 결정되었다.

$$NH_4NO_3(s) \rightarrow 2H_2O(g) + N_2O(g)$$

  모든 수소(H) 원자는 +1의 산화수를 모든 산소(O) 원자는 −2의 산화수를 가지게 된다. 질소(N) 원자만이 산화수의 변화를 가지게 되고 질소(N) 원자가 산화 환원 반응에 모두 참여한다.

  위에서 구한 질소(N) 원자의 산화만을 표현하면 다음과 같다.

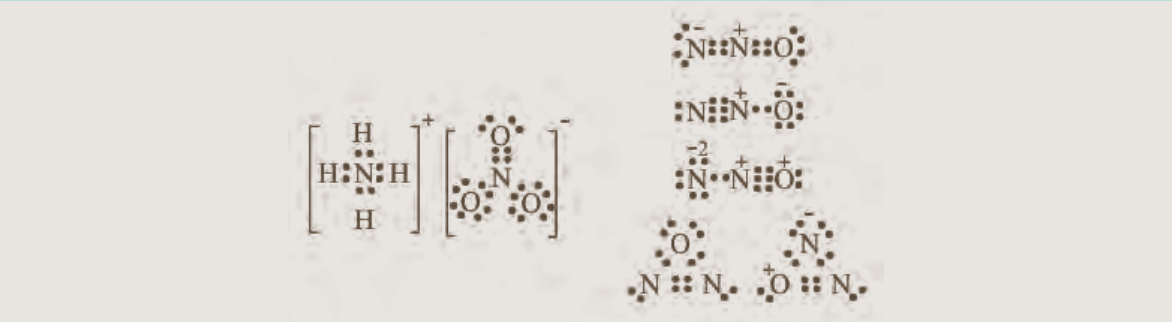
$$\overset{(-3)}{\underset{}{}}\overset{(+5)}{N}H_4\overset{(+5)}{N}O_3(s) \rightarrow 2H_2O(g) + \overset{(+1)}{N}_2O(g)$$

  암모늄 양이온(NH_4^+)의 질소(N) 원자는 산화수가 −3에서 +1로 증가하였으므로 산화 반응에 질산 음이온(NO_3^-)의 질소(N) 원자는 산화수가 +5에서 +1로 감소하였으므로 환원 반응에 해당된다.

4. 문항별 예시 답안 및 채점 기준

[문제 4-1] 예시 답안

- 제시문 (가)에 근거하여 가능한 질산암모늄[$NH_4NO_3(s)$]과 아산화 질소[$N_2O(g)$]의 루이스 전자점식은 다음과 같다.



- 제시문 (나)의 전자쌍 반발 이론을 이용하면 질산암모늄[$NH_4NO_3(s)$]의 암모늄 이온은 네 개의 공유 전자쌍들이 반발하여 서로 가장 먼 거리에 위치하려고 하므로 정사면체 구조를 가지게 된다. 질산 이온도 네 개의 공유 전자쌍을 가지지만 하나의 전자쌍은 다중 결합을 형성하는 것으로 전자쌍의 반발을 고려할 때 포함되지 않는다. 따라서 세 쌍의 공유전자쌍이 서로 반발하는 평면 삼각형 구조를 가진다. 아산화 질소는 답안에 제시된 루이스 전자점식에 따라 원자들이 일렬로 연결된 세 구조는 직선형 구조를 나머지 두 구조는 삼각형 구조를 가진다.

채점 기준

- 질산암모늄 이온의 루이스 전자점식을 정확히 제시하면 +2점.
- 아산화 질소의 루이스 전자점식을 하나 이상만 제시하면 +2점.
- 암모늄 이온의 구조를 정확히 예측하면 +2점.
- 질산 이온의 구조를 정확히 예측하면 +2점.
- 아산화 질소의 제시된 루이스 전자점식을 이용하여 정확히 구조를 예측하면 +2점.
- 루이스 전자점식에서 공유 결합 전자쌍들을 점으로 표시하지 않고 선으로 표시한 것도 인정함.
- 아산화 질소의 형식 전하를 표시하지 않은 경우도 인정함.

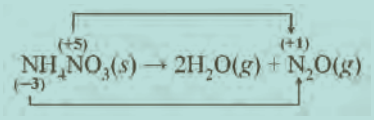
※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~3점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 10점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

[문제 4-2] 예시 답안

- 제시문 (라)에 근거하여 암모늄 이온에서는 수소보다 전기 음성도가 큰 질소가 모든 공유 전자쌍을 차지하게 되므로 암모늄 이온의 질소는 '−3'의 산화수를 가진다. 수소는 모든 전자를 빼앗겨 '+1'의 산화수를 가진다.
- 질산 이온의 질소는 전기 음성도가 강한 산소에 의해서 둘러싸여 있다. 모든 공유 전자쌍을 산소가 소유하게 되므로 질소의 산화수는 '+5'가 된다. 산소는 중성의 산소 원자보다 2개 더 많은 전자를 소유하므로 '−2'의 산화수를 가진다.



- 반응물의 하나인 H_2O의 각 원자의 산화수는 산화수 규칙을 이용하거나 루이스 전자점식을 이용하면 산소 원자는 '−2'로 수소 원자는 '+1'로 결정할 수 있다.
- 얻어진 산화수를 주어진 산화–환원 반응에 표시하면 다음과 같다.



- 수소 원자와 산소 원자는 산화수의 변화가 없다. 위의 반응식에서 보이듯이 암모늄 이온의 질소는 산화수가 증가하였으므로 산화된다. 또한, 질산 이온에 포함된 질소 원자는 산화수가 감소하였으므로 환원되었다.

채점 기준

- 암모늄 이온에 포함된 질소의 산화수를 루이스 전자점식과 제시문 (라)를 이용하여 정확히 구했으면 +3점.
- 암모늄 이온에 포함된 수소의 산화수를 정확히 구했으면 +2점.
- 질산 이온에 포함된 질소의 산화수를 정확히 구했으면 +3점.
- 질산 이온에 포함된 산소의 산화수를 정확히 구했으면 +3점.
- H_2O에서 수소와 산소의 산화수를 구하여 주어진 반응에서 수소와 산소의 산화수 변화가 없다는 것을 명기하면 +4점
- 암모늄 이온의 질소는 산화수가 증가하므로 산화되었다는 것을 설명하면 +3점.
- 질산 이온의 질소는 산화수가 감소하였으므로 환원되었다는 것을 설명하면 +3점.

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~3점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 20점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

2015학년도 수시 일반 논술(자연계열)

문제 4

다음 제시문 (가)–(라)를 읽고 문제에 답하시오.

(가) 탄소 화합물 중에서 가장 기본이 되는 것은 탄소(C) 원자와 수소(H) 원자로만 이루어진 탄화수소이다. 탄소 원자 사이에 단일 결합으로 이루어진 탄화수소를 포화 탄화수소라고 하며, 사슬 모양의 포화 탄화수소를 알케인이라고 한다. 알케인에는 메테인(CH_4), 에테인(C_2H_6), 프로페인(C_3H_8) 등이 있다. 탄소 원자 사이에 이중 결합이나 삼중 결합으로 이루어진 탄화수소를 불포화 탄화수소라고 하며 이중 결합을 가지고 있는 사슬 모양의 불포화 탄화수소를 알켄이라고 한다. 알켄에는 에텐(C_2H_4), 프로펜(C_3H_6) 등이 있다. 한편 삼중 결합을 가지고 있는 사슬 모양의 불포화 탄화수소를 알카인이라고 하며, 알카인에는 에타인(C_2H_2), 프로파인(C_3H_4) 등이 있다.

(나) 공유 결합을 형성하는 원자들은 중심 원자와 180°, 120°, 109.5° 등 일정한 결합각을 이룬다. 공유 결합 분자에서 중심 원자를 둘러싸고 있는 전자쌍들은 서로 같은 전하를 띠고 있으므로 반발력이 최소가 되기 위해서 최대한 멀리 떨어져 있으려고 한다. 이를 전자쌍 반발 이론이라고 한다.

(다) 화합물을 이루는 원소의 종류와 수를 알아내는 실험을 원소 분석이라고 한다. 탄소(C), 수소(H), 산소(O)로 이루어진 화합물의 시료를 완전 연소시켰을 때 생성되는 이산화 탄소(CO_2)와 물(H_2O)의 질량을 측정하여 성분 원소인 탄소(C), 수소(H), 산소(O)의 질량비를 알아낸다. 각 성분의 질량을 각 성분의 원자량으로 나누어 주면 조성비를 구할 수 있다. 조성비를 구한 후, 구성 원소의 원자 개수의 비율을 가장 간단한 정수비로 나타낸 식을 실험식이라고 한다. 탄소(C), 수소(H), 산소(O)의 원자량은 각각 12, 1, 16이다.

(라) 아보가드로 법칙에 따르면 모든 기체는 온도와 압력이 같을 때, 같은 부피 속에 같은 수의 분자가 들어 있다. 분자 수가 같으면 몰수도 같으므로, 온도와 압력이 같은 조건에서 기체 1몰의 부피는 기체의 종류에 상관없이 같다.

[문제 4-1] 결합각의 최댓값이 180°인 사슬 모양 탄화수소의 실험식이 C_3H_5로 결정되었다. 제시문 (가), (나), (다)에 근거하여, 이 사슬 모양 탄화수소의 분자량(g/mol)을 구하는 과정을 논리적으로 설명하고 그 구조식을 1개만 제시하시오. [10점]

[문제 4-2] 다음 그림과 같은 장치를 이용하여 액체 상태의 시료 X에 대해 원소 분석 실험을 수행하였다.



[원소 분석 장치]

시료 X를 원소 분석 장치에 넣고 가열하여 완전 연소시켰을 때 이산화 탄소(CO_2)와 물(H_2O)만 생성되었다. 원소 분석 장치에서 반응이 완결된 후 염화 칼슘($CaCl_2$)을 채운 염화 칼슘관에서 54mg, 수산화 나트륨(NaOH)을 채운 수산화 나트륨관에서 132mg의 질량 증가가 측정되었다. 시료 X의 원소 분석 실험을 통해 탄소(C)와 수소(H)의 몰수비가 결정되었고, 시료 X의 실험식을 결정하기 위해 추가적으로 진행된 실험과 그 결과는 다음과 같다.

❶ 소량의 시료 X를 넣은 실린더에 건조한 산소(O_2) 기체를 채운 후 상온(25℃)에서 실린더 내부의 부피를 측정하였다.

❷ 실린더를 가열하여 연소 반응을 완결시킨 후 실린더를 냉각하여 상온(25℃)으로 유지한 상태에서 실린더 내부의 부피를 측정하였다.

● **실험 결과 :** 연소 반응 전과 후 실린더 내부의 부피

연소 반응 전	연소 반응 후
400 mL	300 mL

위의 실험 결과와 제시문(다), (라)에 근거하여 시료 X의 실험식을 논리적으로 추론하시오. 단, 계수를 맞추지 않은 화학 반응식은 다음과 같고, 실린더 안의 액체 상태 물질의 부피는 무시할 정도로 작다. [20점]

$$X(l) + O_2(g) \rightarrow H_2O(l) + CO_2(g)$$

1. 논제의 분석

2015학년도 수시 일반 논술(자연계열)에 출제된 화학 문항들은 'XX를 구하는 과정을 제시문에 근거하여 논리적으로 설명하라'의 형식으로 되어 있다. 이러한 형식은 다시 두 가지로 나눌 수 있는데 i) 주어진 제시문 만을 분석하여 해답을 제시하도록 요구하는 경우와 ii) 실험의 결과를 분석하여 해답을 제시해야 하는 경우가 있다. 이러한 형식의 문항들은 모두 '논리적 추론형'으로 분류할 수 있는 문항들로서 단순한 지식의 암기만으로는 해결하기 어려운 형태의 문항들이다. 이는 개별 교과 형 출제가 시행되기 전 다년간 출제되었던 중앙대학교 논술 시험 방식인 통합형 논술과 동일한 형식을 갖는다. '논리적 추론형' 문항이 주어진 경우 다음과 같은 사항에 유의하여 답안을 작성해야 한다.

- 제시문에 주어진 사항들을 우선적으로 숙지한 후 문제 풀이를 시도해야 함.
- 답안을 얻기 위한 사고 전개 과정을 각 단계 별로 설명해야 함.
- 문제에서 주어진 실험 결과에 대한 분석이 제시되어야 함.
- 풀이 과정이 수리적 계산인 경우 설명에 반드시 수식이 제시되어야 함.
- 'XX를 구하는 과정을 논리적으로 설명하시오'의 XX에 해당하는 답안이 최종적으로 제시되어야 함.

2. 제시문의 분석 및 배경 지식

[제시문 (가)]

- **출전** : 화학 I, 단원 III, 아름다운 분자 세계 (EBS, 탐스런 화학 I, pp. 188–190, 비상교육, 화학 I, p.166)
- **배경 지식**

  지구 상의 생명 활동의 근본이 되는 물질은 탄소 화합물이며, 화석 연료, 식량, 대부분의 의약품 등도 모두 탄소 화합물이다. 탄소는 원자가가 4이므로 최대로 다른 원자 4개와 결합할 수 있다. 또한 탄소 원자는 사슬 및 고리를 형성할 수 있어 매우 다양한 종류의 화합물을 만들 수 있다. 이러한 탄화수소는 크게 사슬형 탄화수소와 고리형 탄화수소로 분류되고, 그 중에서 사슬형 탄화수소는 탄소 사이에 존재하는 화학 결합의 종류에 따라 세 개의 부류로 나뉘어 진다. 알케인은 탄소와 탄소가 단일 결합으로 이루어진 포화 탄화수소로서 일반식은 C_nH_{2n+2}이다. 알켄은 탄소와 탄소가 이중결합으로 이루어진 불포화 탄화수소로서 일반식은 C_nH_{2n}이다. 마지막으로 알카인은 탄소와 탄소가 삼중 결합으로 이루어진 불포화 탄화수소로서 일반식은 C_nH_{2n-2}이다. 이와 같이 사슬형 탄화 수소의 실험식이 주어지면 탄화 수소의 종류를 예측할 수 있다.

[제시문 (나)]

- **출전** 화학I, 단원 III, 아름다운 분자 세계 (EBS, 탐스런 화학 I, pp.172–184,교학사, 화학I, pp.176–177)
- **배경 지식**

  전자쌍 반발 원리에 의하면, 중심 원자 주위에 존재하는 전자쌍의 수에 따라 분자의 구조가 결정된다. 분자의 구조 결정을 위하여 루이스 전자점식을 먼저 그린 후에 중심 원자 주위에 존재하는 공유 전자쌍과 비공유 전자쌍의 수를 파악하여야 한다. 이때 이중 결합 혹은 삼중 결합 등의 다중 결합에 이용된 공유 전자쌍을 제외하고 단일 결합에 이용된 공유 전자쌍만을 고려한다. 결합각이 180° 와 120°인 분자의 중심 원자는 공유 전자쌍을 2개 또는 3개를 갖게 되고 대표적인 예로서는 BeH_2와 BF_3가 있다. 그러나 이들은 중심 원자가 옥텟규칙을 만족시키지 못한다. 중심 원자가 옥텟규칙을 만족시키는 경우도 180° 혹은 120°의 결합각을 가질 수 있다. 이중 결합 혹은 삼중 결합을 가지는 경우 중심 원자 주변에는 4개의 공유 전자쌍이 존재하지만 다중 결합을 이루는데 이용된 전자쌍을 제외하면 2개 혹은 3개의 공유 결합쌍을 가지게 되고, 전자쌍 반발 원리에 의해서 직선형(180°) 혹은 평면 삼각형(120°)의 구조를 가지게 된다.

[제시문 (다)]

- **출전** : 화학I, 단원 I, 화학의 언어 (EBS, 탐스런 화학I, p.41,비상교육, 고등학교 화학I, p.34)
- **배경 지식**

  불꽃 반응과 선 스펙트럼을 확인하면 화합물을 구성하는 원소들의 종류를 알 수 있지만, 화합물을 구성하는 원소들의 구성 비율은 알 수 없다. 따라서 화합물을 구성하는 원소들의 구성 비율을 알기 위해서는 원소 분석 방법을 이용한다. 화합물을 구성하는 원자의 종류와 수를 가장 간단한 정수비로 나타낸 식을 실험식이라고 하는데, 탄화수소의 경우, 원소 분석 실험을 통해 다음과 같이 구할 수 있다.

원소 분석을 통한 탄화수소의 실험식 구하기

❶ 연소 반응 후에 생성된 이산화탄소와 물의 질량으로부터 성분원소의 질량을 구한다.
❷ 각 성분 원소의 질량을 원자량으로 나누어 원자의 개수비를 구한다.
❸ 성분 원소의 원자수를 가장 간단한 정수비로 나타낸 실험식을 구한다.
❹ 실험식량과 분자량을 비교하여 분자식을 구한다.

[제시문 (라)]

- **출전** : 화학Ⅰ, 단원 Ⅰ, 화학의 언어 (EBS, 탐스런 화학Ⅰ, p.32, 상상아카데미, 고등학교 화학 Ⅰ, p.35)
- **배경 지식**

  고체나 액체의 경우 원자, 분자, 이온의 수는 이들 물질의 질량을 측정해서 쉽게 알 수 있다. 그러나 기체는 질량보다 부피를 측정하기가 쉽다. 기체의 부피로부터 기체의 분자수를 알 수 있는데 이는 아보가드로 법칙에 따라 항상 0℃, 1 기압에서 기체 1몰이 차지하는 부피는 기체의 종류에 관계없이 22.4L이기 때문이다. 즉, 측정된 부피가 11.2L이면 기체의 종류에 관계없이 0.5몰의 기체가 존재한다.

3. 문항별 분석 및 풀이 과정

[문제 4-1]

고등학교 화학Ⅰ 교과 과정은 주로 화학의 기본적인 언어를 습득하는 것에 주 목적을 두고 있다. 이러한 화학의 기본적인 개념 중에서 전자쌍 반발 이론은 분자의 구조 예측에 이용되는 화학의 필수적인 기본 언어이다. 탄화수소는 자연계를 구성하고 있는 물질 중에서 가장 많이 발견되는 화합물로 탄화 수소를 이루고 있는 화학결합의 종류에 따라 분류될 수 있다. [문제 4-1]은 원소 분석 실험을 통하여 결정된 실험식의 개념을 정확히 이해하고, 이를 탄화수소의 일반식과 연결하여 탄화수소의 분자식을 결정하고 분자량을 계산할 수 있어야 한다. 주어진 분자식으로 가능한 탄화수소의 이성질체 가운데 문제와 제시문에 주어진 결합각에 대한 정보를 이용하여 이 탄화수소의 구조를 결정하고, 이 탄화수소의 구조를 예측할 수 있는지를 평가한다.

- 탄화수소 분자량의 결정

  탄화수소의 실험식만 주고 탄화수소의 분자량과 구조식을 묻고 있다. 일반적으로 실험식만으로는 분자량과 구조식을 결정할 수 없다. 문제에 주어진 조건과 제시문 (가)에 주어진 사슬 모양의 탄화 수소의 일반식에 대한 지식을 통하여 분자식을 결정하여야 한다.

  주어진 첫 번째 조건은 탄화수소의 결합각의 최대값이 180°라는 것이다. 제시문 (나)에 주어진 전자쌍 반발 이론을 이용하면 중심 원자가 공유 전자쌍을 2개 가질 때, 직선형 모양을 가지고 180°의 결합각을 가진다. 탄화수소의 경우 수소와 수소 사이의 결합이 삼중 결합으로 이루어져 있을 때, 180°의 결합각을 가진다. 이를 통하여 문제에 주어진 사슬 모양의 탄화수소는 삼중 결합을 포함하고 있는 알카인이라는 것을 알 수 있다.

  알카인의 분자식은 C_nH_{2n-2}라는 일반식을 가진다. 이 일반식을 이용하면 알카인 탄화소수에 포함된 탄소와 수소의 개수 비를 다음과 같이 표현할 수 있다.

  C의 개수 : H의 개수 = n : 2n-2

이 실험식을 통하여 탄소와 수소의 개수 비가 3 : 5이어야 하므로 n : 2n–2 = 3 : 5와 같은 비례식이 성립한다. 이 비례식을 통하여 5n = 6n–6의 방정식이 성립함을 알 수 있고 이 방정식으로부터 n = 6으로 결정된다.

위의 결과로부터 주어진 조건에 적합한 탄화수소의 분자식이 C_6H_{10} 으로 결정되었다.

이제 주어진 탄화수소의 분자식과 각 구성 원자의 원자량을 이용하여 이 탄화수소의 분자량을 계산할 수 있다.

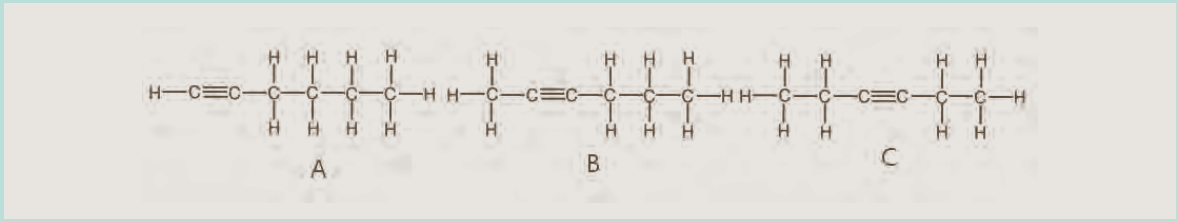
C_6H_{10}의 분자량 = 6x12(탄소의 원자량) + 10x1(수소의 원자량) = 82

문제에서 탄화수소 1몰의 분자량을 물어보고 있으므로 계산된 원자량에 g/mol 단위를 붙이면 1몰당 분자량을 82 g/mol 로 결정할 수 있다.

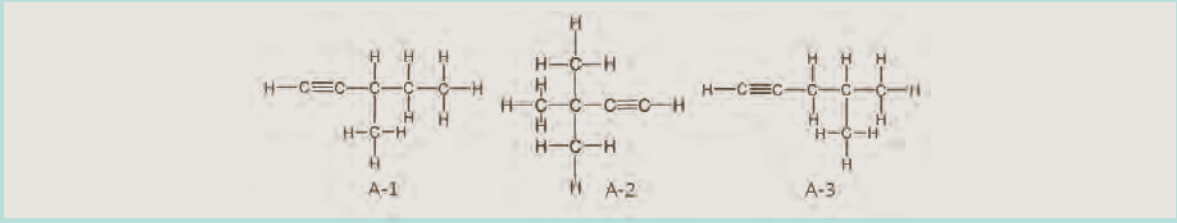
- 탄화수소 구조식의 결정

분자식은 같지만 구조식이 달라서 성질이 다른 화합물을 구조 이성질체라고 한다. 탄소 원자의 수가 4개 이상이 되면 긴 사슬 모양 외에도 가지가 달린 사슬 모양의 탄화수소가 만들어진다. 구조 이성질체는 녹는점이나 끓는점과 같은 물리적 성질이 다르므로 서로 다른 물질이다. 또한 알카인의 경우 삼중 결합의 위치에 따라서도 구조가 달라지므로 구조 이성질체가 존재한다.

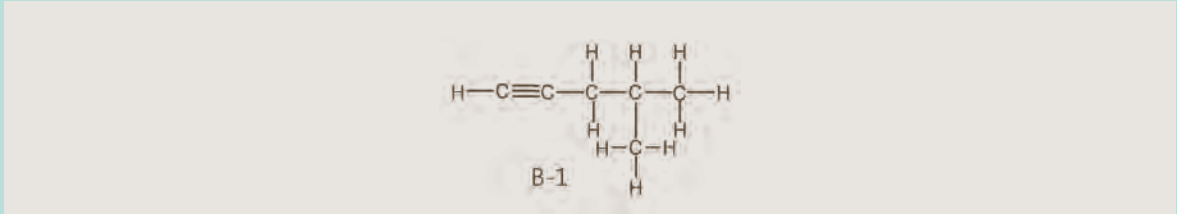
C_6H_{10}의 경우 가지가 없이 긴 사슬 모양으로 탄소 원자를 배열한 후 삼중 결합의 위치를 변화시켜가면서 세가지 다른 모양의 구조 이성질체를 만들 수 있다.



