한양대학교 2014학년도 신입학전형 수시 논술고사

자 연 계	출제 의도 및 평가 지침	1번

1. 출제 의도 및 문제 해설

고등학교 수학교과를 정상화하기 위하여 철저하게 교과서를 중심으로 출제하였으며, 정상적인 수학교과를 이수한 수험생이면 충분하게 풀 수 있는 문제를 출제하였다. 수열의 극한과 다항함수의 미분의 정의 및 의미를 잘 이해하고 있고 종합적으로 사고할 수 있는지를 판단할 수 있도록 고등학교 수학교과의 기본적이고 핵심적인 분야에서 출제한 종합적인 문제이다.

1. 수열의 극한을 이해하는가를 묻는 문제이다.
2. 다항함수를 포함한 연속함수의 미분의 정의를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.
3. 단항함수 중 절댓값함수는 어떤 조건일 때 미분가능한가를 묻는 문제이다.
4. 인수분해를 다항함수의 미분에 잘 활용할 수 있는가를 묻는 문제이다.
5. 다항함수를 경우에 따라 잘 분류하여 미분에 어떻게 적용하는가를 묻는 문제이다.

[출제근거] 수학 I, 미분적분학과 통계기본 - 우정호 외 7인, 두산동아, 서울 (2010)
수학 - 이재학 외 7인, 금성출판사, 서울 (2013), 서울

제시문 :
(가) 수열의 극한 - 수학 I, 162-195
(나) 절댓값함수 - 미분적분학과 통계기본, 52-53
(다) 다항함수의 미분법 - 미분적분학과 통계기본, 47-67

문제 :
1. 수열의 극한 - 수학 I, 162-195
2. 절댓값함수와 다항함수의 미분 정의 - 미분적분학과 통계기본, 47-67
3. 절댓값함수와 다항함수의 미분 정의 - 미분적분학과 통계기본, 47-67
4. 인수분해와 다항함수의 미분 - 미분적분학과 통계기본, 47-67/수학, 84-93
5. 다항함수의 미분 계산 - 미분적분학과 통계기본, 47-67

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	20	수열 $\{a_n\}$에 대한 결과	10
		수열 $\{b_n\}$에 대한 결과	10
2	20	$d \neq 2$인 경우	10
		$d = 2$인 경우	10
3	20	전체적으로	20
4	20	$P(2) - d = 0$인 경우	10
		$P(2) - d \neq 0$인 경우	10
5	20	$P(2) - d = 0$인 경우	10
		$P(2) - d \neq 0$인 경우	10

한양대학교 2014학년도 신입학전형 수시 논술고사

자 연 계	출제 의도 및 평가 지침	2번

1. 출제 의도 및 문제 해설

벡터의 내적의 정의로부터 시작하여 내적의 성질을 밝히는 제시문을 제공하고 이러한 사실을 잘 활용하는가를 평가하고자 하였다.

제시문은 '기하와 벡터' 교과서들의 '벡터의 성분과 내적' 단원을 참조하였다.

1번 문항은 내적의 성질을 잘 활용할 수 있는가를 묻는 문제로서 가장 기본적인 내용을 묻고 있다. 2번 문항은 성분으로 표현된 벡터의 내적의 공식을 증명하기를 요구하고 있는데, 문제에서 삼각형의 코사인법칙을 제공하고 또한 그것을 이용할 것을 안내하여 학생들이 어렵지 않게 문제를 해결할 수 있도록 하였다. 3번 문항은 내적의 성질을 이용하여 정사면체의 한 면에 수직한 벡터를 모서리에 평행한 세 벡터로 표현할 수 있는가를 묻고 있다. 4번 문항은 3번 문항의 발상을 이용하여 정십이면체의 인접한 두면이 이루는 각을 계산할 수 있는가를 묻고 있는데, 상당한 수학적 사고력과 짧지 않은 계산을 착오없이 수행할 수 있는 기획력 등을 평가하는 문제이다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	10	계산에 내적의 성질을 활용한다는 것을 밝혔는가?	5점
		계산이 올바른가?	5점
2	20	내적의 정의와 삼각형의 코사인 법칙을 결합하여 올바르게 증명을 기획했는가?	10점
		증명과정이 전체적으로 정확한가?	10점
3	30	세 벡터들 간의 내적을 정확히 진술하고 있는가?	10점
		두 벡터가 수직하다는 것을 두 벡터의 내적이 0이라는 것으로 번역하여 연립 방정식에 도달했는가?	10점
		전체적으로 계산과정이 정확하고 명쾌하게 기술되어 있는가?	10점
4	40	전체적으로 계산에 활용할 세 벡터를 잘 선택했는가?	10점
		인접한 두 면에 각각 수직한 두 벡터를 올바르게 계산했는가?	10점
		내적의 정의를 활용하여 구하는 값을 계산할 수 있는 방법을 올바르게 기획했는가?	10점
		계산이 올바른가?	10점

한양대학교 2014학년도 신입학전형 수시

자 연 계 | **논 술 예 시 답 안** | **1번**

1. $a_n = 2 \cdot (\frac{3}{4})^{n-1} + 2$이고 $b_n = 2 - \frac{1}{2^{n-2}}$ 이므로 $b_n < b_{n+1} < \cdots < 2 < \cdots < a_{n+1} < a_n$ 이 성립하고 $\alpha = \beta = 2$ 이다.

