단국대학교 2015학년도전형 모의논술고사

자연계열 문제 및 답안



[문제1] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (30점)

<제시문>

도형의 넓이를 구할 때, **간단한 도형**의 넓이의 합으로 근삿값을 구한 다음, 그 근삿값의 극한으로써 주어진 도형의 넓이를 구하는 방법을 구분구적법이라고 한다. 좌표평면에서 곡선 $y=f(x)(f(x)\geq 0)$와 두 직선 $x=a$, $x=b$ 및 x축으로 둘러싸인 영역 S의 넓이를 구분구적법을 사용하여 구할 수 있다. 이 개념을 음수의 함숫값을 갖는 함수까지 일반화한 것이 정적분이다. $[a,b]$에서 연속인 함수 $f(x)$의 정적분을

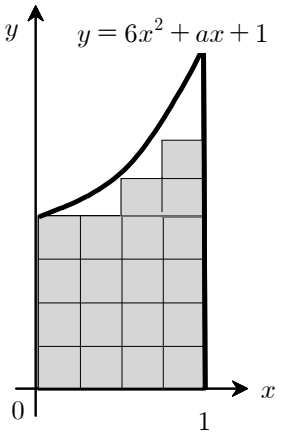
$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} I_k\ , \quad \text{여기서 } I_k=f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\frac{b-a}{n}$$

로 정의한다. 그러므로 $f(x)\geq 0$일 때, 정적분은 **직사각형**의 넓이 I_k를 사용하여 구분구적법을 적용한 것이다.

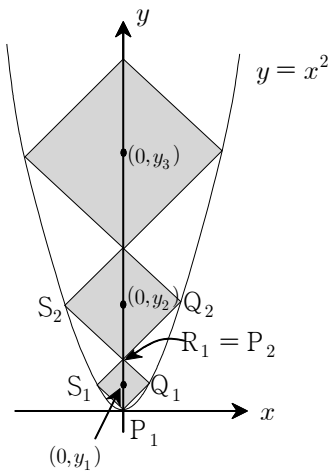
(가) 곡선 $y=6x^2+ax+1(a>0)$과 두 직선 $x=0$, $x=1$ 및 x축으로 둘러싸인 영역 안에 한 변의 길이가 $\frac{1}{n}$(n은 자연수)인 정사각형을 오른쪽 그림과 같이

1. 모든 정사각형의 각 변이 x축 또는 y축에 평행하고
2. 내부가 서로 겹치지 않도록 하여
3. 가장 많이 넣었을 때,

s_n개가 들어간다고 한다.



(나) 그림과 같이 P_1을 원점, Q_1과 S_1을 곡선 $y=x^2$ 위의 점, R_1을 y축 위의 점이고 이를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $P_1Q_1R_1S_1$에 대하여 선분 $\overline{P_1R_1}$의 중점의 좌표를 $(0,y_1)$라 하자. 다시 $P_2=R_1$이고 Q_2과 S_2를 곡선 $y=x^2$ 위의 점, R_2를 y축 위의 점이고 이를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $P_2Q_2R_2S_2$에 대하여 $\overline{P_2R_2}$의 중점의 좌표를 $(0,y_2)$라 하자. 이와 같은 과정을 n번 반복하여 생긴 n번째 정사각형 $P_nQ_nR_nS_n$에 대하여 $\overline{P_nR_n}$의 중점의 좌표를 $(0,y_n)$라 하자.



[논제 1] (가)에서 제시한 정사각형의 개수 s_n이 모든 자연수 n에 대하여

$$5n^2-6n+1\ \leq s_n\ \leq\ 5n^2-5n+1$$

일 때, 양수 a의 값을 구하시오.(15점)

[논제 2] 제시문 (나)의 y_n에 대하여, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{y_n y_{n+1}}}$의 값을 구하시오.(15점)