이 세 가지 구조에서 가지가 달린 모양의 탄화수소를 만들 수 있다. 우선 A의 구조에서 가지를 만들면 아래의 세 가지 이성질체를 만들 수 있다.



마찬가지로 B구조에서 가지를 만들면 아래와 같다.



[문제 4-2]

고등학교 화학I에 소개되어 있는 원소 분석 실험은 유기물의 구성 성분과 조성비를 결정하는 가장 중요한 실험의 하나이다. 일반적으로 시료의 질량이 주어진 상태에서 원소 분석 실험을 이용하여 탄소(C), 수소(H), 산소(O)의 조성비가 결정되고 이를 이용하여 실험식이 결정된다. [문제 4-2]는 시료의 질량을 문제에 제시하지 않고 교과서에 소개된 연소 반응 실험의 결과를 이용하여 원소 분석 실험에서 결정하지 못한 산소(O)의 조성비를 유추할 수 있는 지를 확인하여, 원소 분석 실험의 원리를 정확히 이해하고 있는 지를 평가하는 문제이다. 산소(O)의 조성비를 결정하기 위해서 제시된 연소 실험의 결과와 제시문에 주어진 아보가드로 법칙을 이용하여 산소 기체와 이산화탄소 기체의 몰수비를 파악하고, 주어진 화학반응식의 계수를 결정하여 시료의 분자식을 결정하게 함으로써 아보가드로 법칙을 정확히 이해하고 응용할 수 있는지를 평가한다. 교과서에 소개된 원소 분석 실험과 아보가드로 법칙을 정확히 이해하고, 하나의 실험에서 부족한 정보를 얻어내기 위하여 다른 실험을 계획할 수 있는 응용력을 평가하는 문제이다.

문제에서 주어진 실험 결과들을 이용하여 시료 X의 실험식을 결정하려고 한다. 일반적인 원소 분석 장치를 이용한 실험에서는 탄소, 수소, 산소로 이루어진 시료 X의 무게가 주어진다. 원소 분석 장치를 이용하여 시료에 포함된 탄소와 수소의 질량을 결정한 후, 시료 X의 질량에서 측정된 탄소와 수소의 질량을 빼주면 산소의 질량을 결정할 수 있다. 그러나 주어진 문제에서는 시료의 질량이 주어지지 않은 상태여서 시료에 산소가 존재하는지, 산소가 존재한다면 얼마나 존재하는지에 대한 정보를 원소 분석 장치를 이용한 결과만으로는 결정할 수 없다. 존재하는 산소의 질량을 결정하기 위하여 추가적으로 연소 실험이 진행되었고 반응 전과 후의 부피 변화가 측정되었다. 이 연소 실험의 결과를 이용하여 시료에 포함된 산소의 질량을 결정하여야 한다.

- 원소 분석 장치를 이용한 시료 X의 탄소(C)와 수소(H)의 몰수비 결정.

  그림에서 주어진 것과 같이 시료 X의 완전 연소 후에 생성된 물(H_2O)은 염화 칼슘에 의해서, 생성된 이산화탄소(CO_2)는 수산화 나트륨에 의해서 흡수된다. 따라서 염화 칼슘관의 무게 증가로부터는 생성된 물의 질량을, 수산화 나트륨관의 무게 증가에서는 생성된 이산화탄소의 질량을 측정할 수 있다.

  시료 X의 성분을 알아내기 위해서는 생성된 물에 포함된 수소의 질량과 이산화탄소에 포함된 탄소의 질량을 알아내야 한다. 물(H_2O)에 포함된 수소의 질량비는 항상 일정하므로 측정된 물의 질량에 물에 포함된 수소의 질량비를 곱하면 시료 X에 포함되어 있던 수소의 질량을 아래의 과정과 같이 구할 수 있다.

  수소의 질량 = 원소 분석 장치에서 측정된 물의 질량 X 물에 포함된 수소의 질량비.

  물에 포함된 수소의 질량비 = $\frac{2\times\text{H의 원자량}}{\text{H}_2\text{O의 분자량}} = \frac{2\times1}{18}$

  수소의 질량 = $54\ \text{mg} \times \frac{2\times1}{18} = 6\ \text{mg}$

  탄소의 질량 = 원소 분석 장치에서 측정된 이산화탄소의 질량 X 이산화탄소에 포함된 탄소의 질량비

  이산화탄소에 포함된 탄소의 질량비 = $\frac{\text{C의 원자량}}{\text{CO}_2\text{의 분자량}} = \frac{12}{44}$

  탄소의 질량 = $132\ \text{mg} \times \frac{12}{44} = 36\ \text{mg}$

  실험식을 결정하기 위해서는 수소와 탄소의 개수비 혹은 몰수비가 필요하다. 주어진 질량을 몰수비로 바꾸기 위해서는 질량을 원자량으로 나누어 주어야 한다. 따라서 미지의 시료를 구성하는 성분 원소 중 탄소와 수소의 몰수 비는 $\text{C}:\text{H} = \frac{36}{12}:\frac{6}{1} = 1:2$ 이다.

- 이산화탄소와 산소 기체의 몰수비 결정

  두 번째 연소 실험의 결과에서 시료 X의 완전 연소 후에 부피의 변화가 있는 것을 확인할 수 있다. 액체 시료의 부피가 기체의 부피 보다 월등히 작아서 무시할 수 있다면 연소 반응 전에는 산소(O_2) 기체의 부피가, 연소 반응 후에는 이산화탄소(CO_2) 기체의 부피가 측정된 부피와 같다.

  제시문 (라)에 주어진 아보가드로의 법칙에 따라서 실험 결과로 주어진 산소 기체와 이산화탄소 기체의 부피비는 소모된 산소 기체와 생성된 이산화탄소 기체의 몰수비와 같다. 즉, 문제에 주어진 계수를 맞추지 않은 화학 반응식에서 산소 기체와 이산화탄소 기체의 몰수비(400 : 300 = 4 : 3)는 화학 반응식에서 산소 기체와 이산화탄소 기체의 계수비와 같다.

- 시료 X의 실험식의 결정.

  위의 두 실험에서 얻어진 탄소 : 수소의 몰수비와, 주어진 화학 반응식에서 산소 기체와 이산화탄소 기체의 몰수비를 이용하여 시료 X의 실험식을 구하고자 한다. 미지의 시료에서의 산소의 양을 x라 하면 시료의 실험식을 CH_2O_x과 같이 나타낼 수 있다. 주어진 화학 반응식을 이용하기 위하여는 분자식을 알아야 하는데 시료의 분자식을 모르므로 위에서 주어진 시료의 실험식과 임의의 정수 n을 이용하여 $(CH_2O_x)_n$과 같이 나타내도록 하자. 이것은 $C_nH_{2n}O_{xn}$을 의미한다.

  문제에 주어진 화학 반응식의 계수를 포함하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

  $$(CH_2O_x)_n(l) + b\ O_2(g) \rightarrow c\ H_2O(l) + d\ CO_2(g)$$

  산소와 이산화 탄소의 계수비가 4 : 3이므로 b : d = 4 : 3이고 이를 이용하면

  $$C_nH_{2n}O_{xn}(l) + 4d/3\ O_2(g) \rightarrow c\ H_2O(l) + d\ CO_2(g)$$

  주어진 반응식에서 탄소의 개수를 맞추려면 d = n이고 수소의 개수를 맞추려면 2n=2c, 즉 n=c이다.

  $$C_n\ H_{2n}\ O_{x*n}\ (l\ ) + 4n/3\ O_2(g) \rightarrow n\ H_2O(l\ ) + n\ CO_2(g)$$

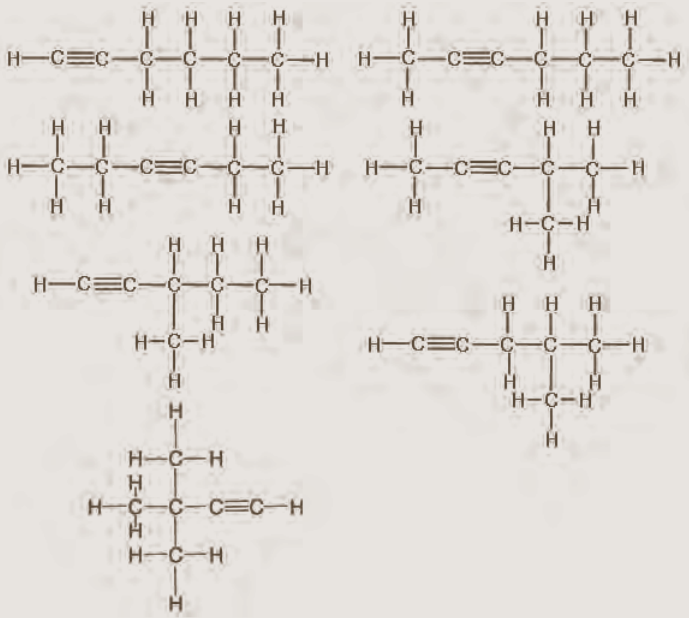
  이제 양변의 산소의 개수를 일치시키려면 $nx + \frac{8}{3}n = n + 2n$이 성립한다. 이 식을 풀면 $x = \frac{1}{3}$이고 실험식은 $CH_2O_{\frac{1}{3}}$로 주어진다. 제시문 (다)에 따라서 실험식은 원자 개수의 비율을 가장 간단한 정수 비로 나타내야 하므로 시료의 실험식은 C_3H_6O가 된다.

4. 문항별 예시 답안 및 채점 기준

[문제 4-1] 예시 답안

- 제시문 (나)에서 결합각의 최댓값이 180°이면 삼중결합을 하나는 포함하고 있다는 것을 알 수 있다.
- 제시문 (가)에서 삼중 결합을 하나 가지고 있는 탄화수소의 분자식은 C_nH_{2n-2}임을 유추할 수 있고, 이러한 탄화수소, 알카인 중에서 실험식 C_3H_5를 가지는 탄화수소를 찾기 위하여 다음과 같은 간단한 방정식을 만들 수 있다.
- 알카인의 일반식에서 얻을 수 있는 탄소와 수소의 개수비는

  C의 개수 : H의 개수 = n : 2n–2
- 실험식에서 얻을 수 있는 탄소와 수소 개수의 비는 C의 개수 : H의 개수 = 3 : 5
- 그러므로 n : 2n–2 = 3 : 5, 이 비례식을 풀면 5n = 6n–6 이고 n = 6 으로 결정된다.
- n = 6이므로 분자식은 C_6H_{10}이고 이 탄화수소의 분자량은 제시문 (다)에 주어진 탄소와 수소의 원자량을 이용하면 12×6 + 10×1 = 82 g/mol 이다.
- C_6H_{10}이 삼중 결합을 가지는 경우 7개의 구조 이성질체가 존재할 수 있다. 그 구조식은 다음과 같다.



채점 기준

- C_6H_{10}의 분자량 82 g/mol 혹은 82를 정확히 제시하면 +5점.
- C_6H_{10}의 분자식을 정확히 표현하였으나 분자량 계산에 실수가 있었으면 +4점.
- C_6H_{10}의 분자식을 정확히 제시하지는 못했지만, 탄화수소에 삼중 결합이 존재한다, 혹은 분자식을 일반식 C_nH_{2n-2}로 표시하여 탄화수소가 알카인이라는 것을 예측하면 +2점.
- 위에 제시된 구조식 중에서 하나를 제시하면 +5점.
- 예시 답안과 다른 구조식을 그렸으나 구조식의 형식을 갖추었으면 +2점.

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 2~3점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 10점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

[문제 4-2]

탄소와 수소의 몰수 비 결정

- 제시문 (다)에 근거하여 생성된 이산화탄소는 모두 수산화 나트륨에 의해서 흡수되므로 생성된 이산화 탄소의 양은 132 mg. 생성된 물은 모두 염화 칼슘에 의해서 흡수되므로 생성된 물의 양은 54mg이다.
- 미지의 시료에 포함된 탄소와 수소의 질량은 다음과 같다.

  탄소의 질량=생성된 이산화 탄소의 질량 $\times \frac{\text{C의 원자량}}{\text{CO}_2\text{의 분자량}} = 132 \times \frac{12}{44} = 36\ \text{mg}$

  수소의 질량=생성된 물의 질량 $\times \frac{2\times\text{H의 원자량}}{\text{H}_2\text{O의 분자량}} = 54 \times \frac{2\times1}{18} = 6\ \text{mg}$
- 따라서 미지의 시료를 구성하는 성분 원소 중 탄소와 수소의 몰수 비는 $\text{C} : \text{H} = \frac{36}{12} : \frac{6}{1} = 1:2$

이산화탄소와 산소 기체의 몰수 비 결정

- 제시문 (라)에 근거하여 미지의 시료의 실험식은 CH_2O_x로 나타낼 수 있고 분자식은 임의의 정수 n을 이용하여 $(CH_2O_x)_n$과 같이 나타낼 수 있다.
- 문제에 주어진 실험식을 이용하면 $(CH_2O_x)_n$ (l)+ b O_2(g) → c H_2O(l) + d CO_2(g) 이고 주어진 화학 반응식에서 나타나는 부피 변화는 모두 기체 상태의 물질, 즉 산소와 이산화 탄소에 의해서 결정된다.
- 제시문(다)에 근거하면 주어진 실험 결과로부터 소모된 산소와 생성된 이산화 탄소의 몰수 비가 다음과 같음을 알 수 있다.

  산소의 몰수 : 이산화 탄소의 몰수 = 400 : 300 = 4 : 3
- 이 결과로부터 위의 화학 반응식의 계수 b와 d의 관계는 b : d = 4 : 3이다.

실험식의 결정

- 시료 X의 탄소와 수소의 성분비가 1 : 2로 정해져 있으므로 위의 반응식의 균형을 맞추기 위해서는 다음의 연립 방정식을 풀어야 한다.
- 탄소의 개수에서 d = n, 수소의 개수에서 n = c, 산소의 개수에서 nx + 2b = c + 2d
- 산소 기체와 이산화 탄소 기체의 몰수 비에서 b : d = 4 : 3 이므로 , $b = \frac{4}{3}d$
- 산소의 개수를 맞추기 위해서는, $nx + \frac{8}{3}n = n + 2n,\ x = \frac{1}{3}$
- 그러므로 실험식은 $CH_2O_{1/3}$ 이고, 제시문 (가)에 근거하여 가장 간단한 정수 비로 표현하면 C_3H_6O이다.

채점 기준

- 탄소와 수소의 몰 비를 1 : 2로 정확히 제시하면 +5점.
- 탄소와 수소의 몰 비는 틀렸으나 탄소의 질량은 이산화 탄소에서 수소의 질량은 물에서 얻어낼 수 있다는 것을 명시하면 +2점.
- 실험의 부피 비에서 산소 기체: 이산화 탄소 기체의 몰 비가 4 : 3인 것을 예측하면 +5점.
- 산소 기체 : 이산화 탄소 기체의 몰 비를 정확히 계산하지 못했지만 아보가드로 법칙을 이용하여 기체의 부피에서 몰수 비를 구하려 하였으면 +3점
- 산소 기체 : 이산화 탄소 기체의 몰 비를 제시하지 못했지만 원소 분석 실험에서 산소의 조성비를 구할 수 없다는 것을 명시하면 +2점
- 실험식 C_3H_6O을 정확히 구했으면 +10점.
- 실험식은 틀렸으나 산소의 개수를 맞추기 위해서 $nx + \frac{8}{3}n = n + 2n$과 같은 식을 제시하면 +7점
- 실험식은 틀렸으나 탄소와 수소의 성분비가 일정하므로 생성된 물과 이산화 탄소의 몰수비가 같다. 즉 화학 반응식에서 c 와 d 가 같다는 것을 명시하면 +5점.
- 실험식은 틀렸으나 "탄소의 개수에서 d = n, 수소의 개수에서 n = c, 산소의 개수에서 nx + 2b = c + 2d" 와 같이 화학 반응식에서 계수 사이의 관계를 명시하면 +3점

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 2~3점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 20점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

제3장

자연계열
논술 문항 체험하기

1. 수학 104
2. 물리 118
3. 생명과학 122
4. 화학 128

3 CHUNG ANG 2016

자연계열 논술 문항 체험하기

01_수학

학생들이 보다 많은 수학 논술 문항을 체험할 수 있도록 [문제 1], [문제 2], [문제 3]에 해당하는 유형의 예시 문제를 각각 1문항씩 출제하고 이에 대한 예시 답안과 채점 기준을 수록하였다.

문제 1

20점

민수가 다음과 같은 게임을 한다. 주사위가 아주 많이 들어있는 상자에서 임의로 주사위를 하나 고른 후, 그 주사위를 임의로 던진다. 주사위 중 75%는 홀수가 더 잘 나오도록 개조되어 있고, 25%는 짝수가 더 잘 나오도록 개조되어 있다. 홀수가 더 잘 나오는 주사위를 임의로 던지면, 홀수가 나올 확률은 0.75이고, 짝수가 나올 확률은 0.25이다. 또한, 짝수가 더 잘 나오는 주사위는, 임의로 던졌을 때 짝수가 나올 확률이 0.75이다. 민수는 주사위를 던져 홀수가 나오면 만원을 잃고, 짝수가 나오면 2만원을 상금으로 받는다. 민수는 게임을 하기 전에 주사위를 임의로 고른 다음, 그것을 한번 던져본 후에 같은 주사위로 게임을 할 지 결정할 수 있다. 민수가 주사위를 골라서 던졌을 때, 홀수가 나왔다고 하자. 그 주사위로 게임을 하기로 했을 경우, 민수가 받을 상금의 기댓값을 구하는 과정을 논리적으로 설명하시오.

1. 제시문의 분석, 배경 지식, 문제 풀이 과정

주사위를 골라 던져서 짝수인지 홀수인지 맞추면 상금을 받는 게임을 할 때 상금의 기댓값을 구하는 문제이다. 그러나, 주사위가 개조되어 있어 확률이 일정하지 않고, 주사위를 한번 던져본 후 결과를 보고 그 주사위로 게임을 할지 결정할 수 있다는 조건이 있고, 주사위를 골라서 던졌을 때 홀수가 나왔다는 정보를 알고 있는 경우 상금의 기댓값을 구해야 하는 문제이다.

확률이 0이 아닌 사건 A에 대하여 사건 A가 일어났다고 가정할 때, 사건 B가 일어날 확률을 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률이라고 하고, 기호로

$$P(B \mid A)$$

와 같이 나타낸다. 조건부확률의 정의에서

$$P(B \mid A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

이므로 우변의 분모, 분자를 표본공간의 근원사건의 수 $n(S)$로 나누면

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

이다.(교학사 적분과 통계, Ⅲ 확률, pp. 117–118)

상금을 확률변수로 생각할 때, 가능한 값은 –1만원, 2만원이다. 각각의 값에 해당하는 확률을 구하기 위해 문제에 주어진 사건들과 그 사건들이 발생할 확률들을 구해보자. 주사위를 던져서 홀수가 나오는 사건을 A라고 하고, 짝수가 나오는 사건을 B라고 하자. 또한, 주사위를 하나 골랐을 때 홀수가 더 잘 나오는 주사위일 사건을 LA라고 하고, 주사위를 하나 골랐을 때 짝수가 더 잘 나오는 주사위일 사건을 LB라고 하자. 그러면, 문제로부터 다음의 확률값을 구할 수 있다.

$$P(LA)=0.75,\ P(LB)=0.25,\ P(A\mid LA)=0.75,\ P(B\mid LA)=0.25,$$
$$P(A\mid LB)=0.25,\ P(B\mid LB)=0.75$$

이제, 주사위를 처음 던졌을 때 홀수가 나오는 사건을 A_1 이라고 하고, 두 번째 던졌을 때 홀수가 나오는 사건을 A_2 라고 하자. 그러면, 상금이 –1만원, 2만원일 확률은 각각 $P(A_2\mid A_1)$, $1-P(A_2\mid A_1)$이고, 따라서 상금의 기댓값은

$$-1\times P(A_2\mid A_1)+2\times(1-P(A_2\mid A_1))$$

이 된다.

$P(A_2\mid A_1)$은 조건부확률의 정의에 의해

$$P(A_2\mid A_1)=\frac{P(A_2\cap A_1)}{P(A_1)}$$

이고, 사건 A_1은 $A_1\cap LA$와 $A_1\cap LB$의 합집합이고,

이 두 사건은 서로 배반이므로 확률의 덧셈정리에 의해 $P(A_1)=P(A_1\cap LA)+P(A_1\cap LB)$이다.

또한, 조건부확률의 정의를 이용하면 위 조건부확률의 분모는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$P(A_1)=P(A_1\cap LA)+P(A_1\cap LB)=P(A_1\mid LA)P(LA)+P(A_1\mid LB)P(LB)$$
$$=0.75\times0.75+0.25\times0.25=0.625$$

마찬가지로, 분자는

$$P(A_2\cap A_1)=P(A_2\cap A_1\mid LA)P(LA)+P(A_2\cap A_1\mid LB)P(LB)$$
$$=0.75^2\times0.75+0.25^2\times0.25=0.4375$$

와 같이 계산할 수 있다. 따라서, 구하고자 하는 조건부 확률은

$$P(A_2\mid A_1)=\frac{P(A_2\cap A_1)}{P(A_1)}=\frac{0.4375}{0.625}=0.7$$

이고, 상금의 기댓값은

$$-1\times P(A_2\mid A_1)+2\times(1-P(A_2\mid A_1))=-1\times0.7+2\times0.3=-0.1$$

이다.

2. 문항별 예시 답안 및 채점 기준

예시답안

- 주사위를 던져서 홀수가 나오는 사건을 A라고 하고, 짝수가 나오는 사건을 B라고 하자. 또한, 주사위를 하나 골랐을 때 홀수가 더 잘 나오는 주사위일 사건을 LA라고 하고, 주사위를 하나 골랐을 때 짝수가 더 잘 나오는 주사위일 사건을 LB라고 하자. 주어진 문제에서 다음의 확률값을 알 수 있다.

$$P(LA)=0.75,\ P(LB)=0.25,\ P(A\mid LA)=0.75,\ P(B\mid LA)=0.25,$$
$$P(A\mid LB)=0.25,\ P(B\mid LB)=0.75$$

- 이제, 주사위를 처음 던졌을 때 홀수가 나오는 사건을 A_1이라고 하고, 두 번째 던졌을 때 홀수가 나오는 사건을 A_2라고 하자. 상금의 기댓값을 구하기 위해서는 먼저 $P(A_2\mid A_1)$을 구해야 한다. 그러면, 민수가 받을 상금의 기댓값은

$$-1\times P(A_2\mid A_1)+2\times(1-P(A_2\mid A_1))$$

이 된다.

- 조건부확률의 정의에 의해

$$P(A_2\mid A_1)=\frac{P(A_2\cap A_1)}{P(A_1)}$$

이고, 분모는

$$P(A_1)=P(A_1\cap LA)+P(A_1\cap LB)=P(A_1\mid LA)P(LA)+P(A_1\mid LB)P(LB)$$
$$=0.75\times 0.75+0.25\times 0.25=0.625$$

와 같이 계산할 수 있고, 분자는

$$P(A_2\cap A_1)=P(A_2\cap A_1\mid LA)P(LA)+P(A_2\cap A_1\mid LB)P(LB)$$
$$=0.75^2\times 0.75+0.25^2\times 0.25=0.4375$$

와 같이 계산할 수 있다. 따라서, 구하고자 하는 조건부 확률은

$$P(A_2\mid A_1)=\frac{P(A_2\cap A_1)}{P(A_1)}=\frac{0.4375}{0.625}=0.7$$

이다.

- 따라서 상금의 기댓값은

$$-1\times P(A_2\mid A_1)+2\times(1-P(A_2\mid A_1))=-1\times 0.7+2\times 0.3=-0.1$$

즉, 1000원을 잃는 것이다.

채점기준

- 문제에서 주어진 확률값을 정확한 식으로 표현하면 +3점
- 상금의 기댓값을 구하는 식을 바르게 제시하면 +5점
- 필요한 조건부 확률을 정확히 구하면 +10점
- 상금의 기댓값을 정확히 계산하면 +2점

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~3점 부여 가능.

※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 20점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

문제 2

다음 제시문(가)~(다)를 읽고 문제에 답하시오.

(가) 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(x, y)$를 점 $\mathrm{P}'(x', y')$으로 하나씩 대응시키는 함수 $f:(x, y) \to (x', y')$에 대해

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

를 만족시키는 상수 a, b, c, d가 있을 때, f를 일차변환이라고 한다.

