한양대학교 2014학년도 신입학전형 수시 논술고사

자 연 계 | **출제 의도 및 평가 지침** | **1번**

1. 출제 의도 및 문제 해설

자연계 논술 오전 1번 문제는 지수가 자연수, 유리수, 무리수인 예가 주어졌을 때 거듭제곱들 간의 크기를 실제 비교해보고, 일반적인 현상을 유도해보도록 하는 탐구형의 문제이다.
지수함수와 로그함수의 정의, 함수 증감에 관련한 도함수의 활용에 관한 기초적인 이해만으로 논의를 진행할 수 있도록 의도하였다.

문항 1번과, 2번은 지수가 유리수일 때 두 거듭제곱의 크기를 비교하는 문제로 지수의 정의를 알면 쉽게 해결할 수 있다.

문항 3은 문항4를 해결하기위한 단서를 성립하는 단계로 로그함수와 그 도함수를 활용하여 $x^{\frac{1}{x}}$ 의 증감을 조사하도록 하였다.

문항4는 지수가 무리수일 때 두 거듭제곱의 크기를 비교하는 문제로 물음3에서 얻어진 함수 증감을 이용해 해결하도록 유도하였다.

문항5는 문항4까지를 통해 얻어진 예를 통해 $a^b = b^a$이 어떤 경우에 성립하는지를 일반적으로 기술하도록 요구하는 문제로 $x^{\frac{1}{x}}$ 의 증감과 극한값을 이용해 해결할 수 있다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	10	$3^{2.5} < 2.5^3$ 이라는 결론을 수긍할만한 과정을 통해 유도했는가?	10
2	20	$3^{2.4} > 2.4^3$ 이라는 결론을 수긍할만한 과정을 통해 유도했는가?	20
3	20	증감을 정확히 기술했고 그 근거가 명확한가?	20
4	20	$y = x^{\frac{1}{x}}$ 의 증감을 이용해 $3^\pi > \pi^3$ 라는 결론을 유도하였는가?	20
5	30	$x^{\frac{1}{x}}$의 증감과 값의 범위를 잘 이해하고 이를 바탕으로 a값에 따른 $a^x = x^a$의 해의 개수를 잘 정리하여 기술했는가?	30

한양대학교 2014학년도 신입학전형 수시 논술고사

자 연 계 | **출제 의도 및 평가 지침** | **2번**

1. 출제 의도 및 문제 해설

자연계 오전 [문제 2번]에서는 고교수학과정 중 수학 I 의 '수열'과 '수열의 극한' 단원에 속하는 내용인 점화식과 수열의 극한값을 다루고 있다. 제곱근을 극한값으로 하는 유리수들로 구성된 수열을 소재로 하여, 주어진 점화식으로부터 수열의 일반항 등 필요한 정보를 구할 수 있는지, 주어진 그래프로부터 점화식에 대한 적절한 정보를 이끌어낼 수 있는지 묻고 있다.

제시문 :

(가) 간단한 점화식으로 주어진 수열 (수학I – 수열 – 수학적 귀납법 – 수열의 귀납적 정의)

(나) 그래프로 정보가 주어진 수열 (수학I – 수열 – 수열의 뜻)

(다) 두 수열의 비로 정의된 수열 (수학I – 수열 – 여러 가지 수열)

문제 :

(1) 점화식으로 주어진 수열의 극한에 대한 분석

(2) 그래프로 정보가 주어진 수열에 대한 분석

(3) 수열의 일반항과 극한값 구하기

(4) 제곱근을 극한값으로 하는 유리수들의 수열 만들기

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	20	점화식으로 주어진 수열이 특정한 수로 수렴하는 지 여부를 판단할 수 있는가?	20
2	30	주어진 그래프로부터 수열에 대한 유용한 정보를 이끌어낼 수 있는가?	30
3	30	수열의 일반항을 구하고 극한값을 구할 수 있는가?	30
4	20	제시문과 선행 문제의 내용을 종합적으로 분석하고 일반화해서 응용할 수 있는가?	20

한양대학교 2014학년도 신입학전형 수시

자 연 계	**논 술 예 시 답 안**	1번

1. 답안 1) $(3^{2.5})^2 = 3^5 = 243$, $(2.5^3)^2 = 2.5^6 = \frac{5^6}{2^6} > 244$ $\therefore$ $\underline{3^{2.5} < 2.5^3}$

답안 2) $y = \frac{2.5^3}{3^{2.5}}$ $\log y = 3\log 2.5 - 2.5\log 3 = 3(1-2\log 2) - 2.5\log 3 = 3 - 6\log 2 - 2.5\log 3$