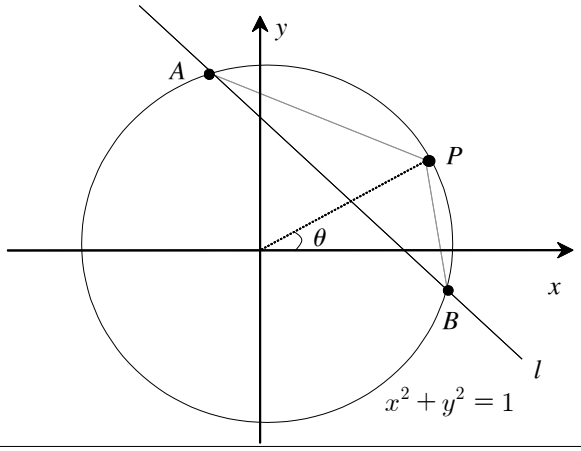
[문제2] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (40점)

<제시문>

좌표평면 위에 직선 $l : 2x+2y-\sqrt{2}=0$이 원 $x^2+y^2=1$과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P의 동경이 θ(라디안)라 할 때, $\triangle$PAB의 넓이를 s_θ라 하자. $\theta\ (0\le\theta\le 2\pi)$에 대하여 집합 $X(\theta)$를

$$X(\theta)=\{\mathrm{T}\mid \mathrm{T}\text{는 원 } x^2+y^2=1 \text{ 위의 점이고 } \triangle\mathrm{TAB}\text{의 넓이는 } s_\theta\text{이다}\}$$

로 정의하자(단, 좌표평면에서 동경의 시초선은 x축의 양의 방향이다).



(가) 함수 $y=f(x)$와 실수 a에 대하여

(i) $f(x)$는 $x=a$에서 정의되어 있고,

(ii) $x=a$에서의 우극한 $\lim_{x\to a+0} f(x)$와 좌극한 $\lim_{x\to a-0} f(x)$이 존재하고

(iii) $\lim_{x\to a+0} f(x)=\lim_{x\to a-0} f(x)=f(a)$

일 때, $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라 한다.

(나) 함수 $y=f(x)$가 실수 a에 대하여, 함수 $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$의 $x=a$에서 우극한과 좌극한이 존재하고 그 두 값이 같을 때, $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 한다.

집합 $X(x)(0\le x\le 2\pi)$의 원소의 개수를 $f(x)$라 하자(단, 점 A의 동경을 α, 점 B의 동경을 β라 할 때, $f(\alpha)=f(\beta)=4$로 정의한다). 예를 들면, $f(\pi)=2$이다. [논제 1]과 [논제 2]에 대하여 답하시오.

[논제 1] 제시문의 (가)를 이용하여 열린 구간 $(0,2\pi)$에서 함수 $f(x)$가 연속이 아닌 모든 x의 값을 구하고, 함수 $g(x)=[pf(x)]$가 열린 구간 $(0,2\pi)$에서 연속이 되도록 하는 양의 실수 p의 범위를 구하시오(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수이다).(20점)

[논제 2] 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $h(x)$에 대하여 함수 $k(x)=h(x)f(x)$라 하자. 함수 $f(x)$는 $x=x_0\left(\dfrac{\pi}{2}<x_0<\pi\right)$에서 연속이 아니고, $k(x)$는 $x=x_0$에서 연속이라 하자.

(1) 제시문 (가)를 이용하여 $h(x_0)$의 값을 구하고, (2) $k(x)$가 $x=x_0$에서 미분가능할 때, 제시문 (나)를 이용하여 $h(x)$를 구하시오.(20점)

[문제3] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (30점)

<제시문>

(가) 높은 곳에 있는 물체가 갖는 위치 에너지의 크기는 물체를 중력의 반대 방향으로 들어 올리면서 한 일과 같다. 이때 한 일은 작용한 힘에 물체가 움직인 수직 거리를 곱한 양과 같으므로 '중력 × 높이' 이고, 식으로 표현하면 mgh로 나타낼 수 있다. 이 식은 지표면에서 중력의 크기가 거의 일정할 때 성립하는 식으로 높이의 변화가 매우 큰 경우에는 높이에 따라 중력이 작아지는 것을 고려해야 한다. 지구에서 무한대의 거리에 떨어져 있는 점을 위치 에너지의 기준점으로 잡으면 지구의 중심으로부터 거리 r만큼 떨어져 있는 질량 m인 물체의 위치 에너지는 $-\frac{GM_Em}{r}$이 된다. (G: 만유인력 상수, M_E: 지구의 질량)

한편, 운동하는 물체가 갖고 있는 에너지를 운동 에너지라고 하며, 운동 에너지의 크기는 질량과 속도에 의해 결정된다. 질량 m인 물체가 속도 v로 움직일 때 운동에너지는 $\frac{1}{2}mv^2$ 이다.