(나) 일차변환 $f:(x, y) \to (ax + by, cx + dy)$를 행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(다) 양수 x, y에 대하여 $\log_{10} xy = \log_{10} x + \log_{10} y$와 $\log_{10} \dfrac{x}{y} = \log_{10} x - \log_{10} y$이 성립한다.

(라) 양수 x, y에 대하여 $x < y \Leftrightarrow \log_{10} x < \log_{10} y$

[문제 2-1] 두 점 $\mathrm{P}(-2, -1), \mathrm{Q}(3, 1)$를 각각 두 점 $\mathrm{P}'(2, -3), \mathrm{Q}'(-1, 2)$로 옮기는 일차변환이 직선 $y = x + 2$를 직선 $y = px + q$로 옮긴다고 하자. $p + q$를 구하는 과정을 논리적으로 설명하시오. [10점]

[문제 2-2] x축에 대한 대칭변환을 나타내는 행렬을 B, 직선 $y = -x$에 대한 대칭변환을 나타내는 행렬을 C, 원점을 중심으로 $45°$만큼 회전하는 일차변환을 나타내는 행렬을 D, 2×2 단위행렬을 E라 하자. 행렬 $A = 2B + C + \sqrt{2}D - E$에 대하여 A^n이 나타내는 일차변환에 의해 점 $\mathrm{P}(2, 1)$이 옮겨진 점을 $\mathrm{P}_n(x_n, y_n)$이라고 할 때, $x_n - y_n \le 10^{-3} \cdot 5^n$이 되는 자연수 n의 최솟값을 구하시오.

(단, $\dfrac{-1}{2(2\log_{10} 2 - 1)} = 1.26$, $\dfrac{-\log_{10} 2}{2(2\log_{10} 2 - 1)} = 0.38$로 계산할 수 있다.) [10점]

1. 제시문의 분석, 배경 지식, 문제 풀이 과정

[문제 2-1]은 일차변환을 행렬을 통하여 잘 이해하고 있는지 평가하고 있는 문제이다.

문제의 조건을 만족하는 일차변환 f를 나타내는 행렬을 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 하자.

점 $\mathrm{P}(-2,-1)$이 f에 의해 점 $\mathrm{P}'(2,-3)$으로 옮겨지므로 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$이다.

한편, 점 $\mathrm{Q}(3,1)$이 점 $\mathrm{Q}'(-1,2)$로 옮겨지므로 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$이다. 이 두 식을 한꺼번에 쓰면, 다음의 식을 얻는다.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

행렬 $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$의 역행렬을 양변에 곱하여 다음을 얻는다.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$
$$=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

직선 $y=x+2$ 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x,y)$가 일차변환 f에 의해 옮겨진 점을 $\mathrm{P}'(x',y')$라 하면,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x-4y \\ -x+5y \end{pmatrix}$$

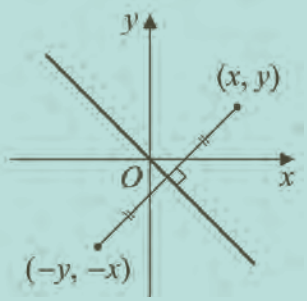
점 $\mathrm{P}(x,y)$가 직선 $y=x+2$ 위의 점이므로 $x'=x-4y=x-4(x+2)=-3x-8$, $y'=-x+5y=-x+5(x+2)=4x+10$이다. 점 $\mathrm{P}'(x',y')$가 직선 $y=px+q$ 위에 있으므로 $y'=px'+q$이고 이 식에 $x'=-3x-8, y'=4x+10$을 각각 대입하여 $4x+10=p(-3x-8)+q$을 얻는다. 이것을 정리하여 $(4+3p)x+(10+8p-q)=0$을 얻는다. 이 식은 임의의 x에 대해서 성립하므로 다음의 연립방정식을 얻는다.

$$\begin{cases} 4+3p=0 \\ 10+8p-q=0 \end{cases}$$

이것을 풀면, $p=-\frac{4}{3}, q=-\frac{2}{3}$이다. 따라서, $p+q=-2$이다.

[문제 2-2]는 우선 여러 가지 일차변환을 알고 있는지 평가한다. 일차변환과 로그의 성질을 연계하여 문제를 해결해야 한다.

점 $\mathrm{P}(x,y)$를 x축에 대한 대칭변환으로 이동시킨 점은 $(x,-y)$이고 $\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$를 만족한다. 점 $\mathrm{P}(x,y)$를 직선 $y=-x$에 대한 대칭변환으로 이동시킨 점은 다음 그림을 통하여 $(-y,-x)$임을 알 수 있고, $\begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$를 만족한다. $45°$만큼 회전하는 일차변환의 행렬은 $\begin{pmatrix} \cos 45° & -\sin 45° \\ \sin 45° & \cos 45° \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$이고 2×2단위행렬은 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이다.



따라서, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 이다.

$A=2B+C+\sqrt{2}D-E$ 를 계산하면, $A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ 를 얻는다.

$A^2=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & -2\end{pmatrix}=2^2\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & -1\end{pmatrix}=2^2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 이고 이것을 이용하여

$A^{2k}=2^{2k}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, A^{2k+1}=2^{2k+1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & -1\end{pmatrix}=2^{2k+1}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ 을 얻는다. 따라서,

$\begin{pmatrix}x_{2k}\\ y_{2k}\end{pmatrix}=A^{2k}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}=2^{2k}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{2k+1}\\ 2^{2k}\end{pmatrix}$ 이고

$\begin{pmatrix}x_{2k+1}\\ y_{2k+1}\end{pmatrix}=A^{2k+1}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}=2^{2k+1}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}=2^{2k+1}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{2k+1}\\ -2^{2k+1}\end{pmatrix}$ 이다.

n 이 짝수, 즉 $n=2k$일 때, $x_n-y_n=x_{2k}-y_{2k}=2^{2k+1}-2^{2k}=2^{2k}$ 이므로 $2^{2k}=x_n-y_n\le 10^{-3}\cdot 5^n=10^{-3}\cdot 5^{2k}$ 이다.

즉, $\left(\frac{4}{10}\right)^{2k}=\left(\frac{2}{5}\right)^{2k}\le 10^{-3}$ 이다. 양변에 로그를 취하여 $2k(2\log_{10}2-1)\le -3$ 을 얻는다.

이를 정리하면 $k\ge\frac{-3}{2(2\log_{10}2-1)}=3\times 1.26=3.78$ 이고 k 는 정수이므로 $n=2k\ge 8$ 이다.

n 이 홀수, 즉 $n=2k+1$ 일 때, $x_n-y_n=x_{2k+1}-y_{2k+1}=2^{2k+1}-(-2^{2k+1})=2^{2k+2}$ 이므로

$2^{2k+2}=x_n-y_n\le 10^{-3}\cdot 5^n=10^{-3}\cdot 5^{2k+1}$ 이다.

즉, $2\left(\frac{4}{10}\right)^{2k+1}=2\left(\frac{2}{5}\right)^{2k+1}\le 10^{-3}$ 이다. 양변에 로그를 취하여 $\log_{10}2+(2k+1)(2\log_{10}2-1)\le -3$ 을 얻는다.

이를 정리하여 $k\ge\frac{-3}{2(2\log_{10}2-1)}+\frac{-\log_{10}2}{2(2\log_{10}2-1)}-\frac{1}{2}=3\times 1.26+0.38-0.5=3.66$ 이다. k 는 정수이므로 $n=2k+1\ge 9$ 이다.

따라서 문제의 조건을 만족하는 최소의 자연수 n 은 8이다.

2. 문항별 예시 답안 및 채점 기준

[문제 2-1] 예시답안

- 두 점 $P(-2,-1), Q(3,1)$을 각각 두 점 $P'(2,-3), Q'(-1,2)$로 옮기는 일차변환 f를 나타내는 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$는 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$을 만족한다.

- 따라서,
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

- 직선 $y=x+2$ 위의 임의의 점 $P(x,y)$가 일차변환 f에 의해 옮겨진 점 $P'(x',y')$는
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x-4y \\ -x+5y \end{pmatrix}$을 만족하므로

- 두 식 $x'=x-4y=x-4(x+2)=-3x-8$과 $y'=-x+5y=-x+5(x+2)=4x+10$을 얻는다.
점 $P'(x',y')$가 직선 $y=px+q$ 위에 있으므로 $y'=px'+q$이고 이 식에 $x'=-3x-8,\ y'=4x+10$을 각각 대입하여 정리하면 $(4+3p)x+(10+8p-q)=0$을 얻는다. 이 식은 임의의 x에 대해서 성립하므로 연립방정식 $\begin{cases} 4+3p=0 \\ 10+8p-q=0 \end{cases}$을 얻는다. 이 연립방정식을 풀면, $p=-\frac{4}{3}, q=-\frac{2}{3}$이다. 따라서, $p+q=-2$이다.

채점기준

- 두 점 P, Q을 각각 두 점 P', Q'로 옮기는 일차변환을 나타내는 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$가 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$을 만족함을 제시하면 +3점.
- 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$를 바르게 구하면 +2점.
- 연립방정식 $\begin{cases} 4+3p=0 \\ 10+8p-q=0 \end{cases}$을 찾으면 +3점.
- $p+q$를 바르게 구하면 +2점.

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~2점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 10점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

[문제 2-2] 예시 답안

- $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 이므로

  $A=2B+C+\sqrt{2}D-E=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & -2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ 이다.

- 간단한 계산을 하여 $A^2=2^2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 을 얻는다. 이것을 이용하여

  $A^{2k}=2^{2k}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A^{2k+1}=2^{2k+1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & -1\end{pmatrix}=2^{2k+1}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ 임을 알 수 있다. 따라서,

  $\begin{pmatrix}x_{2k}\\ y_{2k}\end{pmatrix}=2^{2k}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{2k+1}\\ 2^{2k}\end{pmatrix}$ 이고 $\begin{pmatrix}x_{2k+1}\\ y_{2k+1}\end{pmatrix}=2^{2k+1}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{2k+1}\\ -2^{2k+1}\end{pmatrix}$ 이다.

  $n=2k$ 이 짝수 일 때, $2^{2k}=2^{2k+1}-2^{2k}=x_n-y_n\le 10^{-3}\cdot 5^n=10^{-3}\cdot 5^{2k}$ 이므로

  $\left(\frac{4}{10}\right)^{2k}=\left(\frac{2}{5}\right)^{2k}\le 10^{-3}$ 이다. 양변에 로그를 취하고 정리하여 $k\ge\frac{-3}{2(2\log_{10}2-1)}=3\times 1.26=3.78$ 을 얻는다.

  k 는 정수이므로 $n=2k\ge 8$ 이다.

- $n=2k+1$ 이 홀수 일 때, $2^{2k+2}=2^{2k+1}-(-2^{2k+1})=x_n-y_n\le 10^{-3}\cdot 5^n=10^{-3}\cdot 5^{2k+1}$ 이므로 $2\left(\frac{4}{10}\right)^{2k+1}=2\left(\frac{2}{5}\right)^{2k+1}\le 10^{-3}$ 이다.

  양변에 로그를 취하고 정리하여 $k\ge\frac{-3}{2(2\log_{10}2-1)}+\frac{-\log_{10}2}{2(2\log_{10}2-1)}-\frac{1}{2}=3\times 1.26+0.38-0.5=3.66$ 을 얻는다.

  k 는 정수이므로 $n=2k+1\ge 9$ 이다.

- 따라서 문제의 조건을 만족하는 최소의 자연수 n 은 8이다.

채점기준

- 행렬 A 를 바르게 구하면 +2점.
- n 이 홀수 또는 짝수임에 따라 A^n 을 바르게 구하면 +3점.
- n 이 홀수 또는 짝수임에 따라 x_n-y_n 을 바르게 구하면 +3점.
- n 의 최솟값을 바르게 구하면 +2점.

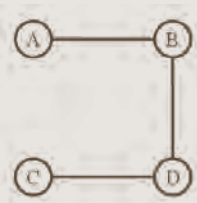
※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~2점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 10점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

문제 3

다음 제시문을 읽고 문제에 답하시오.

그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 행렬을 이용하여 나타낼 수 있다. 그래프에서 두 꼭짓점이 서로 연결되어 있지 않으면 0, 하나의 변으로 연결되어 있으면 1, 두 개의 변으로 연결되어 있으면 2와 같은 방법으로 나타낸다. 그래프를 행렬로 나타내면 그래프에 대한 여러 가지 문제를 행렬의 연산으로 풀 수 있다.

예를 들어 아래 왼쪽의 그래프를 아래의 행렬 M으로 나타낼 수 있다.



$$\mathrm{M}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&1\\0&0&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix} \qquad \mathrm{M}^2=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&2&1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&2\end{pmatrix}$$

그래프를 나타내는 행렬 M에 대하여 이를 두 번 곱한 M^2이 위 오른쪽의 행렬과 같을 때, 0, 1, 2가 의미하는 바는 다음과 같다.

- 2열의 0 : A에서 B로 두 개의 변을 지나서 가는 경로는 없다.
- 2열의 1 : C에서 B로 두 개의 변을 지나서 가는 경로는 한 가지, C → D → B가 있다.
- 2열의 2 : B에서 B로 두 개의 변을 지나서 가는 경로는 두 가지, B → A → B와 B → D → B가 있다.

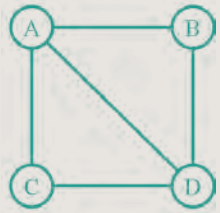
그래프에서 각 변이 방향성이 있어서, 아래 왼쪽의 그래프에서와 같이 한 방향으로만 갈 수 있을 때, 이를 아래의 행렬 N으로 나타낼 수 있다.



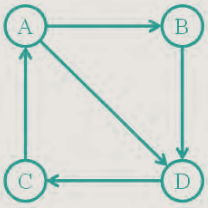
$$\mathrm{N}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix} \qquad \mathrm{N}^2=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

위 그래프를 나타내는 행렬 N에 대하여, 위 오른쪽의 N^2행렬을 구하였는데, 1행 4열의 항만이 1이고 나머지는 모두 0이다. 즉, A → D로 가는 경로만이 두 개의 변을 지나서 갈 수 있다는 것이다. A → B 또는 A → C는 두 개의 변을 지나서 가는 것이 불가능하다.

[문제 3-1] 다음과 같은 그래프가 있을 때 A에서 C로 5개의 변을 지나서 갈 수 있는 경우의 수를 행렬을 이용하여 논리적으로 구하시오. 단, 아래 그래프를 나타내는 행렬을 P라고 할 때 $P^4 - 5P^2 - 4P = 0$이 성립한다. [10점]

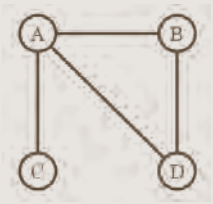


[문제 3-2] 다음과 같은 방향성 있는 변을 가지는 그래프가 있을 때 A에서 C로 9개의 변을 지나서 갈 수 있는 경우의 수를 행렬을 이용하여 논리적으로 구하시오. 단, 아래 그래프를 나타내는 행렬을 Q라고 할 때 $Q^4 - Q - E = O$이고, E는 단위행렬, O는 영행렬을 나타낸다. [20점]

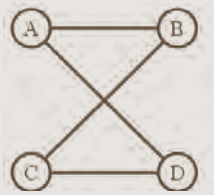


1. 제시문의 분석, 배경 지식, 문제 풀이 과정

주어진 그래프를 행렬을 이용하여 나타내는 방법을 이해하여야 한다. 행렬의 1, 2, 3, 4행과, 1, 2, 3, 4열이 각각 꼭짓점 A, B, C, D를 나타낸다. A에서 B로 가는 변이 하나 있으면 1행 2열이 1이 된다. 방향성이 없는 변으로 이루어진 그래프에서 A와 B 사이에 변이 있으면 1행 2열과 2행 1열이 모두 1이 된다. 아래에 몇 가지 예가 있다.



$$S=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&1\\1&0&0&0\\1&1&0&0\end{pmatrix}$$



$$T=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}$$

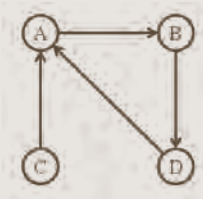
방향성이 없는 변으로 이루어진 그래프를 나타내는 행렬에서 모든 항의 합은 그래프 변의 수의 2배가 된다. 위 두 그래프 모두 4개의 방향성 없는 변으로 이루어져 있고, 이를 나타내는 행렬의 모든 항의 합은 8이 된다.

위의 행렬에서 1행 1열, 2행 2열과 같은 대각선 상의 항들이 0인 이유는 각 꼭짓점에서 다시 그 꼭짓점으로 변을 하나만 지나서 갈 수 있는 방법이 없기 때문이다. 이 행렬을 제곱하여 얻은 행렬은 꼭지점 사이에 변을 두 개 지나서 갈 수 있는 경로의 수를 나타낸다. 아래에 S와 T를 제곱한 행렬을 나타내었다.

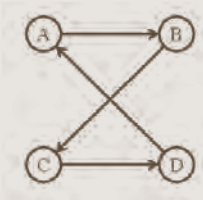
$$S^2=\begin{pmatrix}3&1&0&1\\1&2&1&1\\0&1&1&1\\1&1&1&2\end{pmatrix}$$

$$T^2=\begin{pmatrix}2&0&2&0\\0&2&0&2\\2&0&2&0\\0&2&0&2\end{pmatrix}$$

행렬 S^2의 1행 1열을 보면 꼭짓점 A에서 다시 A로 두 개의 변을 지나서 갈 수 있는 경로가 3개 있음을 알 수 있다. 그래프를 확인해 보면 A → B → A, A → C → A, A → D → A의 경로를 찾을 수 있다. 그래프의 기본 행렬을 제곱한 행렬의 특징은 대각선 상의 항들이 모두 1 또는 1보다 크다는 것이다. 그래프의 기본 행렬을 n제곱한 행렬은 두 꼭짓점 사이에 n개의 변을 지나서 갈 수 있는 경로의 수를 알려준다. 방향성이 있는 변으로 이루어진 그래프를 행렬로 나타낼 때 변의 시작 꼭짓점을 나타내는 행과 도착 꼭짓점을 나타내는 열에 위치한 항만 1이 된다. 다음의 예를 보자.



$$U=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$



$$V=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

위 그래프에서 A와 B사이에 있는 변은 A에서 B로 향하는 방향성이 있다. B에서 A로 갈 수는 없다. 따라서 위 그래프들의 행렬 U와 V에서 A를 시작 꼭짓점으로 하는 1행과 B를 도착 꼭짓점으로 하는 2열에 위치한 항은 1이 되고, B를 시작 꼭짓점으로 하는 2행과 A를 도착 꼭짓점으로 하는 1열에 위치한 항은 0이 된다. 방향성이 있는 변으로 이루어진 그래프를 나타내는 행렬에서 변의 수와 행렬의 모든 항의 합은 같다. 즉 위에서 그래프에는 4개의 변이 있고, 각 행렬의 모든 항의 합은 4이다.

이 행렬을 제곱하여 얻은 행렬은 앞의 S와 T행렬에서와 같이 꼭짓점 사이에 변을 두 개 지나서 갈 수 있는 경로의 수를 나타낸다. 이 방향성 있는 변으로 이루어진 그래프의 기본 행렬을 n제곱한 행렬은 두 꼭짓점 사이에 n개의 변을 지나서 갈 수 있는 경로의 수를 알려준다.

2. 문항별 예시 답안 및 채점 기준

[문제 3-1] 예시 답안

- 방향성이 없는 변으로 이루어진 그래프가 주어졌다. 이를 행렬로 표현하면 다음과 같다.

$$P=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&1\\1&0&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$$

- 이 문제에서 구하고자 하는 것은 A에서 C로 5개의 변을 지나서 갈 수 있는 경우의 수이다. 따라서 행렬 P^5의 1행 3렬의 항의 값을 구하여야 한다. 행렬 P에 대하여 아래와 같은 행렬 방정식이 문제에 주어져 있다.

$$P^4-5P^2-4P=0$$

- 이를 이용하여 행렬 P^5를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$P^5=PP^4=P(5P^2+4P)=5P^3+4P^2$$

$$=5\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&1\\1&0&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&1\\1&0&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&1\\1&0&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&1\\1&0&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&1\\1&0&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}32&29&29&33\\29&18&18&29\\29&18&18&29\\33&29&29&32\end{pmatrix}$$

- 구하고자 하는 답안은 행렬 P^5의 1행 3열에 있는 29이다.

채점기준

- 행렬 P를 바르게 제시하면 +3
- 행렬 P^5의 1행 3열의 항의 값을 구하여야 한다는 것을 제시하면 +2
- 행렬 P^5를 바르게 제시하면 +3
- 답안을 바르게 제시하면 +2

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~2점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 10점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

[문제 3-2] 예시 답안

- 방향성이 있는 변으로 이루어진 그래프가 주어졌다. 이를 행렬로 표현하면 다음과 같다.

$$Q=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

- 이 문제에서 구하고자 하는 것은 A에서 C로 9개의 변을 지나서 갈 수 있는 경우의 수이다. 따라서 행렬 Q^9의 1행 3렬의 항의 값을 구하여야 한다. 행렬 Q에 대하여 아래와 같은 행렬 방정식이 문제에 주어져 있다.

$$Q^4-Q-E=O$$

- 이를 이용하여 행렬 Q^9를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$Q^9=QQ^4Q^4=Q(Q+E)(Q+E)=Q^3+2Q^2+Q$$

$$=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&3&3\\1&0&2&1\\1&2&1&3\\2&1&1&1\end{pmatrix}$$

- 구하고자 하는 답안은 행렬 Q^9의 1행 3열에 있는 3이다.

채점기준

- 행렬 Q를 바르게 제시하면 +6
- 행렬 Q^9의 1행 3렬의 항의 값을 구하여야 한다는 것을 제시하면 +4
- 행렬 Q^9를 바르게 제시하면 +6
- 답안을 바르게 제시하면 +4

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~3점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 20점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

02_물리

문제 4

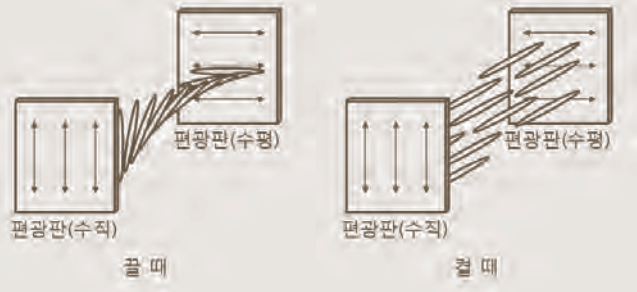
다음 제시문(가)~(다)를 읽고 문제에 답하시오.

(가) 물체가 아래 그림과 같이 회전축을 중심으로 회전 운동 할 때, 회전 운동을 발생하게 만드는 원인을 돌림힘이라고 한다. 돌림힘 τ는 작용하는 힘의 크기 F와 회전축에서 힘이 작용하는 지점까지의 거리 L에 비례하며, 힘과 막대 사이의 각 θ와 관련된다. 돌림힘을 식으로 표시하면 $\tau = FL\sin\theta$이다.



(나) 전기장의 진동 방향, 즉 편광 방향에 따라 빛을 선택적으로 통과시킬 수 있는 판을 편광판이라고 한다. 편광이 되지 않은 빛을 편광판을 지나게 하면 한 방향으로 편광된 빛을 얻을 수 있다. 그 방향을 편광축이라고 한다. 임의의 방향으로 편광된 빛을 편광판을 지나게 하면 편광판을 통과한 빛의 편광은 편광판의 편광축 방향으로 변하고 빛의 세기가 줄어든다. 빛의 편광 방향과 편광축 사이의 각도가 θ라면 편광판을 통과한 빛의 세기 I는 $I = I_0\cos^2\theta$ 이며, 이것을 말루스 법칙이라고 한다. 여기서 I_0는 편광판을 통과하기 전 빛의 세기이다.