$\log 2 < 0.3011$, $\log 3 < 0.4772$ 이므로,

$\log y > 3 - 6\times 0.3011 - 2.5\times 0.4772 = 0.0004 > \log 1$

$\therefore$ $\underline{3^{2.5} < 2.5^3}$

2. 답안1) log를 활용한 풀이

$y = \frac{2.4^3}{3^{2.4}}$ $\log y = 3\log 2.4 - 2.4\log 3 = 0.6\log 3 + 9\log 2 - 3$

$\log 2 < 0.3011$, $\log 3 < 0.4772$ 이므로,

$0.6\log 3 + 9\log 2 < (0.6)(0.4772) + 9(0.3011) = 0.28632 + 2.7099 = 2.99622 < 3$

$\therefore \log y < 0$, $y < 1$ 이므로 $\underline{3^{2.4} > 2.4^3}$

답안2) 거듭제곱을 직접 계산

$\left(\frac{2.4^3}{3^{2.4}}\right)^5 = \frac{2.4^{15}}{3^{12}} = \frac{504857.3\cdots}{531441} < 1$ $\therefore$ $3^{2.4} > 2.4^3$

3. $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ $\ln f(x) = \frac{1}{x}\ln x$

양변을 x에 대해 미분하면, $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - (\ln x)\cdot 1}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$, $f'(x) = x^{\frac{1}{x}}(\frac{1-\ln x}{x^2})$

$x > 0$ 이므로 $\frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2} > 0$

$\therefore$ $\underline{0 < x < e}$ 이면 $\underline{f'(x) > 0}$ 이므로 $\underline{f(x)는 증가하고,}$

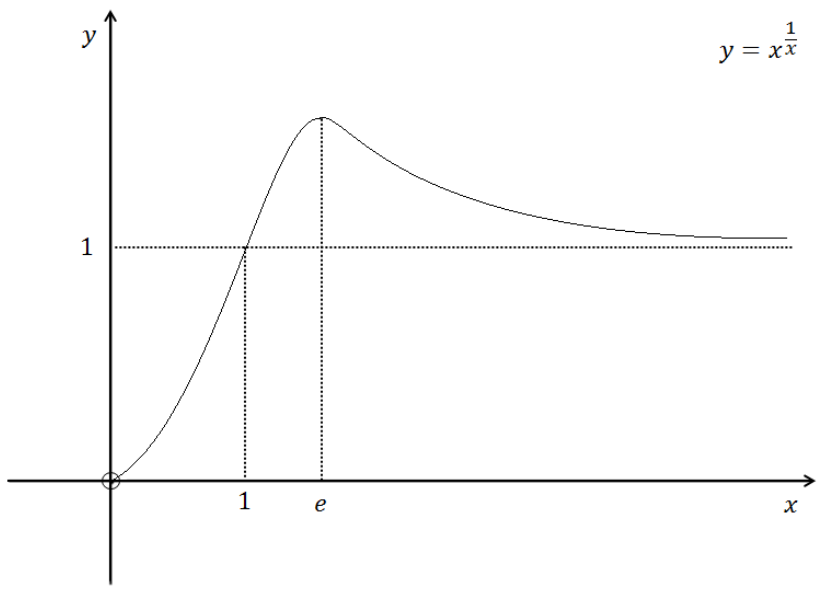
$\underline{x > e}$ 이면 $\underline{f'(x) < 0}$ 이므로 $\underline{f(x)는 감소한다.}$

4. $e < 3 < \pi$이므로 물음 3의 결론을 이용하면, $f(3) > f(\pi)$, 즉 $3^{\frac{1}{3}} > \pi^{\frac{1}{\pi}}$, $(3^{\frac{1}{3}})^{3\pi} > (\pi^{\frac{1}{\pi}})^{3\pi}$

$\therefore$ $\underline{3^\pi > \pi^3}$

5. $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$, $\ln f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty$ 이므로 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$ 이다. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ 이므로 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$ 이다.

이를 물음 3에서 조사된 $f(x)$의 증감에 적용시켜 $y=f(x)$의 그래프 개형을 그려보면 아래와 같다.



$b^{\frac{1}{b}}=a^{\frac{1}{a}}$ 이면 $(b^{\frac{1}{b}})^{ab}=(a^{\frac{1}{a}})^{ab}$, $b^a=a^b$ 이다.

따라서, $a^x=x^a$ 에 대해 $x\neq a$인 양의 실수 x는,

<u>$0<a\leq 1$ 또는 $a=e$ 일 때는 존재하지 않고, $1<a<e$ 또는 $a>e$ 이면 1개 존재한다.</u>

한양대학교 2014학년도 신입학전형 수시

자 연 계	**논 술 예 시 답 안**	2번

1. $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2a_n+1}{a_n}=2+\frac{1}{a_n}$ 이므로, $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 공차 2, 첫째항 $\frac{1}{a_1}=3$ 인 등차수열이다.