(나) 포탄을 연직 방향으로 쏘아 올리면 운동 에너지가 전부 위치 에너지로 전환되는 높이에 도달한 후 다시 낙하하기 시작하여 지표면으로 떨어진다. 그러나 속도가 매우 크면 다시 지구로 돌아오지 않고 지구로부터 무한히 멀어지게 된다. 이때 물체가 지구의 중력을 벗어나 무한히 먼 곳까지 가는 데 필요한 최소한의 속도를 탈출 속도라고 한다. 지구형 행성인 수성과 화성은 질량이 작아 탈출 속도가 작고, 목성형 행성인 목성과 토성 등은 반지름의 크기에 비해 질량이 커서 탈출 속도가 크다. 태양계 내의 주요 천체들의 탈출 속도는 지구 11.2 km/s, 달 2.4 km/s, 수성 4.3 km/s, 금성 10.4 km/s, 화성 5.0 km/s, 목성 61.0 km/s, 토성 37.0 km/s 등이다.

(다) 기체 분자는 온도가 높아지면 운동이 활발해진다. 기체 분자의 평균 운동 에너지($\frac{1}{2}mv^2$)는 절대온도(T)에 비례한다. 그러므로 기체 분자들은 온도가 높을수록 분자 운동 속도가 빠르다. 행성 대기의 조성은 행성의 표면 온도와 탈출 속도에 달려 있다. 기체 분자의 운동 속도가 행성의 탈출 속도보다 크면 그 기체는 행성으로부터 우주 공간으로 탈출하게 된다. 이때 기체 분자의 운동 속도는 기체의 분자량과 온도에 따라 결정된다. 따라서 같은 행성에서도 분자량이 작은 기체는 분자량이 큰 기체보다 분자의 운동 속도가 크기 때문에 중력을 이기고 우주 공간으로 탈출할 가능성이 많다. 결국, 행성의 온도가 낮고 탈출 속도가 클수록 분자량이 작은 기체를 붙들 수 있기 때문에 두꺼운 대기층을 형성하게 된다.

[논제 1] 제시문 (가)와 (나)를 이용하여 지구에서의 탈출 속도를 만유인력 상수(G), 지구의 질량(M_E), 지구의 반지름(R_E) 등으로 나타내시오. (300자 내외) (10점)

[논제 2] 목성형 행성과 지구형 행성의 대기가 어떤 기체로 이루어져 있을 것인지 제시문 (나)와 (다)를 이용하여 설명하시오. 단, 지구와 달의 대기 상태, 수성과 화성의 대기 상태를 각각 비교하는 내용을 포함하시오. (300자 내외) (20점)

문제 1

□ 출제의도

[논제 1] 구분구적분과 정적분의 개념을 이해할 수 있는지를 평가

[논제 2] 수열과 무한급수의 개념을 이해할 수 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 이강섭 외(2010), 수학 I, 지학사, 107-112쪽, 170-174쪽
○ 황선욱 외(2010), 수학 I, 좋은책 신사고, 112-115쪽, 176-179쪽
○ 양승갑 외(2010), 수학 I, 금성출판사, 112-118쪽, 176-181쪽
○ 계승혁 외(2010), 적분과통계, 성지출판, 21-34쪽
○ 이준열 외(2010), 적분과통계, 천재교육, 30-49쪽
○ 김수환 외(2010), 적분과통계, 교학사, 33-44쪽

[논제 1 평가기준]

- S의 넓이가 $\lim_{n\to\infty}\left\{s_n\times\frac{1}{n^2}\right\}$임을 제시 : 5점
- S의 넓이가 5임을 제시 : 5점
- $a=4$를 제시 : 5점

[논제 2 평가기준]

- $\{y_n\}$의 초항 $y_1=1$을 제시 : 5점
- $\{y_n\}$의 일반항 $y_n=n^2$을 제시 : 5점
- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{y_n y_{n+1}}}=1$을 제시 : 5점

□ 예시 답안

[논제 1]