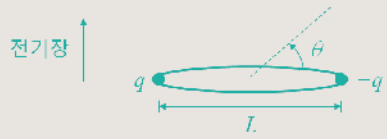
(다) 두 장의 직교하는 편광판 사이에 갇힌 액정 분자는 어떤 원리로 액정 셀을 통과하는 빛의 흐름을 조절할 수 있는 것일까? 액정 분자를 가두는 두 편광판의 안쪽에 특수한 처리를 하면 액정 분자는 다음 좌측 그림과 같이 나선형으로 꼬이면서 누워있는 상태가 된다. 이렇게 꼬여 있는 액정 분자는 첫 번째 편광판을 통과한 빛의 편광 상태를 꼬여 있는 액정 분자를 따라 돌게 하면서 두 번째 편광판을 빠져 나오게 한다. 그렇지만 만약 액정 셀에 전압을 가해서 액정 분자를 다음 우측 그림과 같이 편광판에 대해 모두 서 있게 하면 빛의 편광 상태가 돌지 않으므로 빛이 거의 통과하지 못하게 된다. 많은 액정 분자는 긴 방향의 한쪽에 (+)전하를, 다른 한쪽에는 (−)전하를 띠고 있는데, 이런 분자에 전기장을 가하면 분자를 쉽게 돌릴 수 있다.



[문제 4-1] 그림과 같이 양 끝에 $\pm q$의 전하를 띠고 길이가 L인 액정 분자가 수평 방향으로 놓여 있다.

만일 이 액정 분자를 θ만큼 회전시켜 놓으면, 액정을 초기 위치로 되돌리려는 돌림힘이 회전의 반대 방향으로 $\tau = \tau_0 \sin 2\theta$의 크기로 발생한다고 하자. $\theta = \frac{\pi}{2}$ 방향으로 균일한 전기장을 가하여 액정 분자를 $\frac{\pi}{2}$만큼 회전시켜 놓으려 할 때 필요한 전기장의 세기를 구하는 과정을 논리적으로 설명하시오.

단, 액정은 중심을 회전축으로 회전한다. [10점]



[문제 4-2] 편광축의 각도 θ가 각각 $0, \frac{\pi}{2N}, \frac{2\pi}{2N}, \frac{3\pi}{2N}, \cdots, \frac{(N-1)\pi}{2N}, \frac{\pi}{2}$인 편광판 $N+1$개가 차례로 놓여 있다.

편광 방향이 $\theta = 0$고 세기가 I_0인 빛이 편광축의 각도가 0인 편광판에 입사하여 $\frac{\pi}{2}$인 편광판까지 모두 통과한 후 빛의 세기를 I_N이라고 할 때, $\lim_{N\to\infty} I_N$을 구하는 과정을 논리적으로 설명하시오. [20점]

[제시문 출전]

제시문 (가) : 물리Ⅰ, 교학사, 김영민 외, pp.310–311
제시문 (나) : 물리Ⅲ, 교학사, 김영민 외, p.255
제시문 (다) : 물리Ⅰ, 교학사, 김영민 외, pp.157–158

1. 문항별 예시 답안 및 채점 기준

[문제 4-1 풀이]

[문제 4-1]은 전기장을 이용한 액정의 회전을 돌림힘을 이용하여 설명하는 문제로서 다음과 같은 논리 전개 과정을 통해 답안을 작성할 수 있다.

- 액정 분자가 회전하면 회전의 반대 방향으로 돌림힘이 발생하므로 전기장을 통해 가해지는 돌림힘이 되돌아가려는 돌림힘 이상이어야 한다.
- 전기장이 가해지면 액정의 양 끝에 있는 두 전하가 서로 반대 방향으로 힘을 받기 때문에 액정의 중심을 회전축으로 하여 돌림힘이 발생한다.
- 액정 분자가 θ만큼 회전하였을 때, $+q$전하와 전기장 E에 의한 돌림힘 τ는 제시문 (가)에 의해 다음과 같다.

$$\tau = \frac{qEL}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{qEL}{2}\cos\theta$$

- $-q$ 전하에 의한 돌림힘도 같은 방향, 같은 크기이므로 전기장에 의한 전체 돌림힘은 다음과 같다

$$\tau = qEL\cos\theta$$

- 전기장에 의한 돌림힘이 되돌아가려는 돌림힘 $\tau = \tau_0 \sin 2\theta$ 이상이라는 조건에서 다음과 같이 필요한 전기장의 세기를 구할 수 있다.

$$qEL\cos\theta \geq \tau_0 \sin 2\theta$$
$$E \geq \frac{2\tau_0 \sin\theta}{qL}$$

- $\theta = \frac{\pi}{2}$ 를 대입하면, 필요한 전기장의 세기는 $E = \frac{2\tau_0}{qL}$ 이다.

채점기준

- 전기장에 의한 돌림힘이 되돌아가려는 돌림힘 이상이어야 함을 지적하면 +2점.
- 분자가 θ 만큼 회전하였을 때 전기장에 의한 돌림힘을 바르게 구하면 +5점.
- 전기장의 세기를 바르게 구하면 +3점.

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~2점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 10점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

[문제 4-2 풀이]

[문제 4-2]는 편광축이 점진적으로 회전하는 다중 편광판을 빛이 통과했을 때 나타나는 세기 변화를 말루스의 법칙과 극한값을 통해 설명하는 문제로서 다음과 같은 논리 전개 과정을 통해 답안을 작성할 수 있다.

- 첫 편광판 이후 N 개의 편광판에서 편광축은 $\frac{\pi}{2N}$ 씩 회전한다.
- 각 편광판을 통과할 때마다 말루스의 법칙에 의해 빛의 세기에 $\cos^2\frac{\pi}{2N}$ 씩 곱해지므로 $I = I_0\cos^{2N}\frac{\pi}{2N}$ 이다.
- $N \to \infty$ 에서의 $\cos^{2N}\frac{\pi}{2N}$ 극한값을 구해야 하는데, 직접 구하기는 난해하므로 로그를 취한 후 정리하면 다음과 같다.

$$\lim_{N\to\infty}\log\left[\cos^{2N}\frac{\pi}{2N}\right] = \lim_{N\to\infty}2N\log\left[\cos\frac{\pi}{2N}\right] = \lim_{N\to\infty}\frac{\log\left[\cos\frac{\pi}{2N}\right]}{\frac{1}{2N}}$$

- 위 식의 마지막 항은 N → ∞ 에서 0/0 꼴이므로 분모와 분자를 모두 N으로 미분하면 다음과 같다.

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\log\left[\cos\frac{\pi}{2N}\right]}{\frac{1}{2N}} = \lim_{N\to\infty}\frac{\frac{-\sin\frac{\pi}{2N}}{\cos\frac{\pi}{2N}}\cdot\frac{-\pi}{2N^2}}{\frac{-1}{2N^2}} = \lim_{N\to\infty}\pi\tan\frac{\pi}{2N} = 0$$

- $\cos^{2N}\frac{\pi}{2N}$ 의 로그를 취한 극한값이 0이므로 $N \to \infty$에서 $\cos^{2N}\frac{\pi}{2N}$ 의 극한값은 1이다.
- 따라서 무한히 많은 편광판을 통과할 경우 $I = I_0$가 되어 빛의 세기가 줄지 않음을 알 수 있다.

채점기준

- N개의 편광판에서 편광축이 $\frac{\pi}{2N}$ 씩 회전함을 지적하면 +2점.
- 빛이 각 편광판을 통과할 때마다 일정한 비율로 세기가 줄어듦을 지적하면 +3점
- 말루스의 법칙을 적용하여 $I = I_0\cos^{2N}\frac{\pi}{2N}$ 를 바르게 구하면 +5점.
- 로그를 취한 후 정리하는 방식을 통해 극한값을 구할 수 있음을 지적하면 +5점.
- 극한값 $I = I_0$를 바르게 구하면 +5점.
- 4번 항목에서 로그를 취하지 않고 다른 독창적인 방식으로 극한값을 바르게 구하면 4-5번 항목에서 +10점 부여함.

※ 타당한 근거 없이 직관적으로 $\cos^{2N}\frac{\pi}{2N}$의 극한값을 1로 설정하여 답을 쓴 경우 4번 항목의 점수는 0점임.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 20점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

03_생명과학

문제 4

다음 제시문(가)~(라)를 읽고 문제에 답하시오.

(가) mRNA의 유전 정보는 단백질 합성시 리보솜에서 3개의 염기들이 하나의 유전 암호로 인식되어 각각의 아미노산으로 해독된다. 여기서 각 아미노산을 지정하는 mRNA의 3개의 염기 단위를 코돈이라고 한다. 4종류의 염기들의 조합에 의해 만들어질 수 있는 64개의 유전 암호 가운데 61개는 20종류의 아미노산을 암호화하는 코돈이며, 나머지 3개는 어떤 아미노산도 암호화하지 않는데 이를 종결 코돈이라고 한다.

(나) 진핵생물은 원핵생물과 달리 전사에 의해 합성되는 mRNA를 바로 단백질 합성에 이용할 수 없다. 합성된 mRNA는 단백질의 아미노산 서열에 해당되는 엑손 외에 인트론이라고 하는 염기 서열을 더 갖고 있다. 그러므로 전사 후 mRNA에서 인트론을 제거하고, 엑손들을 연결하여 성숙된 mRNA를 만드는 가공 과정이 필요하다.

(다) 분열하는 세포는 크기가 작은 딸세포를 만들고 딸세포는 성장 과정을 거쳐 다시 분열하는 과정을 반복하는데, 이를 세포 주기라고 한다. 세포 주기는 간기와 분열기로 구분되며, 세포 주기의 약 90%는 간기로 이루어진다. 간기에는 미토콘드리아나 리보솜 같은 세포 소기관의 수가 증가하고 DNA의 복제가 일어난다. 분열기에는 핵분열과 세포질 분열이 일어나며, 응축된 염색체를 관찰할 수 있다. 핵분열 과정은 염색체의 모양과 행동에 따라 전기, 중기, 후기, 말기로 구분된다. 간기에는 핵막과 인이 뚜렷하고 핵 속의 염색체가 실 모양으로 풀어져서 존재한다. 전기에는 핵막과 인이 사라지고 염색체가 응축되어 나타난다. 이때 염색체는 두 가닥의 염색 분체로 이루어져 있다. 세포의 양극에서는 염색체의 이동에 필요한 방추사가 나타나기 시작하고 방추사는 염색체의 동원체에 부착된다. 중기에는 염색체가 세포의 중앙으로 이동하여 배열된다. 후기에는 염색 분체가 분리되어 양극으로 이동한다 말기에는 염색체가 풀어지고 핵막과 인이 다시 나타나며 세포질 분열이 일어난다.

(라) 정상 세포를 배양하면 일정한 수만큼 분열한 후 더 이상 분열하지 않는다. 그러나 암세포는 세포 주기를 지속적으로 반복하기 때문에 영양분이 계속 공급되는 상황에서는 무한정 분열할 수 있다. 이러한 암세포의 특성은 세포 주기를 조절하는 신호를 무시하기 때문인 것으로 알려져 있는데, 많은 암세포에서 세포 주기를 조절하는 유전자의 이상이 발견된다.

[문제 4-1] 다음은 어떤 단백질을 암호화하는 진핵생물 유전자의 DNA 염기서열 일부와 이로부터 만들어진 아미노산의 서열을 나타낸 것이다. 돌연변이가 발생하여 DNA 염기서열 중 밑줄 친 A(A)가 C로 바뀔 경우 이 DNA 서열로부터 만들어지는 아미노산의 서열을 예측하고, 그 이유를 제시문(가)와 (나)에 근거하여 논리적으로 설명하시오. 단, 아래의 유전암호표를 참고하시오. [10점]

DNA 염기서열 : 5' ATGGGCTACGTAACCTAGGACAAGTTCGGGTAG 3'
아미노산 서열 : 메싸이오닌–글라이신–타이로신–발린–트레오닌–글라이신

두 번째 위치

첫 번째 위치	U	C	A	G	세 번째 위치
U	페닐알라닌	세린	타이로신	시스테인	U
					C
	류신		종결	종결	A
			종결	트립토판	G
C	류신	프롤린	히스티딘	아르기닌	U
					C
			글루타민		A
					G
A	이소류신	트레오닌	아스파라진	세린	U
					C
	* 메싸이오닌		라이신	아르기닌	A
					G
G	발린	알라닌	아스파트산	글라이신	U
					C
			글루탐산		A
					G

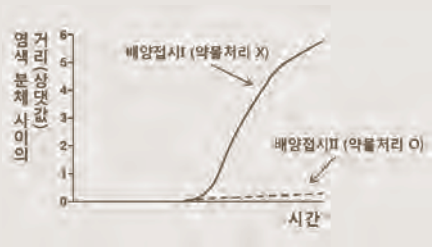
* : 개시 코돈이기도 함. 종결 : 종결 코돈

[문제 4-2] 약물 X는 새롭게 개발된 항암제이다. 이 약물의 작용 원리를 알아보기 위하여 아래와 같은 두 가지 실험을 수행하였다.

(실험 1) 배양접시 I에서 배양한 암세포를 고정한 후, 현미경 시야에 보이는 세포들을 관찰하여 세포 주기의 간기와 분열기에 해당하는 세포 수를 조사하였다. 다른 배양접시 II에는 약물 X를 처리하고 12시간 후에 암세포를 고정하여 같은 방식으로 세포 수를 조사하여 그 결과를 아래 표 정리하였다. 단, 약물 처리 전에 배양접시I과 II의 암세포의 밀도 등 실험 조건은 동일하다.

구분	배양접시 I	배양접시 II
간기	150	60
분열기	30	50

(실험 2) 약물 X를 처리했을 때(실험 1의 배양접시 II)와 처리하지 않았을 때(실험 1의 배양접시 I), 암세포의 분열 과정에서 세포 주기에 따른 특정 염색 분체 사이의 거리 변화를 관찰하였더니 아래 그래프와 같았다.



약물 X의 항암 작용 원리를(실험 1), (실험 2)의 결과와 제시문(다), (라)에 근거하여 논리적으로 설명하시오.[20점]

1. 제시문의 분석 및 배경 지식

[제시문 (가)]

- **출전** : 생명과학II, 상상아카데미, 이길재, p.123
- **배경 지식**

  유전 암호 : DNA의 유전 정보는 아데닌(A), 타이민(T), 구아닌(G), 사이토신(C)의 4종류 염기들이 만들어 내는 염기 서열로 존재한다. DNA에 저장되어 있는 유전정보는 RNA 중합 효소에 의해 mRNA 서열로 전사된다. 이때 mRNA의 염기 서열 정보가 단백질의 아미노산 서열 정보로 번역되기 위해서는 유전 암호가 필요하다. mRNA의 유전 정보는 단백질 합성 시 리보솜에서 3개의 염기들이 하나의 유전 암호로 인식되어 각각의 아미노산으로 해독된다. 여기서 각 아미노산을 지정하는 mRNA의 3개의 염기 단위를 코돈이라고 한다. 4종류의 염기들의 조합에 의해 만들어질 수 있는 64개의 유전 암호 가운데 61개는 20종류의 아미노산을 암호화하는 코돈이고 UGA, UAG, UAA의 3개는 어떤 아미노산도 암호화하지 않는 종결 코돈이다. 단백질 번역 과정에서 리보솜이 종결 코돈을 만나면 단백질 합성을 멈춘다.

[제시문 (나)]

- **출전** : 생명과학II, 상상아카데미, 이길재, p.131
- **배경 지식**

  mRNA 가공 과정 : 일반적으로 진핵 생물은 원핵 생물보다 매우 복잡한 세포 구조와 유전체 구성을 갖고 있어 유전자 발현 과정도 원핵 생물 보다 훨씬 다양하고 복잡한 방법으로 조절된다. 주로 mRNA가 합성되는 전사 단계에서 유전자 발현이 조절되는 원핵 세포와 달리 진핵 세포는 전사 단계뿐만 아니라 RNA 가공 및 수송 과정, 번역, 단백질 변형 과정 등 여러 단계에서 조절이 이루어진다. 제시문에서 설명하고 있는 바와 같이 진핵 생물은 RNA 중합효소에 의해 합성되는 mRNA가 가공 과정을 거쳐 성숙된 mRNA로 만들어져야 번역에 이용될 수 있다. 처음 합성된 mRNA 염기 서열은 엑손 부분과 인트론 부분으로 나누어진다. 엑손은 진핵 생물의 유전자 가운데 최종 단백질 산물을 만들어 내는 부분이며, 인트론은 유전 정보를 가지고 있지 않아서 단백질을 만들지 못하는 엑손과 엑손 사이에 존재하는 영역이다. 따라서 전사가 일어난 후에 유전 정보를 가지고 있지 않은 인트론 부위를 잘라 내고 인트론 주변에 위치한 엑손들을 다시 연결하는 가공 과정을 거쳐 성숙된 mRNA가 만들어진다.

[제시문 (다)]

- **출전** : 생명과학I, 천재교육, 이준규, pp.48 ~53
- **배경 지식**

  세포 주기 : 세포 주기 중 간기는 G_1기, S기, G_2기로 구분된다. G_1기는 DNA를 복제하기 전 생장기로, 복제를 준비하는 시기이다. S기에는 DNA의 복제가 일어나는데, 복제된 DNA는 서로 부착되어 있다가 분열기가 되면 응축된다. G_2기는 세포가 분열하기 전 분열을 준비하는 시기로, 세포 분열에 필요한 방추사의 재료가 되는 단백질과 세포막을 구성하는 물질이 합성된다. 세포 분열의 준비를 마친 세포는 분열기로 들어간다. 분열기(M기)는 핵분열과 세포질 분열로 이루어지며, 응축된 염색체를 관찰할 수 있다. S기에 DNA가 복제된 결과 염색체는 두 가닥의 염색 분체로 이루어지며, 분열기에 염색 분체는 각각 딸세포로 나누어져 들어간다. 분열기를 지나면 2개의 딸세포가 형성되며, 딸세포는 간기를 거친 후 다시 분열기에 접어들어 세포 주기를 반복한다. 우리 몸을 구성하는 세포들 중 분열하지 않는 세포들에서는 세포 주기가 진행되지 않지만, 분열하는 체세포는 세포 주기를 따라 간기와 분열기를 반복한다.

[제시문 (라)]

- **출전** : 생명과학I, 천재교육, 이준규, p.51
- **배경 지식**

  세포 주기와 암세포 : 우리 몸을 구성하는 세포의 세포 주기 조절에 이상이 생기면 세포가 비정상적으로 분열을 반복하는 암세포로 변화할 수 있다. 암세포는 정상 세포와 비교하여 다음과 같은 특징을 가진다.

  – 세포 분열을 촉진하는 물질이 없어도 계속해서 분열하여 여러 층으로 쌓인다.

  – 세포들끼리 접촉해도 분열이 억제되지 않는다.

  – 구조화되지 않고 여러 층을 형성한다.

  – 제 기능을 잃고 주위의 다른 조직으로 침범하는 '전이'가 일어난다.

2. 문항별 분석 및 풀이 과정

[문제 4–1]

[문제 4–1]에서는 제시문 (가)에 설명된 코돈의 개념과 제시문 (나)에 설명된 mRNA 가공 과정을 충분히 이해했는지를 평가하고자 하였다. 제시된 유전암호표를 활용하여 문제에 주어진 가상의 DNA 서열을 번역해 내는 과정에서 DNA 상의 일부 서열은 아미노산에 대한 정보를 암호화하지 않는 인트론임을 알아낼 수 있는 응용 능력을 요구하는 문제이다. 문제에 주어진 DNA서열을 앞에서부터 3개씩 나누어 보면 다음과 같다.

5'–ATG–GGC–TAC–GTA–ACC–TAG–GAC–AAG–TTC–GGG–TAG–3'

위와 같이 염기들을 정확히 3개씩 나눌 수 있는데, 이를 주어진 암호표를 이용해 번역해 보면 다음과 같은 아미노산 서열을 얻게 된다.

[메싸이오닌–글라이신–타이로신–발린–트레오닌–종결–아스파트산–라이신–페닐알라닌–글라이신–종결]

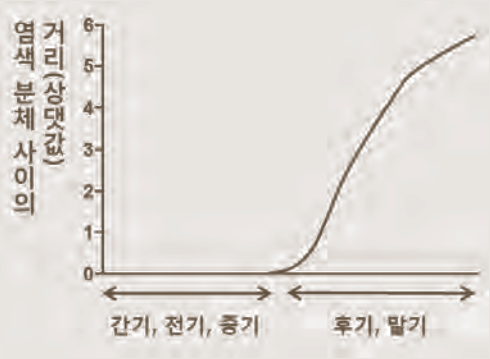
위와 같이 번역이 되었다면 종결 코돈에서 번역이 멈추어 [메싸이오닌–글라이신–타이로신–발린–트레오닌]와 같은 아미노산이 만들어져야 하는데 문제에서 제시된 아미노산 서열은 위 서열 중 [종결코돈–아스파트산–라이신–페닐알라닌] 부분이 생략된 채 마지막에 글라이신이 번역되었다. 이는 [종결코돈–아스파트산–라이신–페닐알라닌] 부분에 해당하는 DNA가 실제로는 번역되는 정보가 아님을 제시하는 것이다. 즉, 이 부분에 해당하는 염기서열 [TAG–GAC–AAG–TTC]은 인트론이라고 유추해 볼 수 있다.

문제에서 밑줄 친 A는 인트론에 해당하는 부위이므로 이 염기가 다른 염기로 치환된다고 하더라도 최종적으로 만들어지는 아미노산 서열에는 영향을 미치지 않는다. 암호표를 이용하여 염기 서열을 번역할 수 있고, 또 인트론에 해당하는 부위가 어디인지 정확하게 알아내는 것이 이 문제의 핵심이다.

[문제 4-2]

[문제 4-2]에서는 제시문 (다)에 설명된 세포 주기에 대한 설명을 바르게 이해하고 있는지 평가하고자 하였다. 제시문 이외에 추가로 주어진 두 가지 실험 결과를 분석하여 문제의 약물이 세포 주기의 어떤 단계에 어떤 방식으로 작용하는지를 논리적으로 유추해 낼 수 있는 능력을 요구하는 문항이다.

- (실험1)에서 약물을 처리한 배양접시 I과 배양접시 II를 비교해 보면 배양접시III에서 배양접시I에 비해 i) 전체적인 세포의 수가 감소하였고, ii) 간기에 있는 세포의 수가 감소하였으며, iii) 분열기에 있는 세포의 수가 증가하였다. 전체적인 세포의 수가 감소한 것은 항암제가 암세포를 죽이기 때문인 것으로 유추해 볼 수 있으며, 간기와 분열기에 해당하는 세포의 수가 변화한 것은 처리한 약물 X가 암세포의 세포 주기에 영향을 주었을 가능성을 제시하고 있다. 또한, 분열기에 속한 세포 수가 증가하고 간기의 세포 수가 감소했다는 것은 세포 주기가 한 번 분열기 접어든 후에 다시 간기로 진행되지 못했기 때문이라고 유추할 수 있다.
- (실험2)의 결과를 통해서 약물 X의 기능에 대해 보다 구체적인 정보를 파악할 수 있다. (실험2)는 세포의 분열 과정에서 세포 주기에 따른 특정 염색 분체 사이의 거리 변화를 관찰한 그래프인데, 해당하는 세포 주기를 표시해 보면 다음 그림과 같다.



간기에는 염색 분체들이 아직 만들어지지 않았거나, 간기의 S기에 DNA가 복제되어 염색 분체가 만들어진 후에도 분열기(M기)의 중기까지는 염색 분체들끼리 서로 붙어 있는 시기이므로 염색 분체 사이의 거리는 0 이다. 중기에는 염색 분체들이 세포의 중앙에 배열되어 있다가 후기에서부터 양쪽 극으로 이동하게 되므로 염색 분체 사이의 상대적인 거리는 증가하게 되는 것이다. 약물 X를 처리한 경우에는 후기, 말기로 세포 주기가 진행을 함에도 불구하고 염색 분체들 사이의 거리가 멀어지지 않는 것으로 보아, 약물 X는 세포 주기 중 중기 이후에 염색 분체의 분리와 이동을 방해하는 역할을 하는 것을 알 수 있다. 결과적으로 약물 X에 의해 암세포의 세포 주기가 M기에서 멈추게 되고, 이런 세포들은 저절로 사멸하게 된다. 따라서 약물 X를 처리하면 전체적인 세포의 수가 감소하게 되는 것이다. 실제로 방추사의 형성이나 작동을 억제하는 약물들을 항암제로 개발하려는 시도가 진행되고 있으며 한 예로 탁솔(Taxol)을 들 수 있다.