따라서 $\frac{1}{a_n}=3+(n-1)2=2n+1$ 이고 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=\frac{1}{2n+1}$ 이다.

이때, $\lim_{n\to\infty}a_n=0=\alpha$ 이므로 α는 $\{a_n\}$의 극한값이다.

$b_1=2$이고, $b_{n+1}-b_n=\frac{b_n^2+1}{b_n-1}-b_n=\frac{b_n+1}{b_n-1}=1+\frac{2}{b_n-1}>0$이므로, 임의의 n에 대해 b_n은 양수이다.

('$\{b_n\}$은 첫째항이 2인 증가수열이다' 또는 '$\{b_n\}$은 ∞로 발산한다'라고 써도 인정)

따라서 $\beta=-1$은 수열 $\{b_n\}$의 극한값이 아니다.

따라서 이 학생의 방법이 항상 성립하는 것은 아니다.

2. (1) (점 O 에서 점 P_{n+1} 로 갈 수 있는 경로의 수)

=(점 O 에서 점 P_n 으로 갈 수 있는 경로의 수)+(점 O 에서 점 Q_n 으로 갈 수 있는 경로의 수)

따라서 $x_{n+1}=x_n+y_n$

(점 O 에서 점 Q_{n+1} 로 갈 수 있는 경로의 수)

=(점 O 에서 점 P_n 으로 갈 수 있는 경로의 수)$\times 2$ +(점 O 에서 점 Q_n 으로 갈 수 있는 경로의 수)

따라서 $y_{n+1}=2x_n+y_n$

(2) $y_n+\sqrt{2}x_n=2x_{n-1}+y_{n-1}+\sqrt{2}(x_{n-1}+y_{n-1})$

$=(1+\sqrt{2})(y_{n-1}+\sqrt{2}x_{n-1})$

$=(1+\sqrt{2})^2(y_{n-2}+\sqrt{2}x_{n-2})$

$\cdots$

$=(1+\sqrt{2})^n$

같은 방법으로, $y_n-\sqrt{2}x_n=(1-\sqrt{2})^n$

(2)의 별해

(1)에서 구한 관계식에 $n=1,2,3,\cdots$ 몇 개의 항을 대입하면 $y_n+\sqrt{2}x_n=(1+\sqrt{2})^n$ 임을 추정할 수 있다.

이를 수학적 귀납법으로 증명하자. 먼저 $n=1$ 일 때, $y_1+\sqrt{2}x_1=1+\sqrt{2}$ 이므로 성립.

이제 $n=k$ 일 때 성립한다고 가정하면,

$(1+\sqrt{2})^{k+1}=(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^k=(1+\sqrt{2})(y_k+\sqrt{2}x_k)$

$=y_k+\sqrt{2}x_k+\sqrt{2}y_k+2x_k=y_k+2x_k+\sqrt{2}(x_k+y_k)=y_{k+1}+\sqrt{2}x_{k+1}$

이므로 $n=k+1$ 일 때도 성립한다.

$y_n-\sqrt{2}x_n=(1-\sqrt{2})^n$ 도 같은 방법으로 추정하고 증명.

3. $y_n+\sqrt{2}x_n=(1+\sqrt{2})^n$, $y_n-\sqrt{2}x_n=(1-\sqrt{2})^n$ 을 연립하여 풀면

$$y_n=\frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{2}(1+\sqrt{2})^n+\sqrt{2}(1-\sqrt{2})^n)$$

$$x_n=\frac{1}{2\sqrt{2}}((1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n)$$

이다. 따라서 수열 $\{z_n\}$이 일반항은 $z_n=\frac{\sqrt{2}((1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n)}{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n}$

$$\lim_{n\to\infty}z_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}((1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n)}{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2}\left(\frac{1+\left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^n}{1-\left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^n}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{1+0}{1-0}\right)=\sqrt{2}$$

4. $x_1=y_1=1$, $x_{n+1}=x_n+y_n$, $y_{n+1}=5x_n+y_n$ 이라 하자.

문항 2, 3의 과정과 동일한 방법에 의해, 수열 $\left\{\frac{y_n}{x_n}\right\}$은 $\sqrt{5}$로 수렴함을 알 수 있다.

따라서 첫 다섯 항은 $\frac{y_1}{x_1}=1$, $\frac{y_2}{x_2}=3$, $\frac{y_3}{x_3}=2$, $\frac{y_4}{x_4}=\frac{7}{3}$, $\frac{y_5}{x_5}=\frac{11}{5}$ 이다.