곡선 $y=6x^2+ax+1$과 직선 $x=0$, $x=1$ 및 x축으로 둘러싸인 영역을 S라 하자. 한 변의 길이가 $\frac{1}{n}$인 정사각형 1개의 넓이는 $\frac{1}{n^2}$이므로 S안에 있는 모든 정사각형들의 넓이의 합은 $s_n\times\frac{1}{n^2}$이다. 따라서 구분구적법의 원리에 의하여 S의 넓이는 $\lim_{n\to\infty}\left\{s_n\times\frac{1}{n^2}\right\}$이다. 그런데

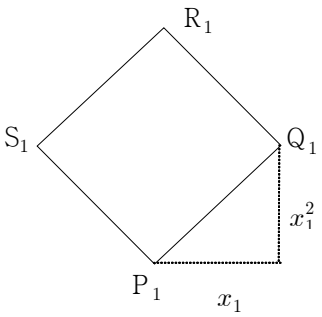
$$(5n^2-6n+1)\times\frac{1}{n^2}\le s_n\times\frac{1}{n^2}\le(5n^2-5n+1)\times\frac{1}{n^2}$$

으로부터

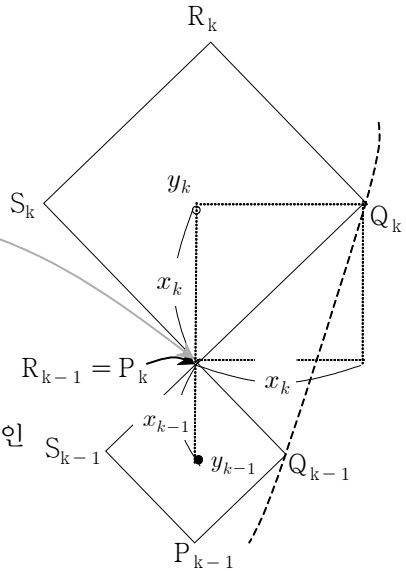
$$(S\text{의 넓이}) = \lim_{n\to\infty}\left\{s_n \times \frac{1}{n^2}\right\} = 5$$

를 얻는다. 따라서 $\int_0^1 (6x^2+ax+1)\,dx = (S\text{의 넓이}) = 5$ 이므로 $a=4$를 얻는다.

[논제 2]



점 Q_k를 (x_k, y_k)라 하면, $y_k = x_k^2$이다.
왼쪽 그림과 같이 정사각형 $P_1Q_1R_1S_1$에서
$x_1 = x_1^2$이고 $x_1^2 = y_1$이므로 $x_1 = y_1 = 1$ 이다.



오른쪽 그림에서 두 정사각형 $P_{k-1}Q_{k-1}R_{k-1}S_{k-1}$과
$P_kQ_kR_kS_k$가 만나는 점의 y좌표는

$$y_k - x_k = y_{k-1} + x_{k-1}$$

이다. 따라서 $x_k + x_{k-1} = y_k - y_{k-1}$

$$= x_k^2 - x_{k-1}^2$$

$$= (x_k + x_{k-1})(x_k - x_{k-1})$$

으로 부터 $\{x_k\}$는 $x_k - x_{k-1} = 1$(공차가 1이고 초항 $x_1 = 1$)인 등차수열이다. 그러므로 $x_n = n$이고 $y_n = n^2$이다. 따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{y_n y_{n+1}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

이다.

문제 2

□ 출제의도

[논제 1] 도형의 성질과 연속함수를 이해할 수 있는지를 평가

[논제 2] 미분계수의 정의를 이해할 수 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 윤재한외 (2009), 수학, ㈜더텍스트, 277-280쪽
○ 양승갑외 (2009), 수학, ㈜금성출판사, 258-262쪽
○ 이준열외 (2010), 수학II, 천재교육, 102-127쪽
○ 유희찬외 (2013), 수학II, (주)미래엔, 95-119쪽
○ 이강섭외 (2009), 수학II, (주)지학사, 82-100쪽
○ 황선욱외 (2013), 수학II, 좋은책 신사고, 80-98쪽

[논제 1 평가기준]

- 연속이 아닌 점 $x=\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$을 모두 제시 : 10점
- p의 범위 $0<p<\frac{1}{4}$를 제시 : 10점

[논제 2 평가기준]