3. 문항별 예시 답안 및 채점 기준

[문제 4-1] 예시 답안

- 문제에서 주어진 염기 서열을 유전암호표를 이용하여 번역하면 [메싸이오닌-글라이신-타이로신-발린-트레오닌-종결-아스파트산-라이신-페닐알라닌-글라이신-종결]이 된다.

- 문제에서 주어진 아미노산 서열과 비교해 보면 중간에 있는 [종결코돈–아스파트산–라이신–페닐알라닌] 부분이 존재하지 않는다. 이를 통해 [TAGGACAAGTTC]는 인트론임을 유추할 수 있다.
- 따라서 밑줄 친 A가 C로 바뀌더라도 이 부분은 번역이 되지 않으므로 여전히 만들어지는 아미노산의 서열은 처음과 같이 [메싸이오닌–글라이신–타이로신–발린–트레오닌–글라이신] 이 될 것이다.

채점기준

- [메싸이오닌–글라이신–타이로신–발린–트레오닌–글라이신] 이라고 적었을 경우 +5점
- 주어진 염기 서열과 아미노산 서열을 비교 분석하여 인트론 부위를 올바로 찾아 내고, 밑줄 친 염기가 인트론에 해당하는 부위에 속해 있으므로 최종적으로 만들어지는 아미노산 서열은 처음과 같다는 이유를 올바로 설명한 경우 +5점

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~2점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 10점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

[문제 4–2] 예시 답안

- (실험1)의 결과를 보면 약물 X를 처리했을 때 간기에 해당하는 세포의 수는 감소했으며 분열기에 해당하는 세포의 수는 증가하였다. 또한, 전체적인 세포의 수가 감소하여 이 약물이 함암 효과를 가진다는 것을 알 수 있다.
- 이를 통해 약물 X는 세포 주기가 분열기로 들어간 후에 다시 간기로 진행되지 못하게 하는 역할을 하는 것으로 생각할 수 있다.
- (실험2)의 결과에 의하면 약물 X를 처리하면 세포 주기가 진행될 때 일어나는 염색 분체들 사이의 거리 증가가 나타나지 않는다.
- 염색 분체들은 분열기의 중기까지 서로 붙어 있다가 후기부터 양쪽 극으로 이동하며, 이때 방추사가 중요한 역할을 한다. 따라서 약물 X는 방추사의 형성이나 기능에 영향을 주어 염색 분체들의 이동을 막는 역할을 한다는 것을 알 수 있다.
- 즉, 약물 X는 세포 주기 단계 중 분열기에서 염색 분체들의 이동을 억제하여, 세포 주기가 계속해서 진행하지 못하고 분열기 중 중기에 멈추게 하는 작용을 한다.

채점기준

- (실험1)의 결과를 논리적으로 해석하여 약물 X가 세포 주기를 분열기에서 멈추는 작용을 한다는 내용을 설명하였으면 +10점
- (실험1)에 대해 세포 주기의 진행 억제에 대한 설명 없이 약물 X가 단순히 분열기 세포 수를 증가시킨다는 내용만 있으면 +5점
- (실험2)의 결과를 논리적으로 해석하여 약물 X가 방추사의 기능을 억제할 것이라는 내용이 있으면 +5점
- (실험2)의 결과를 올바로 해석하여 약물 X가 세포 주기를 중기에 멈추게 한다는 설명이 있으면 +5점
- 방추사나 세포 주기의 단계에 대한 정확한 설명이 없이 약물 X가 세포 주기에 영향을 준다는 내용만 있으면 +5점

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~3점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 20점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

04_화학

문제 4

다음 제시문(가)~(라)를 읽고 문제에 답하시오.

(가) 보어의 원자 모형에서 K, L, M, N, ……의 각 전자 껍질에 번호를 붙이고, 기호 n(n은 자연수)으로 표시하면 다음과 같다.

K전자 껍질(n=1), L전자 껍질(n=2), M전자 껍질(n=3), N전자 껍질(n=4), ……

이때 n에 따라 각 전자 껍질이 가지는 에너지 준위는 다음과 같다.

$E_n = -R/n^2$ kJ/mol(n=1, 2, 3, 4, ……), R은 상수

전자 껍질들 중에서 에너지 준위가 가장 낮은 전자 껍질에 전자가 존재하는 상태를 바닥상태라 하고 바닥상태의 전자가 에너지를 흡수하여 바닥상태보다 에너지 준위가 높은 전자 껍질에 존재하는 상태를 들뜬상태라고 한다.

(나) 원자에 에너지를 가하면 가장 바깥 전자 껍질에 배치되어 있는 원자가 전자가 원자핵으로부터 떨어져 나오게 된다. 기체 상태의 중성 원자 1개로부터 전자 1개를 무한히 먼 거리로 떼어 내는 데 필요한 에너지를 이온화 에너지라고 한다.

(다) 화학 반응은 여러 가지 다른 속도로 일어난다. 화학 반응의 속도는 단위 시간 동안에 감소한 반응 물질의 농도나 증가한 생성 물질의 농도로 나타낼 수 있다.

$$\text{반응속도} = \frac{\text{반응 물질의 농도 변화량}}{\text{반응 시간}} = \frac{\text{생성 물질의 농도 변화량}}{\text{반응 시간}}$$

다음과 같은 일반적인 반응의 경우를 생각하여 보자.

$aA + bB \rightleftarrows cC + dD$

이 반응의 반응 속도 υ는 $\upsilon = k[A]^m[B]^n$으로 표시된다. 여기서 비례 상수 k는 반응 속도 상수라고 하는데, k는 반응에 따라 고유한 값을 가지며, 농도와는 관계가 없고 온도에 따라 변하는 값이다. 또한, 지수 m과 n의 합을 반응 차수라고 하며, 이들은 실험을 통하여 결정된다. 1차 반응은 어떤 시점에서 남아 있는 반응 물질의 양이 절반으로 줄어드는 데 걸리는 시간이 일정하며, 이 시간을 반감기라고 한다.

(라) 화학 반응식에서 각 물질의 계수비는 반응에 관여한 물질의 분자수비와 몰수비, 부피비를 의미한다. 이때, 몰과 입자수, 몰과 질량, 몰과 기체의 부피 관계를 이용하면 반응물과 생성물의 몰수, 입자수, 질량, 부피를 구할 수 있다. 따라서 화학 반응식의 양적 관계를 알기 위해서는 물질의 양을 먼저 몰수로 환산하면 편리하다.

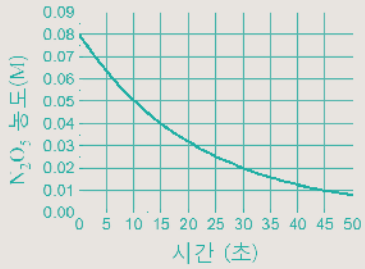
[문제 4-1] 바닥상태에 있는 수소 원자[H(g)] 1몰에 자외선을 조사하여 수소 원자 [H(g)]의 일정량을 전자가 L껍질로 전이된 들뜬상태로 만들었다. 들뜬상태로 전이된 수소 원자의 양을 측정하기 위하여 아래의 표와 같이 자외선 조사 전과 후의 수소 기체의 이온화 에너지를 측정하였다. 실험의 결과를 이용하여 들뜬상태로 전이된 수소 원자[H(g)]의 몰수를 구하는 과정을 제시문(가)와 (나)에 근거하여 논리적으로 설명하시오. [10점]

구분	자외선 조사 전	자외선 조사 후
이온화 에너지	1312.0kJ/mol	1213.6 kJ/mol

[문제 4-2] 오산화 이질소[$N_2O_5(g)$]는 다음과 같은 화학 반응식으로 분해 반응이 일어난다.

$$2N_2O_5(g) \rightarrow 4NO_2(g) + O_2(g)$$

시간에 따른 반응물 N_2O_5 농도를 시간에 따라 다음과 같은 조건에서 측정하였다. 50℃에서 초기 농도가 0.08M인 N_2O_5의 분해 반응이 부피가 일정한 용기 안에서 일어날 때, 반응물 N_2O_5의 농도 변화는 아래 그래프와 같다. 이 반응의 반응 차수와 반응 속도식을 그래프로부터 추론하고, 시간 60초에서 산소 기체의 농도를 구하는 과정을 제시문 (다)와 (라)에 근거하여 논리적으로 설명하시오. [20점]



1. 제시문의 분석 및 배경 지식

[제시문(가)]

- **출전** : 화학Ⅰ, 단원 Ⅱ, 개성 있는 원소(EBS, 탐스런 화학Ⅰ, pp. 89-92)
- **배경 지식**

  원자 내의 전자는 핵을 중심으로 등속 원운동을 한다.

  이러한 전자가 갖는 에너지는 전자의 운동 에너지와 핵과 전자 사이의 퍼텐셜 에너지의 합인 $E = \frac{1}{2}m_e v^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$이 된다.

  여기서 ε_0는 비례 상수, m_e는 전자의 질량, Z는 핵의 양성자수를 말한다.

  전자가 원운동을 하므로 구심력은 정전기적 인력과 같아 $\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = m_e\frac{v^2}{r}$이 된다.

보어는 이를 각 운동량의 관점에서 정리하여 각 운동량이 $\frac{h}{2\pi}$ 의 정수배라고 가정하였다.

이를 바탕으로 에너지 준위를 정리하면 $E_n = -\frac{Z^2 e^4 m_e}{8\varepsilon_0^2 n^2 h^2} = -(2.18\times10^{-18}J)\frac{Z^2}{n^2}$이 된다.

이때 2.18×10^{-18}을 뤼드베리 상수라 하고, 수소 원자는 $Z=1$이고, 전자 1몰에 대한 에너지로 구하면 $E_n = -\frac{1312}{n^2}$ kJ/mol이 된다.

[제시문(나)]

- **출전** : 화학Ⅰ, 단원 Ⅱ, 개성 있는 원소(EBS, 탐스런 화학Ⅰ, pp. 116–118)
- **배경 지식**

기체 상태의 원자 1몰로부터 전자 1몰을 떼어 내어 이온으로 만드는 데 필요한 최소 에너지를 이온화 에너지라고 한다. 기체 상태의 중성 원자에서 전자를 순차적으로 떼어 낼 때 필요한 에너지를 순차적 이온화 에너지라고 하며, 제1 이온화 에너지(E1), 제2 이온화 에너지(E_2), 제3 이온화 에너지(E_3), …… 로 나타낸다. 원자로부터 원자가 전자 수만큼의 전자를 떼어 내기는 비교적 쉽지만, 그 이상의 전자를 떼어 낼 때는 이온화 에너지가 매우 커지므로, 순차적 이온화 에너지 값을 해석하면 그 원자의 원자가 전자 수를 예측할 수 있다.

[제시문(다)]

- **출전** : 화학Ⅱ, 단원 Ⅳ, 화학 반응 속도(EBS, 탐스런 화학Ⅱ, pp. 248–249, 269–271)
- **배경 지식**

반응 속도는 화학 반응이 얼마나 빨리 일어나는지를 나타내는 것으로 화학 반응이 일어나는 동안 단위 시간 동안 감소한 반응물의 농도나 증가한 생성물의 농도로 나타낼 수 있다. 반응 속도는 반응물의 농도에 따라 결정되면 aA + bB ⇄ cC + dD와 같은 화학 반응의 경우, 반응 속도식은 반응물의 몰 농도의 곱으로 $\upsilon = k[A]^m[B]^n$와 같이 표현된다. 여기서 k는 반응 속도 상수라고 하는데, k는 반응에 따라 고유한 값을 가지며, 농도와는 관계가 없고 온도에 따라 변하는 값이다. 반응 속도식에서 m과 n은 각각 A와 B의 반응 차수이며, 전체 반응에 대한 반응차수는(m+n)이다. 반응 속도식에서 반응 차수 m과 n은 실험을 통해서만 구할 수 있고 화학 반응식에서의 계수와는 관계가 없다.

간단한 반응 속도식을 가지는 화학 반응으로 0차 반응과 1차 반응이 있다. 0차 반응의 경우는 반응 차수가 0이므로 $\upsilon = k[A]^m[B]^n$에서 $\upsilon = k$가 됨을 알 수 있다. 이 경우 반응 속도가 반응물의 농도에 관계없이 일정한 반응이라는 것을 알 수 있다. 즉 이러한 0차 반응의 경우는 반응물의 농도가 일정한 비율로 계속 감소한다.

1차 반응의 반응 속도식은 $\upsilon = k[A]$와 같이 주어진다. 즉 반응 속도가 반응물의 농도에 비례하여, 반응물의 농도가 높으면 반응이 빨리 진행되고 반응물의 농도가 감소하면 반응의 속도가 감소한다. 이러한 1차 반응은 일정한 반감기를 가지게 된다. 반감기는 반응물의 초기 농도가 절반으로 되는 데까지 걸리는 시간을 말한다. 즉 임의의 1차 반응에서 반응물의 초기 농도를 C라고 하면 초기 농도 C가 C/2로 되는데 소요되는 시간은 다시 이 농도 C/2가 절반인 C/4로 되는데 걸리는 시간과 동일하다. 즉 1차 반응에서 반감기는 초기 농도에 상관없이 일정하다.

[제시문(라)]

- **출전** : 화학Ⅰ, 단원 Ⅰ, 화학의 언어(EBS, 탐스런 화학Ⅰ, p. 51)
- **배경 지식**

  화학식을 이용하여 화학 변화를 나타낸 것을 화학 반응식이라고 한다. 화학 반응식은 화살표(→)를 기준으로 반응물은 왼쪽에 생성물은 오른쪽에 나타낸다. 주의할 점은 반응 전후 원자의 종류와 수가 같도록 계수를 맞추어야 하는 것이다. 이러한 화학 반응식으로부터 반응물과 생성물의 종류뿐만 아니라 반응에 관한 다음과 같은 여러 가지 정보를 얻을 수 있다 : 계수의 비, 분자수의 비, 몰수의 비, 기체의 부피비, 질량비. 이 중에서 질량비를 제외한 모든 비는 계수의 비와 동일하다. 즉 정확한 화학 반응식을 알고 있으면 계수를 이용하여 화학 반응에서의 양적 관계에 대한 파악이 가능하다. 이 중에서 질량비는 몰수비와 각 분자의 질량을 이용하여 구할 수 있다. 일반적으로는 각 분자의 질량을 분자량으로 나누어 몰수를 구한 다음에 화학 반응식을 이용하여 반응의 양적 관계를 파악하는 것이 편리하다.

2. 문항별 예시 답안 및 채점 기준

[문제 4-1] 예시 답안

- 수소 원자 1몰이 자외선을 쪼인 후에 일부가 들뜬 상태로 전이하였으므로 들뜬 상태에 있는 수소 원자의 양을 x몰 이라고 하면 바닥상태에 남아있는 수소 원자의 양은 (1- x)몰로 표현할 수 있다.
- 제시문 (가)와 (나)를 이용하면 바닥상태와 들뜬상태의 이온화 에너지를 아래와 같이 표시할 수 있다.

  바닥상태의 이온화 에너지: $E_\infty - E_1$

  들뜬상태의 이온화 에너지: $E_\infty - E_2$, L전자 껍질(n=2)로 전이하였다고 하였으므로 n=2 만 고려한다.
- 제시문(가)에 주어진 에너지 준위를 이용하여 이온화 에너지를 구할 때 필요한 에너지 준위에 대한 식을 정리하면 아래와 같다.

$$E_\infty = -\frac{R}{\infty} = 0,\ E_1 = -R,\ E_2 = -\frac{R}{4}$$

- 이 결과를 바탕으로 바닥상태와 들뜬상태의 이온화 에너지를 나타내면 다음과 같다.

$$\text{바닥상태의 이온화 에너지} = E_\infty - E_1 = 0 + R = R$$

$$\text{들뜬상태의 이온화 에너지} = E_\infty - E_2 = 0 + \frac{R}{4} = \frac{R}{4}$$

- 실험 결과에서 자외선 조사 전에는 모든 수소 원자가 바닥상태에 있으므로 다음의 관계식을 이용하여 상수 R값을 구할 수 있다.

$$\text{바닥상태의 이온화 에너지} = R = 1312.0\ \text{kJ/mol}$$

- 자외선 조사 후에 측정된 이온화 에너지는 아래와 같이 바닥상태의 이온화 에너지와 들뜬상태의 이온화 에너지의 조합으로 이루어진다.

  자외선 조사 후의 이온화 에너지 =

  (바닥상태의 이온화 에너지) x (1-x) + (들뜬상태의 이온화 에너지) x = R(1- x) + R/4 X x = 1213.6 kJ/mol
- 위의 식에서 상수 R은 이미 주어져 있으므로(1-x) + x /4 = 1213.6/1312 = 0.925.

  주어진 식을 풀면 x=0.1 즉, 1몰의 수소 원자 중에서 0.1 몰의 원자가 들뜬 상태로 전이된다.

채점기준

- 제시문 (가)에서 주어진 에너지 준위를 이용하여 바닥상태와 들뜬상태의 이온화 에너지를 표현하였으면 +3점
- 자외선 조사 전의 이온화 에너지를 이용하여 상수 R값을 1312.0 kJ/mol로 결정하였으면 +3점.
- 자외선 조사 후의 이온화 에너지 값을 이용하여 들뜬상태의 수소 원자의 몰수를 정확히 구하였으면 +4점.

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~2점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 10점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

[문제 4-2] 예시 답안

- 제시문 (다)에서, 어떤 시점에 남아 있는 반응 물질의 양이 절반으로 줄어드는 데 걸리는 시간, 즉 반감기가 일정한 반응을 1차 반응이라고 명시하였다. 문제에 주어진 그래프를 보면 초기 농도 0.08M이 0.04M로 감소하는 데 걸린 시간이 15초라는 것을 알 수 있다. 또한, 0.04M이 절반의 농도인 0.02M로 되는 데 걸린 시간이 15초 라는 것을 알 수 있다. 이와 같이 반감기가 15초로 일정하므로 주어진 반응은 1차 반응이라는 것을 알 수 있다.

- 제시문 (다)에 따라 반응 속도식은 비례 상수 k와 반응물의 농도 그리고 반응 차수를 이용하여 표현할 수 있다. 주어진 반응에서 반응물은 $[N_2O_5(g)]$이고 반응 차수는 1차인 반응이므로 반응 속도식은 다음과 같다.

$$\upsilon = k[N_2O_5]$$

- 주어진 화학 반응식에서 60초 후의 산소 기체의 농도를 알기 위해서는 우선 60초 후에 남아 있는 반응물 $[N_2O_5(g)]$의 양을 알아야 한다. 주어진 반응이 1차 반응이라는 것을 이해하면 60초 후의 반응물의 농도도 쉽게 추론할 수 있다. 즉 한 번의 반감기(15초) 후의 농도는 0.04M, 두 번의 반감기(30초) 후의 농도는 0.02M, 세 번의 반감기(45초) 후의 농도는 0.01M, 네 번의 반감기(60초) 후의 농도는 0.005M이다.

- 반응이 진행된 용기의 일정한 부피가 1L라고 가정하면 60초의 반응 시간 후에 소모된 $[N_2O_5(g)]$의 몰수는 0.06 − 0.005 = 0.055이다. 아래의 화학 반응식의 계수비를 이용하면 생성된 산소 기체의 몰수는 0.0275임을 알 수 있다. 즉 생성된 산소 기체의 농도는 27.5mM이다.

$$2N_2O_5(g) \rightarrow 4NO_2(g) + O_2(g)$$

채점기준

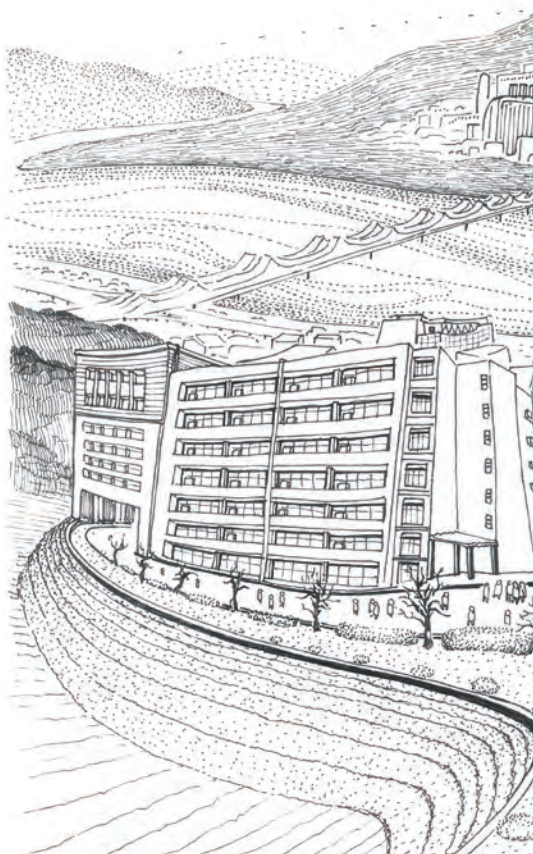
- 제시문 (다)와 그래프에 주어진 정보를 이용하여 반응의 차수를 논리적으로 설명하면 +5점
- 제시문 (다)에 주어진 정보를 이용하여 반응 속도식을 정확히 표현하면 +5점.
- 제시문 (다)와 그래프에 주어진 정보를 이용하여 60초 후의 반응물의 농도를 논리적으로 추론하면 +5점.
- 제시문 (라)에 의거하여 주어진 화학 반응식의 계수비로부터 몰수비를 계산하고 산소 기체의 농도를 정확히 제시하면 +5점

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~3점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 20점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

CHUNG-ANG UNIVERSITY







중앙대학교

서울캠퍼스 156-756 서울특별시 동작구 흑석로 84 **Tel.** 02-820-5114/6114

안성캠퍼스 456-756 경기도 안성시 대덕면 서동대로 4726 **Tel.** 031-670-3114/4114

입 학 안 내 **Tel.** 02-820-6393 http://admission.cau.ac.kr

http://www.cau.ac.kr/

본교의 동의 없이 무단 복제하거나 임의로 사용할 수 없습니다.

BECAUS

중앙대학교

2016학년도 중앙대학교 논술백서

| 자연계열 별책부록 |



Contents

01_2015학년도 수시 일반 논술(자연계열Ⅰ)

1. 수학 01
2. 생명과학 03
3. 물리 05
4. 화학 07

02_2015학년도 수시 일반 논술(자연계열Ⅱ)

1. 수학 09
2. 생명과학 12
3. 물리 15
4. 화학 16

03_2015학년도 모의 논술Ⅰ

1. 수학 18
2. 생명과학 20
3. 물리 21
4. 화학 23

04_2015학년도 모의 논술Ⅱ

1. 수학 24
2. 생명과학 27
3. 물리 30
4. 화학 32



01_2015학년도 수시 일반 논술(자연계열 I)

1. 수학

[문제 1] 공과 주사위를 이용하여 상금이 결정되는 게임이 있다. 바구니 안에 1~6까지 번호가 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 들어 있다. 이 바구니에서 임의로 한 개의 공을 꺼낸 후, 주사위를 던져서 4 이하의 눈이 나오면 꺼낸 공의 번호에 1000원을 곱한 금액을 상금으로 받으며, 주사위를 던져서 5 또는 6의 눈이 나오면 바구니에서 꺼낸 공의 번호에 관계없이 2000원을 상금으로 받는다. 특별히 주사위의 눈이 공의 번호와 일치할 경우, 상금은 두 배가 된다. 이 게임에서 상금의 기댓값을 구하시오. [20점]

[문제 2] 다음 제시문 (가)~(다)를 읽고 문제에 답하시오.

(가) 다항식 A를 다항식 $B(B \neq 0)$로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R이라 하면

$$A = BQ + R \text{ (단, } R\text{의 차수는 } B\text{의 차수보다 낮다.)}$$

의 꼴로 나타낼 수 있다

(나) x에 대한 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$ (단, $g(x) \neq 0$)에 대해 $\frac{f(x)}{g(x)}$의 꼴로 나타내어지는 식을 유리식이라 한다.
특히, $g(x) = 1$이면 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 다항식이다. 예를 들어, 아래의 식은 모두 유리식이다.

$$\frac{5x-2}{2x^2-3x+4}, \quad \frac{2x^3+3}{-2x^2+5x+3}, \quad 2x^3+5x^2-8$$

(다) $C \neq D$일 때, $\frac{1}{CD} = \frac{1}{D-C}\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{D}\right)$이 성립한다.