- $h(\frac{3}{4}\pi)=0$을 제시 : 5점
- $h'(\frac{3}{4}\pi)=0$을 제시 : 10점
- $h(x)=\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)^2$ 을 제시 : 5점

□ 예시 답안

[논제 1]
문제에서 함수 $f(x)$를 정의할 때, 삼각형의 밑변을 선분 AB로 고정하면 삼각형의 넓이는 원위의 점과 직선 AB 사이의 거리(삼각형의 높이)에 의하여 결정된다. 따라서 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점과 직선 l 사이의 거리를 고려하여 $f(x)$를 구하면 다음과 같다.

$$f(x)=\begin{cases}4, & 0\le x<\frac{3}{4}\pi,\ x\neq\frac{\pi}{4}\\ 3, & x=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi\\ 2, & \frac{3}{4}\pi<x<\frac{7}{4}\pi,\ x\neq\frac{5}{4}\pi\\ 1, & x=\frac{5}{4}\pi\\ 4, & \frac{7}{4}\pi<x\le 2\pi\end{cases}$$

따라서, 제시문 (가)에 의하여 함수 $f(x)$가 연속이 아닌 x는

$$x=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$$

이다. 한편, $(0,2\pi)$에서 $f(x)=1,\ 2,\ 3,$ 또는 4이다. 함수 $g(x)=[pf(x)]$가 구간 $(0,2\pi)$에서 연속이기 때문에 $g(x)$는 $(0,2\pi)$에서 상수함수이므로

$$g(x)=[p]=[2p]=[3p]=[4p]$$

이다. $[p]=n$ (n는 음이 아닌 정수)라 하면, $n\le p<n+1$이고, $2n\le 2p<2n+2$이다.
그러므로, $[2p]=2n,\ 2n+1$이고 $[p]=[2p]$에서 $n=2n$이므로, $n=0$이다.

따라서 $0<p<1$이고, $[p]=[2p]=[3p]=[4p]$에서 $0<p<\frac{1}{4}$이다.

[논제 2]

(1) 구간 $(\frac{\pi}{2},\pi)$에서 함수 $f(x)$가 연속이 아닌 점은 $x_0=\frac{3}{4}\pi$이다. $k(x)$가 $x=\frac{3}{4}\pi$에서 연속이므로 제시문 (가)에 있는 조건 (i), (ii), (iii)을 만족해야 한다. 먼저 $h(x)$는 다항함수이므로 우극한과 좌극한을 구하면 다음과 같다.

$$\text{(i)}\ \lim_{x\to\frac{3}{4}\pi+0}k(x)=\lim_{x\to\frac{3}{4}\pi+0}2h(x)=2h(\frac{3}{4}\pi),$$

$$\text{(ii)}\ \lim_{x\to\frac{3}{4}\pi-0}k(x)=\lim_{x\to\frac{3}{4}\pi-0}4h(x)=4h(\frac{3}{4}\pi)$$

제시문 (가)의 (iii)에 의하여

$$h(\frac{3}{4}\pi)=0$$

이다.

(2) 함수 $\dfrac{k(x)-k(\frac{3\pi}{4})}{x-\frac{3\pi}{4}}$의 우극한과 좌극한을 구하면 다음과 같다.

$$\text{우극한 : } \lim_{x\to\frac{3}{4}\pi+0}\frac{k(x)-k(\frac{3}{4}\pi)}{x-\frac{3}{4}\pi}=\lim_{x\to\frac{3}{4}\pi+0}\frac{2h(x)}{x-\frac{3}{4}\pi}=2h'(\frac{3}{4}\pi),$$

$$\text{좌극한 : } \lim_{x\to\frac{3}{4}\pi-0}\frac{k(x)-k(\frac{3}{4}\pi)}{x-\frac{3}{4}\pi}=\lim_{x\to\frac{3}{4}\pi-0}\frac{4h(x)}{x-\frac{3}{4}\pi}=4h'(\frac{3}{4}\pi)$$

제시문 (나)에 의하여 $2h'(\frac{3}{4}\pi)=4h'(\frac{3}{4}\pi)$이므로

$$h'(\frac{3}{4}\pi)=0$$

이다. $h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수, $h(\frac{3}{4}\pi)=0,\quad h'(\frac{3}{4}\pi)=0$이므로

$$h(x)=\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)^2$$

이다.

문제 3

□ 출제 의도

[논제 1]

역학적 에너지 보존 법칙인 운동 에너지와 위치 에너지의 합이 항상 일정하게 보존된다는 원리를 이용하여 지표면에서 로켓을 발사하였을 때 지구의 중력장을 벗어나기 위해서 필요한 최소 속도인 탈출 속도를 구할 수 있는 지를 평가하는 것이 본 논제의 목적이다.

[논제 2]

탈출 속도는 행성의 대기가 어떤 기체로 이루어져 있는지를 나타내 주는 중요한 요소이다. 또한 온도에 따라 분자 운동이 활발하여 행성이 기체를 포함할 수 있는지를 나타내준다. 제시문에서 나타낸 탈출 속도와 기체 분자의 운동의 내용을 이용하여 지구형 행성과 목성형 행성의 대기가 어떤 기체로 구성되어 있는지 설명하고, 구체적으로 지구와 달, 수성과 화성의 대기 상태를 탈출 속도와 온도를 이용하여 비교하여 이해하고 있는지를 평가하는 것이 본 논제의 목적이다.

□ 자료 출처

○ 조현수 외(2011), 과학, 천재교육, pp. 68-71.
○ 오필석 외(2011), 과학, 천재교육, pp. 124-127.
○ 안태인 외(2011), 과학, 금성출판사, pp. 68-70.
○ 정완호 외(2011), 과학, 교학사, pp. 99-101.
○ 곽영직 외(2011), 과학, 더텍스트, pp. 131-134.
○ 전동렬 외(2011), 과학, ㈜미래엔컬처그룹, pp. 99-101.

[논제 1 평가 기준]

논제 1의 평가는 다음의 항목으로 구성된다.

(1) 역학적 에너지 보존 법칙을 이용하여 지구에서의 탈출 속도를 구하기 : 10점
- 운동 에너지와 위치 에너지의 합이 일정함을 이용하여 탈출 속도를 정확하게 구했는지를 평가

[논제 2 평가 기준]

논제 2의 평가는 아래의 네 항목으로 구성된다.

(1) 지구형 행성은 탈출 속도가 작기 때문에 무거운 기체들만 남아 있음을 기술 : 5점
(2) 목성형 행성은 탈출 속도가 크기 때문에 가벼운 기체들이 남아 있음을 기술 : 5점
(3) 지구와 달은 온도가 비슷하지만 탈출 속도에 차이가 있어 대기에 차이가 있음을 기술 : 5점
(4) 수성과 화성은 탈출 속도는 비슷하지만 온도에 차이가 있어 대기에 차이가 있음을 기술 : 5점

□ 예시 답안

[논제 1]

탈출 속도는 지구에서 무한히 먼 곳까지 이동시키는데 필요한 속도이며, 지표면에서의 역학적 에너지는 $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_Em}{R_E}$이다.

지구에서 무한히 먼 지점에서 속도와 운동에너지는 0이 되고, 거리도 무한대이기 때문에 위치에너지도 0이다. 따라서 지표면에서의 역학적 에너지와 무한히 먼 지점에서의 역학적 에너지가 같다는 것을 이용하면, 탈출 속도 v_{esc}는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{1}{2}mv_{esc}^2 - \frac{GM_Em}{R_E} = 0 + 0$$

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM_E}{R_E}}$$

[논제 2]

목성형 행성은 표면 온도가 낮고 탈출 속도가 커서 분자량이 작은 수소나 헬륨이 대기의 주성분을 이룬다. 지구형 행성은 표면 온도가 높고 탈출 속도가 작아 가벼운 기체는 달아나고, 질소, 산소, 이산화탄소 등과 같은 무거운 기체가 남아 있다.

지구와 달은 표면 온도가 비슷하지만, 탈출 속도는 지구가 크다. 따라서 지구는 질소, 산소, 이산화탄소 등의 기체를 가지지만, 달은 대기를 가지지 못한다. 수성과 화성은 탈출 속도가 비슷하지만, 수성의 표면 온도가 높다. 따라서 화성은 이산화탄소로 이루어진 대기를 가지지만, 수성에는 대기가 거의 없다.