[문제 2-1] 다항식 $x^{10}+x^9+x^8+\cdots+x^2+x+1$을 $(x+1)^3$으로 나눈 나머지를 $a(x+1)^2+b(x+1)+c$라 할 때, 계수 a, b, c를 각각 구하시오. [10점]

[문제 2-2] $\int \frac{10x+p}{x^2(x+1)^2}dx$가 x에 대한 유리식이 되도록 상수 p를 정하시오. [10점]

[문제 3] 다음 제시문을 읽고 문제에 답하시오.

아래 왼쪽 그림에서 원을 포함하는 평면 m과 이 평면의 x축을 공유하는 평면 n이 있고, 두 평면이 이루는 각이 α이다. 평면 m위의 원을 평면 n위에 정사영하면 타원이 되고, 이 타원의 넓이는 원의 넓이에 $\cos\alpha$를 곱한 것과 같다.

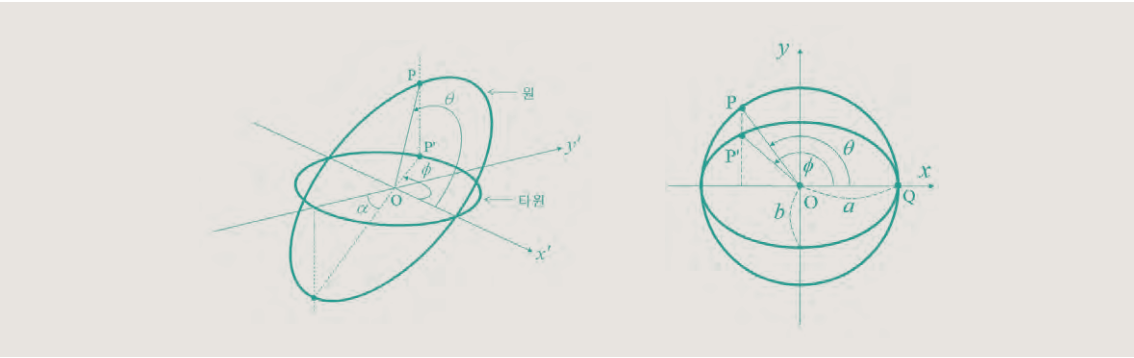
평면 m위에 반지름이 α이며, 중심이 원점인 원이 있을 때, 이 원 위의 점 P의 좌표 (x, y)는 다음과 같다.

$$x = a\cos\theta,\ y = a\sin\theta,\ 0 \le \theta < 2\pi$$

여기서 θ는 원점과 점 P를 연결한 선이 x축과 이루는 양의 각도이다. 이 원을 평면 n위에 정사영하면 장축의 길이가 $2a$이고, 단축의 길이가 $2b$인 타원이 된다. 이때 $\cos\alpha = b/a$이다. 원 위의 점 P는 타원 위의 점 P'로 정사영되고, 타원을 포함하는 평면 n의 좌표계에서 P'의 좌표 (x', y')는 다음과 같다.

$$x' = a\cos\theta,\ y' = b\sin\theta,\ 0 \le \theta < 2\pi$$

평면 m위의 좌표계와 평면 n위의 좌표계를 일치시켜 타원과 원의 관계를 나타내면 아래 오른쪽 그림과 같다.



[문제 3-1] 제시문에서 ϕ는 선분 OP'이 x축과 이루는 양의 각도이다.

제시문에 근거하여 P'의 좌표 $(x', y') = (a\cos\theta, b\sin\theta)$를 $\tan\phi$로 나타내시오. 단, $0 \le \phi < \pi/2$이다. [10점]

[문제 3-2] 제시문에 주어진 타원의 장축의 길이가 $2\sqrt{3}$, 단축의 길이가 2, $\phi = \pi/4$일 때, 제시문에 근거하여 부채꼴 OQP'의 면적을 구하시오. [20점]

2. 생명과학

[문제 4] 다음 제시문 (가)~(라)를 읽고 문항에 답하시오.

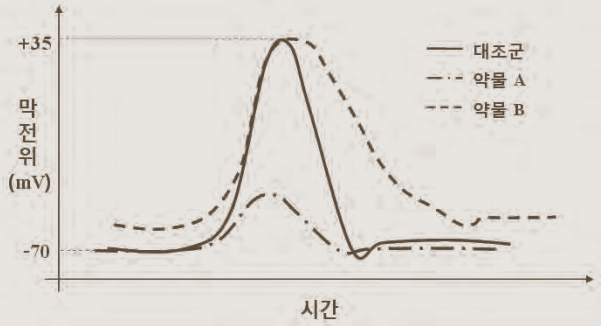
(가) 자극을 받지 않았을 때 신경세포(뉴런)의 세포막에 형성되어 있는 막전위를 측정해 보면 뉴런의 내부는 음(−)으로, 외부는 양(+)으로 대전되어 전위차가 나타난다. 이때 형성되는 세포막 내외의 전위차를 휴지 전위라고 한다. 사람의 경우 휴지 전위는 약 −70mV이며, Na^+–K^+ 펌프와 Na^+ 통로 및 K^+ 통로에 의해 유지되고 있다. 세포 안팎의 농도 차에 따라 Na^+은 세포 내부로, K^+은 세포 외부로 확산되려고 하는데, 이온은 지질 성분의 세포막을 통과하지 못하므로 각각 Na^+ 통로와 K^+ 통로를 통해 세포 안팎으로 확산된다. 이때 Na^+ 통로에 비해 K^+ 통로가 열려 있는 것이 더 많아 Na^+에 비해 K^+의 투과도가 더 높다. 이 때문에 K^+이 세포 외부로 빠져나가고, 또 내부에 존재하는 단백질이 (−) 전하를 띠고 있기 때문에 뉴런 내부는 (−), 뉴런 외부는 (+)가 되며, 막 내외의 전위차가 −70mV 정도가 되면 평형을 이루게 된다.

(나) 활동 전위는 뉴런의 막전위가 휴지 전위에서 시작하여 최대치로 올라갔다가, 다시 휴지 전위로 되돌아오는 신경 신호를 말한다. 활동 전위를 이루는 전기적 변화를 살펴보면, 충분히 강한 자극을 뉴런에 주면 일부 Na^+ 통로가 열려 세포 외부의 Na^+이 세포 내부로 확산되어 들어와 막전위가 역치 전위인 −50mV까지 올라간다. 역치 전위에 이르면 더 많은 Na^+ 통로가 열리게 되며, 세포 외부의 Na^+이 세포 내부로 대량 확산되어 들어오게 되고, 이에 따라 이 부분의 막전위가 +35mV로 역전된다. 막전위가 최고점에 이르면 세포막의 투과성이 변하고 Na^+ 통로가 닫혀 불활성화되며, K^+ 통로가 열려 K^+이 세포 밖으로 확산되어 나가게 된다. 이에 따라 막전위는 빠른 속도로 원래의 휴지 전위 이하로 떨어지는 재분극이 일어난다. 재분극 이후 세포막의 투과성이 원래대로 회복됨에 따라 Na^+–K^+ 펌프가 Na^+을 세포 밖으로, K^+을 세포 안으로 이동시켜 이온을 재배치함으로써 막전위는 휴지 전위 상태를 회복한다.

(다) 흥분이 축삭 돌기 말단에 도달하면 Ca^{2+}이 유입되면서 말단에 있는 시냅스 소포에서 아세틸콜린과 같은 신경 전달 물질이 시냅스 틈으로 분비된다. 신경 전달 물질은 시냅스 틈으로 확산되어, 다음 뉴런 또는 근육과 같은 흥분성 세포의 세포막에 있는 이온 통로가 열리게 한다. 충분한 양의 이온 통로가 열리면, 다음 뉴런의 세포막에서 탈분극이 일어나 흥분이 전달된다. 한편, 시냅스에서 흥분은 축삭 돌기에서 다음 뉴런의 가지 돌기나 세포체로만 전달되며 반대 방향으로는 전달되지 않는다. 그 이유는 신경 전달 물질을 분비하는 시냅스 소포가 축삭 돌기 말단에만 있기 때문이다.

(라) 운동 뉴런의 말단은 근육 섬유막과 시냅스처럼 좁은 틈을 두고 접해 있다. 흥분이 운동 뉴런을 따라 전도되어 축삭 돌기 말단에 도달하면 시냅스 소포에서 아세틸콜린이 분비되고, 아세틸콜린이 근육 섬유막으로 확산되면 근육 섬유막에 있는 아세틸콜린 수용체를 활성 시켜서 근육 섬유막이 탈분극됨으로써 활동 전위가 발생한다. 이 활동 전위가 근육 원섬유에 전달되면 근육 원섬유 마디가 짧아져 근육이 수축하게 된다. 근육 섬유는 역치 이상의 자극에서는 자극의 세기와 관계없이 반응의 크기가 항상 일정하다.

[문제4-1] 다음 그래프는 뉴런에 약물 A와 약물 B를 각각 처리한 후, 자극이 주어졌을 때 막전위의 변화를 측정한 결과이다. 약물 A와 약물 B에 의해 막전위의 변화가 대조군과 다르게 나타난 이유를 제시문 (가)와 (나)에 근거하여 논리적으로 설명하시오. 단, 대조군에는 약물을 처리하지 않았다. [10점]



[문제4-2] 초파리 유전자 a, b, c가 신경 활성과 근육 수축에 미치는 영향을 알아보기 위해, 정상 초파리, 한 개의 유전자만 조작된 단일 돌연변이 초파리, 두 개의 유전자가 조작된 이중 돌연변이 초파리를 이용하여 실험을 수행하였다. 초파리의 운동 뉴런에서 활동 전위의 생성 여부와 근육의 수축 여부를 측정하여 〈표 1〉에 정리하였다. 추가로, 초파리의 근육에 아세틸콜린을 처리한 후, 근육의 수축 여부를 〈표 2〉에 정리하였다. 이 결과들을 종합하여 활동 전위 생성 및 근육 수축 과정에서 유전자 a, b, c로부터 발현되는 단백질의 역할을 제시문 (다)와 (라)에 근거하여 논리적으로 설명하시오. [20점]

〈표 1〉

	정상 개체	단일 돌연변이			이중 돌연변이	
		a	b	c	a, b	b, c
활동 전위 생성	O	X	O	O	X	O
근육 수축	O	X	X	X	X	X

O : 있음 X : 없음

〈표 2〉

	정상 개체	단일 돌연변이			이중 돌연변이	
		a	b	c	a, b	b, c
아세틸콜린 처리 후 근육 수축	O	O	O	X	O	X

O : 있음 X : 없음

3. 물리

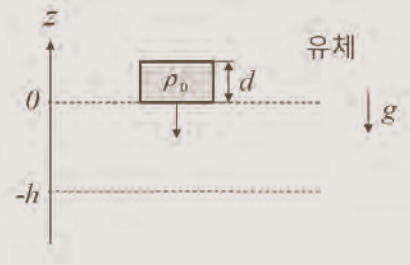
[문제 4] 다음 제시문 (가)~(다)를 읽고 문항에 답하시오.

(가) 유체에 잠긴 물체에 작용하는 부력은 잠긴 부분의 부피에 해당하는 유체의 무게와 같다. 밀도가 ρ인 유체에 부피 V만큼 물체가 잠겼을 때, 이 물체가 받는 부력은 $F=\rho Vg$가 된다. 여기서 g는 중력 가속도이며, 중력과 부력의 합이 물체에 작용하는 알짜힘이다.

(나) 용수철에 힘이 작용하여 용수철이 x만큼 늘어났을 때 x는 용수철에 작용한 힘에 비례한다. 따라서 길이가 x만큼 늘어난 용수철이 원래의 길이로 되돌아가려는 탄성력은 $F=-kx$이다. 이를 훅의 법칙이라고 한다. 여기서 (-)는 탄성력과 용수철의 변위가 반대 방향이라는 의미이며, k는 용수철의 특성에 따라 정해지는 용수철 상수이다. 용수철 상수가 k인 용수철에 질량 m인 물체를 매달아 진동시키면 주기는 $T=2\pi\sqrt{m/k}$이다.

(다) 가속도가 일정한 운동을 등가속도 운동이라 하는데, 이것은 속도가 시간에 따라 일정하게 변하는 운동이다. 가속도가 a로 일정한 경우, 처음 시각을 0, 나중 시각을 t, 처음 속도를 v_0, 나중 속도를 v라고 하면 $v=v_0+at$의 식이 성립한다. 시간 t동안 움직인 변위는 속도–시간 그래프의 아래 면적에 해당하며, 등가속도 운동에서 처음 시각을 0, 나중 시각을 t, 처음 속도를 v_0, 처음 위치를 0, 나중 위치를 s라고 하면 $s=v_0t+at^2/2$이 성립한다.

[문제4–1] 넓은 공간에 밀도가 ρ_1인 유체가 가득 차 있다. 이 공간에서 다음 그림과 같이 $z=0$에 정지해 있던 직육면체 형태의 물체가 낙하를 시작하였다. 물체의 두께가 d, 밀도가 ρ_0일 때 물체가 h만큼 낙하하여 $z=-h$에 도달할 때까지 소요되는 시간을 구하는 과정을 위 제시문에 근거하여 논리적으로 설명하시오. 단, $\rho_1 < \rho_0$이고, 중력 가속도는 g이며, 부력과 중력을 제외한 다른 힘은 없다고 가정한다. [10점]



[문제4–2] [문제 4–1]에서 유체의 밀도가 $z \geq 0$에서 ρ_1, $z<0$에서 ρ_2이고, [문제 4–1]에서와 동일한 물체가 위 그림과 같이 $z=0$에 정지해 있다가 낙하를 시작한다고 하자. 위 제시문에 근거하여 이 물체의 운동이 주기 운동이 됨을 보이고, 그 주기를 구하는 과정을 논리적으로 설명하시오. 단, $\rho_1 < \rho_0 < (\rho_1+\rho_2)/2$이고, 중력 가속도는 g이며, 부력과 중력을 제외한 다른 힘은 없다고 가정한다. [20점]

4. 화학

[문제4] 다음 제시문 (가)~(라)를 읽고 문제에 답하시오.

(가) 탄소 화합물 중에서 가장 기본이 되는 것은 탄소(C) 원자와 수소(H) 원자로만 이루어진 탄화수소이다. 탄소 원자 사이에 단일 결합으로 이루어진 탄화수소를 포화 탄화수소라고 하며, 사슬 모양의 포화 탄화수소를 알케인이라고 한다. 알케인에는 메테인(CH_4), 에테인(C_2H_6), 프로페인(C_3H_8) 등이 있다. 탄소 원자 사이에 이중 결합이나 삼중 결합으로 이루어진 탄화수소를 불포화 탄화수소라고 하며 이중 결합을 가지고 있는 사슬 모양의 불포화 탄화수소를 알켄이라고 한다. 알켄에는 에텐(C_2H_4), 프로펜(C_3H_6) 등이 있다. 한편 삼중 결합을 가지고 있는 사슬 모양의 불포화 탄화수소를 알카인이라고 하며, 알카인에는 에타인(C_2H_2), 프로파인(C_3H_4) 등이 있다.

(나) 공유 결합을 형성하는 원자들은 중심 원자와 180°, 120°, 109.5° 등 일정한 결합각을 이룬다. 공유 결합 분자에서 중심 원자를 둘러싸고 있는 전자쌍들은 서로 같은 전하를 띠고 있으므로 반발력이 최소가 되기 위해서 최대한 멀리 떨어져 있으려고 한다. 이를 전자쌍 반발 이론이라고 한다.

(다) 화합물을 이루는 원소의 종류와 수를 알아내는 실험을 원소 분석이라고 한다. 탄소(C), 수소(H), 산소(O)로 이루어진 화합물의 시료를 완전 연소시켰을 때 생성되는 이산화 탄소(CO_2)와 물(H_2O)의 질량을 측정하여 성분 원소인 탄소(C), 수소(H), 산소(O)의 질량비를 알아낸다. 각 성분의 질량을 각 성분의 원자량으로 나누어 주면 조성비를 구할 수 있다. 조성비를 구한 후, 구성 원소의 원자 개수의 비율을 가장 간단한 정수비로 나타낸 식을 실험식이라고 한다. 탄소(C), 수소(H), 산소(O)의 원자량은 각각 12, 1, 16이다.

(라) 아보가드로 법칙에 따르면 모든 기체는 온도와 압력이 같을 때, 같은 부피 속에 같은 수의 분자가 들어 있다. 분자 수가 같으면 몰수도 같으므로, 온도와 압력이 같은 조건에서 기체 1몰의 부피는 기체의 종류에 상관없이 같다.

[문제4-1] 결합각의 최댓값이 180°인 사슬 모양 탄화수소의 실험식이 C_3H_5로 결정되었다. 제시문 (가), (나), (다)에 근거하여, 이 사슬 모양 탄화수소의 분자량(g/mol)을 구하는 과정을 논리적으로 설명하고 그 구조식을 1개만 제시하시오. [10점]

[문제4-2] 다음 그림과 같은 장치를 이용하여 액체 상태의 시료 X에 대해 원소 분석 실험을 수행하였다.



[원소 분석 장치]

시료 X를 원소 분석 장치에 넣고 가열하여 완전 연소시켰을 때 이산화 탄소(CO_2)와 물(H_2O)만 생성되었다. 원소 분석 장치에서 반응이 완결된 후 염화 칼슘(C_aCl_2)을 채운 염화 칼슘관에서 54mg, 수산화 나트륨(NaOH)을 채운 수산화 나트륨관에서 132mg의 질량 증가가 측정되었다. 시료 X의 원소 분석 실험을 통해 탄소(C)와 수소(H)의 몰수비가 결정되었고, 시료 X의 실험식을 결정하기 위해 추가적으로 진행된 실험과 그 결과는 다음과 같다.

❶ 소량의 시료 X를 넣은 실린더에 건조한 산소(O_2) 기체를 채운 후 상온(25℃)에서 실린더 내부의 부피를 측정하였다.

❷ 실린더를 가열하여 연소 반응을 완결시킨 후 실린더를 냉각하여 상온(25℃)으로 유지한 상태에서 실린더 내부의 부피를 측정하였다.

● 실험 결과 : 연소 반응 전과 후 실린더 내부의 부피

연소 반응 전	연소 반응 후
400 mL	300 mL

위의 실험 결과와 제시문 (다), (라)에 근거하여 시료 X의 실험식을 논리적으로 추론하시오. 단, 계수를 맞추지 않은 화학 반응식은 다음과 같고, 실린더 안의 액체 상태 물질의 부피는 무시할 정도로 작다. [20점]

$$X(l) + O_2(g) \rightarrow H_2O(l) + CO_2(g)$$

02_2015학년도 수시 일반 논술(자연계열Ⅱ)

1. 수학

[문제 1] 50 m 전방에 한 변의 길이가 8 m인 정사각형의 과녁이 있고, 정사각형의 중심을 기준으로 각각 반지름이 1 m, 2 m, 3 m인 원판 A, B, C가 있다. 한 개의 화살을 쏘아 원판 A에 맞힐 경우 10만 원의 상금을, 원판 A를 제외한 원판 B에 맞힐 경우 5만 원의 상금을, 원판 B를 제외한 원판 C에 맞힐 경우 3만 원의 상금을 받는다고 하자. 원판 C를 제외한 과녁에 맞힐 경우에는 상금이 없다. 이 게임의 참가비가 x만 원일 때, 상금에서 참가비를 뺀 이익의 기댓값이 0 이상이기 위한 x의 최댓값을 구하시오. 단, 화살은 언제나 과녁 안에 맞으며, 과녁 안의 모든 부분에 같은 확률로 맞는다. [20점]

[문제 2] 다음 제시문 (가)~(다)를 읽고 문제에 답하시오.

(가) $x \to \infty$일 때, $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$은 일정한 값에 수렴함이 알려져 있으며, 그 극한값을 e로 나타낸다.

즉, $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$이다.

(나) 수렴하는 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$과 연속함수 $f(x)$에 대하여 다음의 등식이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \quad (\text{단, } b_n \neq 0, \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0)$$

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)$$

(다) 좌표평면 위의 한 점 (x_0, y_0)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는 다음과 같다.

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

[문제 2-1] 다음 수열의 n번째 항을 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+100a_n}{n+a_n}\right)^n$을 구하시오. [10점]

0.1, 0.101, 0.10101, 0.1010101, ……

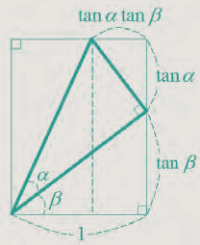
[문제 2-2] [문제 2-1]에서 정의된 수열 $\{a_n\}$의 첫째 항부터 n번째 항까지의 합을 S_n이라 하자.

점 $(S_n, S_n^2-6S_n+11)$과 직선 $x-y-10=0$사이의 거리가 최소가 되는 자연수 n을 구하시오. [10점]

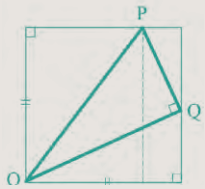
[문제 3] 다음 제시문 (가), (나)를 읽고 문제에 답하시오.

(가) 직각삼각형과 한 꼭짓점을 공유하는 직사각형을 이용하여 탄젠트함수의 덧셈정리를 그림으로 나타내면 다음과 같다.

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

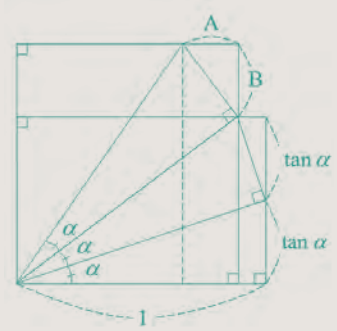


(나) 직각삼각형을 포함하는 최소 정사각형은 다음 그림과 같다. 즉, 직각삼각형의 최소각에 있는 꼭짓점 O와 정사각형의 한 꼭짓점을 일치시켰을 때, 직각삼각형의 다른 두 꼭짓점 P와 Q는 정사각형의 두 변 위에 있어야 한다.



[문제 3–1] 제시문 (나)의 그림에서 직각삼각형 OPQ의 세 변의 길이가 3, 4, 5라고 하자. 이 직각삼각형을 포함하는 최소 정사각형의 한 변의 길이를 위 제시문에 근거하여 구하시오. [10점]

[문제 3-2] 제시문 (가)에 근거하여 다음 그림에서 A와 B의 길이를 구하시오. [20점]



2. 생명과학

[문제 4] 다음 제시문 (가)~(라)를 읽고 문항에 답하시오.

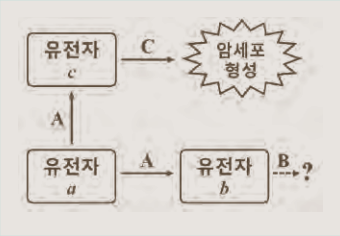
(가) 피드백은 항상성 유지에 중요한 역할을 하는데, 양성 피드백은 반응의 결과가 원래의 자극을 더욱 증가시켜 같은 방향의 반응을 일으키게 하는 것이고, 음성 피드백은 반응의 결과가 그 반응을 억제하는 방향으로 작용하는 것이다. 음성 피드백 작용은 신체의 생리 기능이나 체액의 성분이 좁은 범위 내에서 유지되도록 하여 갑작스러운 변화를 막는 데 목적이 있다.

(나) 세포에서는 모든 유전자가 발현되는 것이 아니라 필요한 유전자만 선택적으로 발현된다. 전사 인자와 같은 조절 단백질은 유전자의 전사가 시작되도록 도와준다. 조절 유전자가 발현되어 조절 단백질이 만들어지면, 이 조절 단백질이 다른 여러 조절 유전자를 발현시키는 과정이 연속적으로 일어난다. 세포에서는 노화, 바이러스, 화학 물질, 방사선, 유전적인 요인 등에 의해 세포 분열을 조절하는 유전자에 돌연변이가 일어날 수 있다. 이때 만들어지는 비정상적인 조절 단백질에 의해, 세포 분열이 조절되지 않는 암세포가 형성될 수 있다.

(다) 우리 몸에는 호르몬의 분비 조절 기구가 있어서 혈액 중 호르몬의 농도가 일정 수준으로 유지된다. 예를 들면, 시상 하부에서 분비된 갑상샘 자극 호르몬 방출 호르몬(TRH)이 뇌하수체 전엽을 자극하면 갑상샘 자극 호르몬(TSH)의 분비가 촉진된다. 그리고 TSH는 갑상샘을 자극하여 티록신을 분비하게 한다. 혈중 티록신의 양이 적정 수준 이상으로 증가하면 이 정보가 다시 시상 하부와 뇌하수체로 전달되어 TRH와 TSH의 분비를 억제한다.

(라) 뉴런이 자극을 받으면 세포막에 있는 통로가 열려 바깥쪽에 있던 많은 Na^+이 빠른 속도로 세포 안으로 들어와 순간적으로 막 바깥쪽은 (−), 안쪽은 (+)로 전위가 역전되는데, 이러한 현상을 탈분극이라고 한다. 탈분극이 일어나면 활동 전위가 발생한다. 활동 전위가 축삭 돌기 말단에 도달하면 Ca^{2+}이 유입되면서 말단에 있는 시냅스 소포에서 신경 전달 물질이나 호르몬과 같은 다양한 세포 활성 조절 인자들이 분비된다.

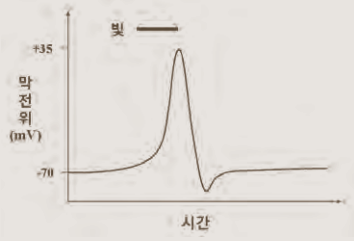
[문제4–1] 아래 그림은 암세포 형성에 관여하는 유전자 a, b, c로부터 각각 만들어지는 조절 단백질 A, B, C의 작용 중 일부를 나타낸 것이다. 유전자 a로부터 만들어지는 조절 단백질 A는 유전자 b와 c의 발현을 유도하며, 조절 단백질 C는 암세포 형성을 촉진한다. 유전자 c만 존재하고 유전자 a, b가 존재하지 않는 어떤 세포에 유전자 a, b를 넣어 발현시킨 후, 이 세포가 암세포로 변화되는지를 관찰하여 아래 표에 정리하였다. 이 결과와 제시문 (가), (나)에 근거하여, 단백질 B에 의해 유전자 a, c의 발현이 조절되는 방식을 피드백 작용을 중심으로 설명하시오. [10점]



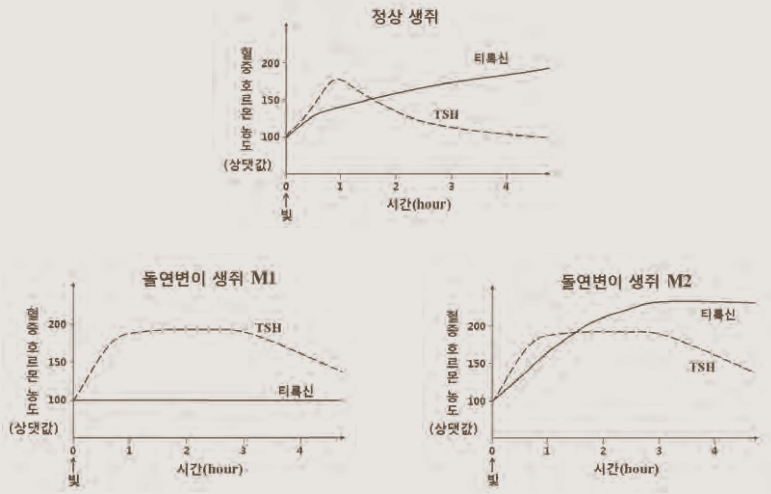
	발현시킨 유전자			
	없음	a	b	a, b
암세포 형성 여부	X	O	X	X

O : 형성됨, X : 형성되지 않음

[문제4-2] 최근 해조류의 세포에서 발견된 이온 통로 P는 특정한 파장의 빛에 의해 개폐가 조절된다. 이 이온 통로 P를 뉴런에 발현시킨 후 해당 파장의 빛을 쬐어 주었더니 뉴런의 막전위가 다음 그래프와 같이 변화하였다.



아래 그래프들은 이온 통로 P를 TRH 분비 뉴런에 발현시키고 해당 파장의 빛을 쬐어 준 후, 시간에 따른 TSH와 티록신의 혈중 농도 변화를 측정한 결과이다. 이 결과에서 돌연변이 생쥐 M1, M2의 TSH와 티록신의 농도 변화가 정상 생쥐와 다르게 나타나는 이유와, 처음부터 빛을 쬐어 주지 않았을 경우에 나타날 돌연변이 생쥐 M1, M2의 TSH와 티록신의 농도 변화 양상을 제시문 (가), (다), (라)에 근거하여 논리적으로 설명하시오. [20점]



3. 물리

[문제 4] 다음 제시문 (가), (나)를 읽고 문제에 답하시오.

(가) 진동이 퍼져 나가는 것을 파동이라고 하고, 그 파장은 보통 λ로 표시하며 단위로 m를 사용한다. 진동수는 1초 동안 진동하는 횟수를 나타내며, 보통 f로 표시하고, 단위로 Hz를 사용한다. 주기는 한 번 왕복하는 데 걸리는 시간을 나타내며, 보통 T로 표시하고, 단위로 초를 사용한다. 이때 진동수와 주기는 $T=1/f$의 관계를 만족한다. 파동의 속력 v는 파장 λ를 주기 T로 나누면 구할 수 있다. 빛은 파동이므로 한 매질에서 다른 매질로 진행할 때 매질의 경계면에서 굴절된다. 빛이 굴절률 n_1인 매질1에서 굴절률 n_2인 매질2로 입사할 때에는 입사각 θ_1과 굴절각 θ_2 사이에 다음과 같은 스넬 법칙이 항상 성립한다.

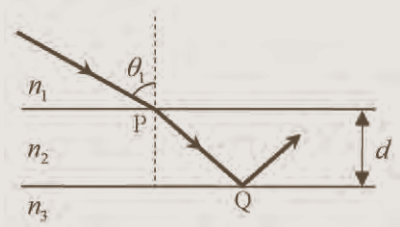
$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{v_1}{v_2}=\frac{n_2}{n_1}$$

여기서 v_1은 매질 1에서 빛의 속력, v_2는 매질 2에서 빛의 속력이다.

(나) 물속에서 공기 중으로 빛이 진행할 때에는 입사각보다 굴절각이 크므로 입사각을 점점 더 크게 하면 굴절각이 $90°$가 되게 할 수 있다. 굴절각이 $90°$가 된다는 것은 공기 중으로 나가는 빛이 없다는 것과 같다. 이때의 입사각을 임계각이라고 한다. 따라서 입사각을 임계각보다 더 크게 하면 더 이상 공기 중으로 굴절되어 나가는 빛은 없고, 모든 빛이 물속으로 다시 반사되게 된다. 이러한 경우를 전반사라고 한다. 즉, 굴절되어 나가는 빛이 없이 모두 반사된다고 해서 전반사라고 한다.

[문제4-1] 공기 중에서 빛의 속력을 c라 할 때 물질 A에서 황색 빛의 속력은 $c/2$로 측정되었다. 이 빛이 물질 A에서 공기 중으로 나가는 경우 임계각의 유무를 위 제시문에 근거하여 판단하고, 임계각이 존재할 경우 그 값을 구하는 과정을 논리적으로 설명하시오. 단, 공기의 굴절률은 1이다. [10점]

[문제4-2] 공기 중에서 속력이 c 이고 진동수가 f 인 빛이 아래 그림과 같이 굴절률 n_1인 매질1에서 굴절률 n_2인 매질2를 통과하여 굴절률 n_3인 매질3으로 입사한다. 매질 2의 두께는 d 이고 입사각은 θ_1 이다. 위 제시문에 근거하여 이 빛이 P에서 Q로 진행하는 동안 진동한 횟수를 구하고, 이 빛이 매질 2와 매질 3의 경계면에서 전반사될 경우 굴절률 n_1, n_2, n_3의 대소 관계를 논리적으로 설명하시오. 단, 공기의 굴절률은 1이다. [20점]



4. 화학

[문제 4] 다음 제시문 (가)~(다)와 〈실험 및 결과〉를 읽고 문제에 답하시오.

(가) 화학 반응에서 전자를 잃는 것을 산화라고 하고, 전자를 얻는 것을 환원이라고 한다. 대부분의 금속은 산과 반응하여 금속 양이온이 되고, 수소 기체가 발생한다. 질산 은($AgNO_3$) 수용액에 구리(Cu)판을 넣으면, 구리가 산화되어 용액 속으로 녹아들어 가고, 용액 중의 은 이온은 환원되어 은으로 석출된다. 서로 다른 금속과 금속 이온 사이의 이러한 반응을 이용하면 금속의 반응성 크기를 비교할 수 있다.

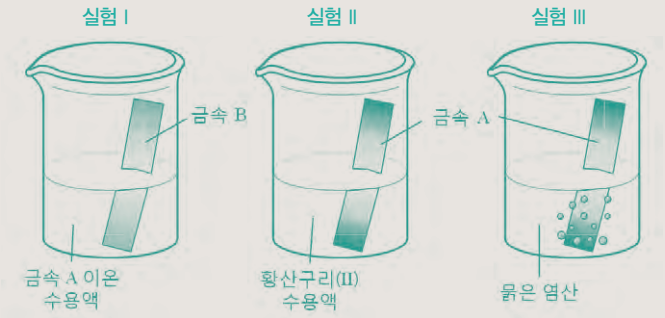
(나) 기체 상태의 원자 1몰로부터 전자 1몰을 떼어 내어 이온으로 만드는 데 필요한 최소 에너지를 이온화 에너지라고 한다. 기체 상태의 중성 원자에서 전자를 순차적으로 떼어 낼 때 필요한 에너지를 순차적 이온화 에너지라고 하며, 제1 이온화 에너지(E_1), 제2 이온화 에너지(E_2), 제3 이온화 에너지(E_3), ……로 나타낸다. 원자로부터 원자가 전자 수만큼의 전자를 떼어 내기는 비교적 쉽지만, 그 이상의 전자를 떼어 낼 때는 이온화 에너지가 매우 커지므로, 순차적 이온화 에너지 값을 해석하면 그 원자의 원자가 전자 수를 예측할 수 있다.

(다) 원자와 같이 매우 작은 입자의 수량을 나타내기 위해 몰이라는 단위를 사용한다. 1몰은 6.02×10^{23}개 입자의 집단이며, 이 수를 아보가드로수라고 한다. 실험에 의해 0°C, 1기압에서 1몰 기체의 부피는 그 종류에 관계없이 22.4L로 일정하다고 밝혀져 있으므로, 기체의 부피를 측정하면 기체 분자의 수를 알 수 있다.

실험 및 결과

금속A, 금속B, 구리의 반응성 크기를 비교하기 위한 실험과 그 결과는 다음과 같다.

- 실험 I : 금속A 이온 수용액에 금속B 막대를 담갔더니 수용액의 질량이 감소하였다.
- 실험 II : 금속A 막대를 황산구리(II) 수용액에 담갔더니 수용액의 질량이 감소하였다.
- 실험 III : 금속A 막대를 묽은 염산에 담갔더니 기체가 발생하였다.



[문제4-1] 실험 I, II의 결과를 바탕으로 금속A, 금속B, 구리의 원자량 크기 순서를 정하고, 그 이유를 제시문 (가)에 근거하여 논리적으로 설명하시오. [10점]

[문제4-2] 금속A의 순차적 이온화 에너지는 아래 표와 같다.

금속 A의 순차적 이온화 에너지(kJ/mol)

E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
578	1817	2745	11577	14842

실험 III에서 금속A 막대의 질량은 5.00g에서 4.55g으로 감소하였고, 이때 560mL의 수소 기체가 발생하였다. 이 실험 결과와 위의 표를 이용하여 금속 A의 원자량을 구하는 과정을 제시문 (나)와 (다)에 근거하여 논리적으로 설명하시오. 단, 실험 결과는 0°C, 1기압에서 측정되었고, 금속A 막대는 실험 전에 표면이 충분히 세척된 후 사용되었다. [20점]

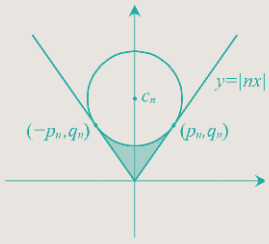
03_2015학년도 모의 논술I

1. 수학

[문제 1] 단판으로 승부를 가리지만, 무승부일 경우 재시합을 하는 운동 경기가 있다. A팀이 B팀에 승리할 확률은 p, 패할 확률은 q, 무승부일 확률은 r이라고 한다. 단, p>0, q>0, r>0, p+q+r=1이다. 계속 무승부가 되어 총 경기 횟수가 10경기가 될 때까지 승부가 나지 않을 경우 동전 던지기로 승부를 결정한다고 할 때, 두 팀이 치르게 될 경기 횟수의 기댓값을 r에 대한 식으로 나타내시오. [20점]

[문제 2] 다음 제시문 (가)~(다)를 읽고 문항에 답하시오.

(가) $y=|nx|$의 그래프에 중심이 $(0, c_n)$이고 반지름이 $\frac{1}{2\sqrt{n}}$인 원이 아래의 그림과 같이 접하고 있다. 두 접점을 각각 $(p_n, q_n), (-p_n, q_n)$이라 하자. 단, n은 양의 정수이다.



(나) 점 (x_0, y_0)와 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는 다음과 같다.

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

(다) 수렴하는 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n \pm \lim_{n\to\infty}b_n$이 성립한다.

[문제 2–1] 제시문 (가)에 주어진 c_n과 p_n의 값을 각각 n에 대한 식으로 나타내시오. [10점]

[문제 2–2] 제시문 (가)의 그림과 같이 $y=|nx|$와 원에 의해 둘러싸인 영역의 넓이를 A_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} A_n$을 구하는 과정을 논리적으로 설명하시오. [10점]

[문제 3] 다음 제시문 (가)~(다)를 읽고 문항에 답하시오.

(가) 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 다음을 만족한다.

$$\int_1^{2x-1}\{2f(t)+f(-t)\}dt=-8x^3+20x^2+22x-34$$

(나) 함수 $g(x)$가 구간 $[a,b]$에서 연속일 때, 다음을 만족한다.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x g(t)\,dt=g(x)\ (\text{단, } a\le x\le b)$$

(다) 두 함수 $y=g(u)$, $u=h(x)$가 미분가능할 때, 합성함수 $y=g(h(x))$의 도함수는 아래와 같다.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=g'(h(x))\cdot h'(x)$$

[문제 3–1] 제시문 (가)에 주어진 함수 $2f(x)+f(-x)$를 구하는 과정을 논리적으로 설명하시오. [10점]

[문제 3–2] $x>0$일 때, $x+\frac{2}{x}$가 취할 수 있는 값의 범위와 $f\left(x+\frac{2}{x}\right)$의 최댓값을 구하는 과정을 논리적으로 설명하시오. [20점]

2. 생명과학

[문제 4] 다음 제시문 (가)~(라)를 읽고 문항에 답하시오.

(가) 소화기관을 통한 3대 영양소의 소화과정은 다음과 같다. 입안의 침샘에서 분비되는 침의 pH는 약 5.0 정도이며 아밀레이스가 많이 포함되어 있어서 탄수화물을 엿당으로 분해한다. 위의 위샘에서 분비되는 위액의 pH는 약 2.0 정도이며, 위액에 의해 펩신이 활성화되어 단백질이 주로 분해된다. 소장으로 이동한 음식물은 소화액과 섞여서 pH7.0 정도의 상태로 바뀌며 다양한 소화 효소 작용에 의해 3대 영양소가 모두 소화된다.

(나) 리소좀은 여러 가지 가수분해 효소가 들어 있는 소낭이다. 리소좀은 주로 골지체로부터 떨어져 나와 만들어진다. 리소좀 내의 효소들은 강산 또는 중성의 환경에서는 잘 작용하지 못한다. 만약 리소좀이 터지거나 열려서 효소들이 새어 나오면 빠져 나온 효소의 활성은 약화되는데, 그 이유는 세포질의 pH가 중성이기 때문이다.

(다) 핵은 세포에서 일어나는 모든 생명 활동의 중추로서, 세포의 물질 합성과 분비를 포함한 여러 가지 기능을 조절하고 유전형질을 결정한다. 인은 핵 내에서 뚜렷하게 관찰되는 구조로서 DNA에 있는 정보를 통해 리보솜 RNA(rRNA)가 합성되는 장소이다. rRNA는 핵에서 단백질과 결합하여 리보솜으로 조립된 후 핵공을 통해 세포질로 빠져 나가서 단백질 번역 과정에 참여한다.

(라) 분비 단백질은 거친면 소포체에 부착된 리보솜에서 만들어진 후 소포체 내로 들어가 3차원 형태로 접히게 된다. 형성된 단백질은 소낭막에 싸인 채 소포체에서 떨어져 나온 후 소포체 근처에 있는 골지면의 막과 융합되어 물질을 골지체로 전달한다.

[문제4-1] 리소좀에 있는 효소를 성분으로 한 소화제를 만든다면 어느 단계의 소화 과정에서 가장 효과적으로 작용할 수 있을지를 제시문 (가)와 (나)에 근거하여 논리적으로 설명하시오. [10점]

[문제4-2] 단백질 분비가 비정상적인 돌연변이 세포 Ⅰ, Ⅱ와 정상세포에, ^{32}P로 표지된 핵산과 ^{35}S로 표지된 아미노산을 일정 시간 공급한 후 새로운 배양 용액에 옮기고 나서 세포 소기관 별 방사능 검출 여부를 조사하여 아래 표에 정리하였다. 세포 소기관 A, B, C, D의 종류와 각각의 돌연변이 세포에서 단백질 분비가 정상적으로 되지 않는 이유를 제시문 (다)와 (라)에 근거하여 구체적으로 설명하시오. (O : 방사능 다량 검출, △ : 방사능 소량 검출, X : 방사능 검출 안됨) [20점]

구분		세포 소기관			
		A	B	C	D
정상세포	^{32}P	X	O	O	X
	^{35}S	O	X	O	O
돌연변이 세포 Ⅰ	^{32}P	X	O	△	X
	^{35}S	X	X	△	X
돌연변이 세포 Ⅱ	^{32}P	X	O	O	X
	^{35}S	X	X	O	O

3. 물리

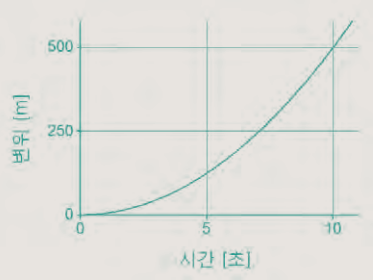
[문제 4] 다음 제시문 (가)~(다)를 읽고 문항에 답하시오.

(가) 물체가 움직이면 시각에 따라 위치가 변하므로 움직이는 물체의 위치를 시각의 함수로 나타낼 수 있다. 이 위치의 변화를 변위라고 한다. 물체에 크기와 방향이 일정한 힘을 가하여 물체가 힘의 방향으로 이동했을 때 물체에 한 일의 양은 물체의 변위에 힘을 곱한 것이다.

(나) 순간 속도는 시간-위치 그래프의 특정 시각에서 접선의 기울기이며, 속도의 순간적인 값을 의미한다.

(다) 비스듬히 위로 던진 물체는 포물선을 그리며 날아간다. 포물선 운동은 중력에 의한 자유 낙하 운동의 하나이다. 포물선 운동을 하는 물체의 변위를 분석하면, 포물선 운동은 수직 방향으로는 중력에 의한 등가속도 운동이고 수평 방향으로는 등속도 운동임을 알 수 있다.

[문제4-1] 마찰이 없는 공간에 정지해 있던 질량 1kg인 물체에 일정한 크기의 힘이 가해져 힘의 방향으로 아래 그래프와 같은 운동을 하였다. 시간 5초~10초 사이 물체에 해 준 일의 양을 구하는 과정을 논리적으로 설명하시오. 단, 일의 단위는 J(줄)을 사용하시오. [10점]



[문제4-2] 시각 t=0에서 10m/s의 속력과 θ의 각도로 원점에서 던져진 물체가 그림 A와 같이 중력에 의해 포물선 운동을 하였다. 그림 B의 그래프는 포물선 운동을 하는 동안 원점에서 물체까지의 직선 거리를 시간에 따라 측정한 결과이며, 기울기가 순간적으로 0이 되는 상황이 $t=t_1$에서 1회 관측되었다. 이 물체가 y=0위치에 도착했을 때 x방향 도달 거리를 구하는 과정을 논리적으로 설명하시오. 단, 공기 저항은 무시하고, 중력가속도는 10m/s^{2}으로 계산하시오. [20점]

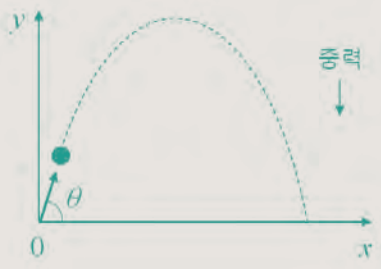


그림 A

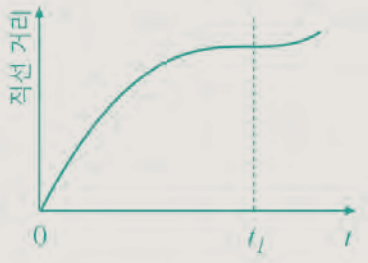


그림 B

4. 화학

[문제 4] 다음 제시문 (가)~(라)를 읽고 문항에 답하시오.

(가) 루이스는 화학 결합을 나타내기 위해서 원자들의 원자가 전자를 점으로 나타내는 방법을 이용하였는데, 이것을 루이스 전자점식이라고 한다. 원자의 최외각 전자 껍질에 존재하는 원자가 전자 중에서 쌍을 이루지 않는 전자를 홀전자라고 하는데, 원자들이 공유 결합을 할 때에는 홀전자들이 전자쌍을 이루어 공유 전자쌍을 만든다. 공유 결합을 가지는 원자는 다른 원자들과 전자를 공유함으로써 비활성 기체와 같이 안정된 전자 배치를 이루면서 옥텟 규칙을 만족시킨다.

(나) 1940년 시지윅은 공유 결합으로 형성된 분자에서 중심원자를 둘러싸고 있는 전자쌍들은 그들 사이의 반발력 때문에 가능한 한 서로 멀리 떨어져 있으려고 한다는 전자쌍 반발 원리를 제안하였다. 루이스 전자점식과 전자쌍 반발 원리를 적용하면 공유 결합 화합물의 분자 구조를 예측할 수 있다.

(다) 화학 반응에서 산소가 관여하는 반응을 산화–환원 반응이라고 하는데, 이때 산소를 얻는 반응은 산화 반응이라고 하고 산소를 잃는 반응을 환원 반응이라고 한다. 산소가 관여하지 않는 산화–환원 반응도 존재하는데 이 경우 전자의 이동으로 산화–환원 반응을 설명할 수 있다. 즉, 어떤 물질이 전자를 잃는 반응을 산화 반응이라 하고, 전자를 얻는 반응을 환원 반응이라고도 한다.

(라) 여러 가지 산화–환원 반응을 모두 설명하기 위하여 산화수를 사용한다. 산화수는 어떤 물질 속에서 원소가 어느 정도로 산화되었는지를 나타내는 가상적인 전하량이다. 공유 결합 화합물에서 산화수는 전기 음성도가 큰 원자가 공유 전자쌍을 모두 차지했다고 가정할 때 각 원자가 가지는 전하수로 나타낸다. 산화 반응에서는 산화수가 증가하고 환원 반응에서는 산화수가 감소한다.

[문제4–1] 웃음 가스로 알려진 아산화 질소[$N_2O(g)$]는 주로 질산암모늄[$NH_4NO_3(s)$]을 분해시켜서 만든다. 질산암모늄[$NH_4NO_3(s)$]과 아산화 질소[$N_2O(g)$]의 루이스 전자점식을 각각 한 개씩만 제시하고 각 전자점식에 해당하는 구조를 예측하시오. [10점]

[문제4–2] 산화수 규칙에 의하면 아산화 질소[$N_2O(g)$]의 질소 원자는 '+1', 산소 원자는 '−2'의 산화수를 갖는다. 제시문 (가)와 (라)에 근거하여 질산암모늄[$NH_4NO_3(s)$]을 구성하는 각 원자의 산화수를 구하고, 아래의 산화–환원 반응에서 산화되는 원소와 환원되는 원소의 산화수 변화를 논리적으로 설명하시오. 단, 전기 음성도 세기는 O 〉 N 〉 H 이다. [20점]

$$NH_4NO_3(s) \rightarrow 2H_2O(g) + N_2O(g)$$

04_2015학년도 모의 논술Ⅱ

1. 수학

[문제 1] 민수가 다음과 같은 게임을 한다. 주사위가 아주 많이 들어있는 상자에서 임의로 주사위를 하나 고른 후, 그 주사위를 임의로 던진다. 주사위 중 75%는 홀수가 더 잘 나오도록 개조되어 있고, 25%는 짝수가 더 잘 나오도록 개조되어 있다. 홀수가 더 잘 나오는 주사위를 임의로 던지면, 홀수가 나올 확률은 0.75이고, 짝수가 나올 확률은 0.25이다. 또한, 짝수가 더 잘 나오는 주사위는, 임의로 던졌을 때 짝수가 나올 확률이 0.75이다. 민수는 주사위를 던져 홀수가 나오면 만원을 잃고, 짝수가 나오면 2만원을 상금으로 받는다. 민수는 게임을 하기 전에 주사위를 임의로 고른 다음, 그것을 한번 던져본 후에 같은 주사위로 게임을 할 지 결정할 수 있다. 민수가 주사위를 골라서 던졌을 때, 홀수가 나왔다고 하자. 그 주사위로 게임을 하기로 했을 경우, 민수가 받을 상금의 기댓값을 구하는 과정을 논리적으로 설명하시오. [20점]

[문제 2] 다음 제시문 (가)~(다)를 읽고 문제에 답하시오.

(가) 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(x, y)$를 점 $\mathrm{P}'(x', y')$으로 하나씩 대응시키는 함수 $f : (x, y) \to (x', y')$에 대해

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

를 만족시키는 상수 a, b, c, d가 있을 때, f를 일차변환이라고 한다.

(나) 일차변환 $f : (x, y) \to (ax + by, cx + dy)$를 행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(다) 양수 x, y에 대하여 $\log_{10} xy = \log_{10} x + \log_{10} y$와 $\log_{10} \dfrac{x}{y} = \log_{10} x - \log_{10} y$이 성립한다.

(라) 양수 x, y에 대하여 $x < y \Leftrightarrow \log_{10} x < \log_{10} y$

[문제2-1] 두 점 $\mathrm{P}(-2,-1), \mathrm{Q}(3,1)$를 각각 두 점 $\mathrm{P}'(2,-3), \mathrm{Q}'(-1,2)$로 옮기는 일차변환이 직선 $y=x+2$를 직선 $y=px+q$로 옮긴다고 하자. $p+q$를 구하는 과정을 논리적으로 설명하시오. [10점]

[문제2-2] x축에 대한 대칭변환을 나타내는 행렬을 B, 직선 $y=-x$에 대한 대칭변환을 나타내는 행렬을 C, 원점을 중심으로 45° 만큼 회전하는 일차변환을 나타내는 행렬을 D, 2×2 단위행렬을 E라 하자. 행렬 $A=2B+C+\sqrt{2}D-E$에 대하여 A^n이 나타내는 일차변환에 의해 점 $\mathrm{P}(2,1)$이 옮겨진 점을 $\mathrm{P}_n(x_n, y_n)$이라고 할 때, $x_n-y_n \le 10^{-3}\cdot 5^n$이 되는 자연수 n의 최솟값을 구하시오.

(단, $\dfrac{-1}{2(2\log_{10}2-1)}=1.26$, $\dfrac{-\log_{10}2}{2(2\log_{10}2-1)}=0.38$로 계산할 수 있다.) [10점]

[문제 3] 다음 제시문을 읽고 문제에 답하시오.

그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 행렬을 이용하여 나타낼 수 있다. 그래프에서 두 꼭짓점이 서로 연결되어 있지 않으면 0, 하나의 변으로 연결되어 있으면 1, 두 개의 변으로 연결되어 있으면 2와 같은 방법으로 나타낸다. 그래프를 행렬로 나타내면 그래프에 대한 여러 가지 문제를 행렬의 연산으로 풀 수 있다.

예를 들어 아래 왼쪽의 그래프를 아래의 행렬 M으로 나타낼 수 있다.



$$\mathrm{M}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&1\\0&0&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix} \qquad \mathrm{M}^2=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&2&1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&2\end{pmatrix}$$

그래프를 나타내는 행렬 M에 대하여 이를 두 번 곱한 M^2이 위 오른쪽의 행렬과 같을 때, 0, 1, 2가 의미하는 바는 다음과 같다.

- 2열의 0 : A에서 B로 두 개의 변을 지나서 가는 경로는 없다.
- 2열의 1 : C에서 B로 두 개의 변을 지나서 가는 경로는 한 가지, C → D → B가 있다.
- 2열의 2 : B에서 B로 두 개의 변을 지나서 가는 경로는 두 가지, B → A → B와 B → D → B가 있다.

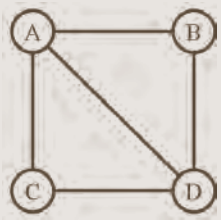
그래프에서 각 변이 방향성이 있어서, 아래 왼쪽의 그래프에서와 같이 한 방향으로만 갈 수 있을 때, 이를 아래의 행렬 N으로 나타낼 수 있다.



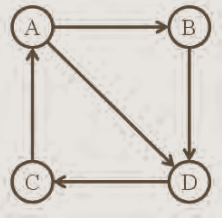
$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

위 그래프를 나타내는 행렬 N에 대하여, 위 오른쪽의 N^2행렬을 구하였는데, 1행 4열의 항만이 1이고 나머지는 모두 0이다. 즉, A → D로 가는 경로만이 두 개의 변을 지나서 갈 수 있다는 것이다. A → B 또는 A → C는 두 개의 변을 지나서 가는 것이 불가능하다.

[문제 3–1] 다음과 같은 그래프가 있을 때 A에서 C로 5개의 변을 지나서 갈 수 있는 경우의 수를 행렬을 이용하여 논리적으로 구하시오. 단, 아래 그래프를 나타내는 행렬을 P라고 할 때 $P^4 - 5P^2 - 4P = 0$이 성립한다. [10점]



[문제 3-2] 다음과 같은 방향성 있는 변을 가지는 그래프가 있을 때 A에서 C로 9개의 변을 지나서 갈 수 있는 경우의 수를 행렬을 이용하여 논리적으로 구하시오. 단, 아래 그래프를 나타내는 행렬을 Q라고 할 때 $Q^4 - Q - E = O$이고, E는 단위행렬, O는 영행렬을 나타낸다. [20점]



2. 생명과학

[문제 4] 다음 제시문 (가)~(라)를 읽고 문항에 답하시오.

(가) mRNA의 유전 정보는 단백질 합성 시 리보솜에서 3개의 염기들이 하나의 유전 암호로 인식되어 각각의 아미노산으로 해독된다. 여기서 각 아미노산을 지정하는 mRNA의 3개의 염기 단위를 코돈이라고 한다. 4종류의 염기들의 조합에 의해 만들어질 수 있는 64개의 유전 암호 가운데 61개는 20종류의 아미노산을 암호화하는 코돈이며, 나머지 3개는 어떤 아미노산도 암호화하지 않는데 이를 종결 코돈이라고 한다.

(나) 진핵생물은 원핵생물과 달리 전사에 의해 합성되는 mRNA를 바로 단백질 합성에 이용할 수 없다. 합성된 mRNA는 단백질의 아미노산 서열에 해당되는 엑손 외에 인트론이라고 하는 염기 서열을 더 갖고 있다. 그러므로 전사 후 mRNA에서 인트론을 제거하고, 엑손들을 연결하여 성숙된 mRNA를 만드는 가공 과정이 필요하다.

(다) 분열하는 세포는 크기가 작은 딸세포를 만들고 딸세포는 성장 과정을 거쳐 다시 분열하는 과정을 반복하는데, 이를 세포 주기라고 한다. 세포 주기는 간기와 분열기로 구분되며, 세포 주기의 약 90%는 간기로 이루어진다. 간기에는 미토콘드리아나 리보솜 같은 세포 소기관의 수가 증가하고 DNA의 복제가 일어난다. 분열기에는 핵분열과 세포질 분열이 일어나며, 응축된 염색체를 관찰할 수 있다. 핵분열 과정은 염색체의 모양과 행동에 따라 전기, 중기, 후기, 말기로 구분된다. 간기에는 핵막과 인이 뚜렷하고 핵 속의 염색체가 실 모양으로 풀어져서 존재한다. 전기에는 핵막과 인이 사라지고 염색체가 응축되어 나타난다. 이때 염색체는 두 가닥의 염색 분체로 이루어져 있다. 세포의 양극에서는 염색체의 이동에 필요한 방추사가 나타나기 시작하고 방추사는 염색체의 동원체에 부착된다. 중기에는 염색체가 세포의 중앙으로 이동하여 배열된다. 후기에는 염색 분체가 분리되어 양극으로 이동한다 말기에는 염색체가 풀어지고 핵막과 인이 다시 나타나며 세포질 분열이 일어난다.

(라) 정상 세포를 배양하면 일정한 수만큼 분열한 후 더 이상 분열하지 않는다. 그러나 암세포는 세포 주기를 지속적으로 반복하기 때문에 영양분이 계속 공급되는 상황에서는 무한정 분열할 수 있다. 이러한 암세포의 특성은 세포 주기를 조절하는 신호를 무시하기 때문인 것으로 알려져 있는데, 많은 암세포에서 세포 주기를 조절하는 유전자의 이상이 발견된다.

[문제 4–1] 다음은 어떤 단백질을 암호화하는 진핵생물 유전자의 DNA 염기서열 일부와 이로부터 만들어진 아미노산의 서열을 나타낸 것이다. 돌연변이가 발생하여 DNA 염기서열 중 밑줄 친 A(A)가 C로 바뀔 경우 이 DNA 서열로부터 만들어지는 아미노산의 서열을 예측하고, 그 이유를 제시문 (가)와 (나)에 근거하여 논리적으로 설명하시오. 단, 아래의 유전암호표를 참고하시오. [10점]

DNA 염기서열 : 5' ATGGGCTACGTAACCTAGGACAAGTTCGGGTAG 3'

아미노산 서열 : 메싸이오닌–글라이신–타이로신–발린–트레오닌–글라이신

두 번째 위치

첫 번째 위치	U	C	A	G	세 번째 위치
U	페닐알라닌	세린	타이로신	시스테인	U
					C
	류신		종결	종결	A
			종결	트립토판	G
C	류신	프롤린	히스티딘	아르기닌	U
					C
			글루타민		A
					G
A	이소류신	트레오닌	아스파라진	세린	U
					C
	* 메싸이오닌		라이신	아르기닌	A
					G
G	발린	알라닌	아스파트산	글라이신	U
					C
			글루탐산		A
					G

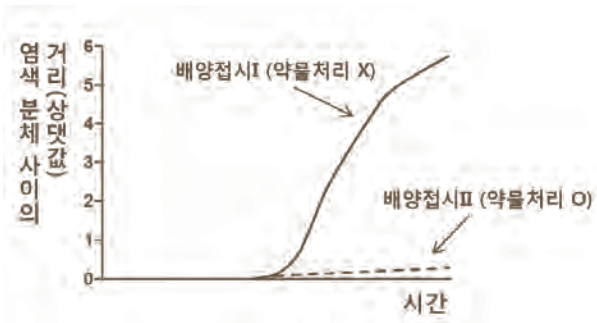
* : 개시 코돈이기도 함. 종결 : 종결 코돈

[문제 4–2] 약물 X는 새롭게 개발된 항암제이다. 이 약물의 작용 원리를 알아보기 위하여 아래와 같은 두 가지 실험을 수행하였다.

(실험 1) 배양접시Ⅰ에서 배양한 암세포를 고정한 후, 현미경 시야에 보이는 세포들을 관찰하여 세포 주기의 간기와 분열기에 해당하는 세포 수를 조사하였다. 다른 배양접시Ⅱ에는 약물 X를 처리하고 12시간 후에 암세포를 고정하여 같은 방식으로 세포 수를 조사하여 그 결과를 아래 표 정리하였다. 단, 약물 처리 전에 배양접시Ⅰ과 Ⅱ의 암세포의 밀도 등 실험 조건은 동일하다.

구분	배양접시 Ⅰ	배양접시 Ⅱ
간기	150	60
분열기	30	50

(실험 2) 약물 X를 처리했을 때(실험 1의 배양접시Ⅱ)와 처리하지 않았을 때(실험 1의 배양접시Ⅰ), 암세포의 분열 과정에서 세포 주기에 따른 특정 염색 분체 사이의 거리 변화를 관찰하였더니 아래 그래프와 같았다.

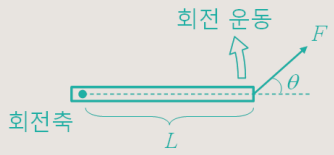


약물 X의 항암 작용 원리를(실험 1), (실험 2)의 결과와 제시문 (다), (라)에 근거하여 논리적으로 설명하시오.[20점]

3. 물리

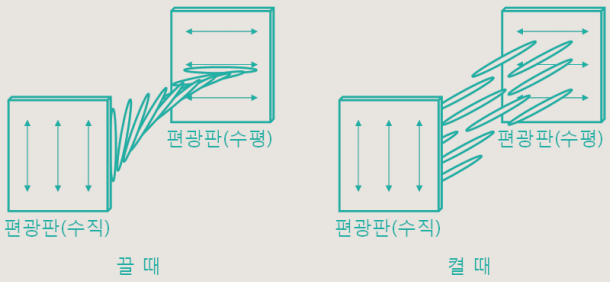
[문제 4] 다음 제시문 (가)~(다)를 읽고 문항에 답하시오.

(가) 물체가 아래 그림과 같이 회전축을 중심으로 회전 운동 할 때, 회전 운동을 발생하게 만드는 원인을 돌림힘이라고 한다. 돌림힘 τ는 작용하는 힘의 크기 F와 회전축에서 힘이 작용하는 지점까지의 거리 L에 비례하며, 힘과 막대 사이의 각 θ와 관련된다. 돌림힘을 식으로 표시하면 $\tau = FL\sin\theta$이다.



(나) 전기장의 진동 방향, 즉 편광 방향에 따라 빛을 선택적으로 통과시킬 수 있는 판을 편광판이라고 한다. 편광이 되지 않은 빛을 편광판을 지나게 하면 한 방향으로 편광된 빛을 얻을 수 있다. 그 방향을 편광축이라고 한다. 임의의 방향으로 편광된 빛을 편광판을 지나게 하면 편광판을 통과한 빛의 편광은 편광판의 편광축 방향으로 변하고 빛의 세기가 줄어든다. 빛의 편광 방향과 편광축 사이의 각도가 θ라면 편광판을 통과한 빛의 세기 I는 $I = I_0\cos^2\theta$ 이며, 이것을 말루스 법칙이라고 한다. 여기서 I_0는 편광판을 통과하기 전 빛의 세기이다.

(다) 두 장의 직교하는 편광판 사이에 갇힌 액정 분자는 어떤 원리로 액정 셀을 통과하는 빛의 흐름을 조절할 수 있는 것일까? 액정 분자를 가두는 두 편광판의 안쪽에 특수한 처리를 하면 액정 분자는 다음 좌측 그림과 같이 나선형으로 꼬이면서 누워있는 상태가 된다. 이렇게 꼬여 있는 액정 분자는 첫 번째 편광판을 통과한 빛의 편광 상태를 꼬여 있는 액정 분자를 따라 돌게 하면서 두 번째 편광판을 빠져 나오게 한다. 그렇지만 만약 액정 셀에 전압을 가해서 액정 분자를 다음 우측 그림과 같이 편광판에 대해 모두 서 있게 하면 빛의 편광 상태가 돌지 않으므로 빛이 거의 통과하지 못하게 된다. 많은 액정 분자는 긴 방향의 한쪽에(+)전하를, 다른 한쪽에는(−)전하를 띠고 있는데, 이런 분자에 전기장을 가하면 분자를 쉽게 돌릴 수 있다.



[문제4-1] 그림과 같이 양 끝에 $\pm q$의 전하를 띠고 길이가 L인 액정 분자가 수평 방향으로 놓여 있다.

만일 이 액정 분자를 θ만큼 회전시켜 놓으면, 액정을 초기 위치로 되돌리려는 돌림힘이 회전의 반대 방향으로 $\tau = \tau_0 \sin 2\theta$의 크기로 발생한다고 하자. $\theta = \frac{\pi}{2}$ 방향으로 균일한 전기장을 가하여 액정 분자를 $\frac{\pi}{2}$만큼 회전시켜 놓으려 할 때 필요한 전기장의 세기를 구하는 과정을 논리적으로 설명하시오.

단, 액정은 중심을 회전축으로 회전한다. [10점]



[문제4-2] 편광축의 각도 θ가 각각 $0, \frac{\pi}{2N}, \frac{2\pi}{2N}, \frac{3\pi}{2N}, \cdots, \frac{(N-1)\pi}{2N}, \frac{\pi}{2}$인 편광판 $N+1$개가 차례로 놓여 있다.

편광 방향이 $\theta = 0$고 세기가 I_0인 빛이 편광축의 각도가 0인 편광판에 입사하여 $\frac{\pi}{2}$인 편광판까지 모두 통과한 후 빛의 세기를 I_N이라고 할 때, $\lim_{N\to\infty} I_N$을 구하는 과정을 논리적으로 설명하시오. [20점]

4. 화학

[문제 4] 다음 제시문 (가)~(라)를 읽고 문항에 답하시오.

(가) 보어의 원자 모형에서 K, L, M, N, ……의 각 전자 껍질에 번호를 붙이고, 기호 n(n은 자연수)으로 표시하면 다음과 같다.

K전자 껍질(n=1), L전자 껍질(n=2), M전자 껍질(n=3), N전자 껍질(n=4), ……

이때 n에 따라 각 전자 껍질이 가지는 에너지 준위는 다음과 같다.

$E_n = -R/n^2$ kJ/mol(n=1, 2, 3, 4, ……), R은 상수

전자 껍질들 중에서 에너지 준위가 가장 낮은 전자 껍질에 전자가 존재하는 상태를 바닥상태라 하고 바닥상태의 전자가 에너지를 흡수하여 바닥상태보다 에너지 준위가 높은 전자 껍질에 존재하는 상태를 들뜬상태라고 한다.

(나) 원자에 에너지를 가하면 가장 바깥 전자 껍질에 배치되어 있는 원자가 전자가 원자핵으로부터 떨어져 나오게 된다. 기체 상태의 중성 원자 1개로부터 전자 1개를 무한히 먼 거리로 떼어 내는 데 필요한 에너지를 이온화 에너지라고 한다.

(다) 화학 반응은 여러 가지 다른 속도로 일어난다. 화학 반응의 속도는 단위 시간 동안에 감소한 반응 물질의 농도나 증가한 생성 물질의 농도로 나타낼 수 있다.

$$\text{반응속도} = \frac{\text{반응 물질의 농도 변화량}}{\text{반응 시간}} = \frac{\text{생성 물질의 농도 변화량}}{\text{반응 시간}}$$

다음과 같은 일반적인 반응의 경우를 생각하여 보자.

$aA + bB \rightleftarrows cC + dD$

이 반응의 반응 속도 υ는 $\upsilon = k[A]^m[B]^n$으로 표시된다. 여기서 비례 상수 k는 반응 속도 상수라고 하는데, k는 반응에 따라 고유한 값을 가지며, 농도와는 관계가 없고 온도에 따라 변하는 값이다. 또한, 지수 m과 n의 합을 반응 차수라고 하며, 이들은 실험을 통하여 결정된다. 1차 반응은 어떤 시점에서 남아 있는 반응 물질의 양이 절반으로 줄어드는 데 걸리는 시간이 일정하며, 이 시간을 반감기라고 한다.

(라) 화학 반응식에서 각 물질의 계수비는 반응에 관여한 물질의 분자수비와 몰수비, 부피비를 의미한다. 이때, 몰과 입자수, 몰과 질량, 몰과 기체의 부피 관계를 이용하면 반응물과 생성물의 몰수, 입자수, 질량, 부피를 구할 수 있다. 따라서 화학 반응식의 양적 관계를 알기 위해서는 물질의 양을 먼저 몰수로 환산하면 편리하다.

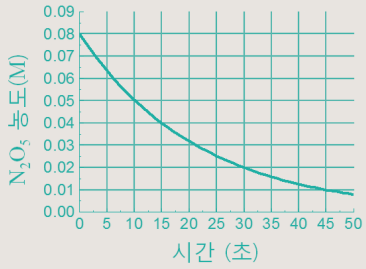
[문제4-1] 바닥상태에 있는 수소 원자[H(g)] 1몰에 자외선을 조사하여 수소 원자 [H(g)]의 일정량을 전자가 L껍질로 전이된 들뜬상태로 만들었다. 들뜬상태로 전이된 수소 원자의 양을 측정하기 위하여 아래의 표와 같이 자외선 조사 전과 후의 수소 기체의 이온화 에너지를 측정하였다. 실험의 결과를 이용하여 들뜬상태로 전이된 수소 원자 [H(g)]의 몰수를 구하는 과정을 제시문 (가)와 (나)에 근거하여 논리적으로 설명하시오. [10점]

구분	자외선 조사 전	자외선 조사 후
이온화 에너지	1312.0kJ/mol	1213.6 kJ/mol

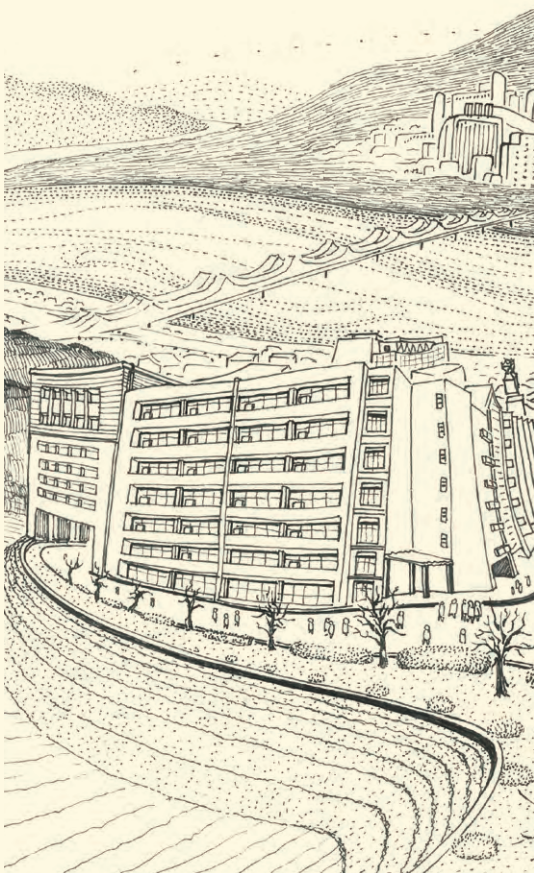
[문제4-2] 오산화 이질소[$N_2O_5(g)$]는 다음과 같은 화학 반응식으로 분해 반응이 일어난다.

$$2N_2O_5(g) \rightarrow 4NO_2(g) + O_2(g)$$

시간에 따른 반응물 N_2O_5 농도를 시간에 따라 다음과 같은 조건에서 측정하였다. 50℃에서 초기 농도가 0.08M인 N_2O_5의 분해 반응이 부피가 일정한 용기 안에서 일어날 때, 반응물 N_2O_5의 농도 변화는 아래 그래프와 같다. 이 반응의 반응 차수와 반응 속도식을 그래프로부터 추론하고, 시간 60초에서 산소 기체의 농도를 구하는 과정을 제시문 (다)와 (라)에 근거하여 논리적으로 설명하시오. [20점]







중앙대학교

서울캠퍼스 156-756 서울특별시 동작구 흑석로 84 **Tel.** 02-820-5114/6114
안성캠퍼스 456-756 경기도 안성시 대덕면 서동대로 4726 **Tel.** 031-670-3114/4114
입 학 안 내 **Tel.** 02-820-6393 http://admission.cau.ac.kr

http://www.cau.ac.kr/

본교의 동의 없이 무단 복제하거나 임의로 사용할 수 없습니다.