2. $d > 2$인 경우: 개구간 $(-\infty, d)$에서 $P(f(x))$는 다항함수이고 $x = 2$에서 미분가능하다. a_n, b_n은 모두 d보다 작은 2로 수렴하므로, 등식 ①의 우변과 좌변은 같고 그 극한값은 $P(f(x))$의 $x = 2$에서 미분계수이다.
- $d < 2$인 경우: 개구간 (d, ∞)에서 $P(f(x))$는 다항함수이고 $x = 2$에서 미분가능하다. a_n, b_n은 모두 d보다 큰 2로 수렴하므로, 등식 ①의 우변과 좌변은 같고 그 극한값은 $P(f(x))$의 $x = 2$에서 미분계수이다.
- $d = 2$인 경우: $P(x) = x$라 하면 등식 ①의 좌변은 -1, 우변은 1로 서로 다르므로, 등식 ①은 성립하지 않는다.

따라서 구하는 집합은 $\{ d \in R \mid d \neq 2 \}$이다.

3. $d = 2$인 경우: $\frac{P(f(x)) - P(f(2))}{x-2} = \frac{P(|x-2|) - P(0)}{x-2}$이고 $P(x)$의 일차항의 계수 $\gamma_1 \neq 0$이면,

극한 $\lim_{x \to +2} \frac{\gamma_1 |x-2|}{x-2} = \gamma_1 \neq -\gamma_1 = \lim_{x \to -2} \frac{\gamma_1 |x-2|}{x-2}$이다.

그리고 1보다 큰 자연수 k에 대하여 극한 $\lim_{x \to 2} \frac{\gamma_k |x-2|^k}{x-2}$는 존재하므로

일차항의 계수가 0인 다항함수 $P(x)$는 등식 ①의 양변의 극한이 존재하고 그 극한값은 같다.

4.(20점) $P(2) - d = 0$인 경우: $P(x) - d = (x-2)Q(x)$ ($Q(x)$는 다항식) 이고, 이때

$\lim_{n \to \infty} \frac{f(P(a_n)) - f(P(2))}{a_n - 2} = \lim_{n \to \infty} \frac{|a_n - 2| \cdot |Q(a_n)|}{a_n - 2} = |Q(2)|$ 이고 $\lim_{n \to \infty} \frac{f(P(b_n)) - f(P(2))}{b_n - 2} = \lim_{n \to \infty} \frac{|b_n - 2| \cdot |Q(b_n)|}{b_n - 2} = -|Q(2)|$ 이다.

- $P(2) - d \neq 0$인 경우: $\lim_{x \to 2} \frac{|P(x) - d| - |P(2) - d|}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(P(x) - d)^2 - (P(2) - d)^2}{(x-2)(|P(x) - d| + |P(2) - d|)}$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(P(x) - d) - (P(2) - d)}{(x-2)} \cdot \frac{(P(x) - d) + (P(2) - d)}{(|P(x) - d| + |P(2) - d|)} = P'(2) \frac{P(2) - d}{|P(2) - d|} \quad .$$

따라서, $P(2) - d = 0$인 경우 $P(x) - d = (x-2)Q(x)$ ($Q(x)$는 다항식) 이고 $Q(2) \neq 0$이면,
등식 ②의 등호는 성립하지 않는다.

5. $P(2) - d = 0$인 경우: $P(x) - d = (x-2)Q(x)$ ($Q(x)$는 다항식)이고 $Q(2) = 0$이면,
문항 4의 풀이에 의해, 등식 ②의 양변의 극한값은 0이다.
- $P(2) - d > 0$인 경우: 문항 4의 풀이에 의해, 등식 ②의 양변의 극한값은 $P'(2)$이다.
- $P(2) - d < 0$인 경우: 문항 4의 풀이에 의해, 등식 ②의 양변의 극한값은 $-P'(2)$이다.

한양대학교 2014학년도 신입학전형 수시

자 연 계 | **논 술 예 시 답 안** | **2번**

1. $(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{d})=\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{d}+2\vec{b}\cdot\vec{c}-2\vec{b}\cdot\vec{d}$
$=2-(-1)+2\cdot 3-2\cdot 2=5$

2. 좌표평면에서 점 $A(a_1,a_2)$와 $B(b_1,b_2)$를 택하면 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$가 성립하고 $\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,b_2-a_2)$ 이다. $\triangle OAB$에 코사인법칙을 적용하고 정리하면

$$|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\angle AOB=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2)$$

그런데 $|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\angle AOB=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\vec{a}\cdot\vec{b}$ 이고

$$|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2=(a_1^2+a_2^{2)})+(b_1^2+b_2^2)-\{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2\}=2(a_1b_1+a_2b_2)$$

따라서 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$ 이 성립한다.

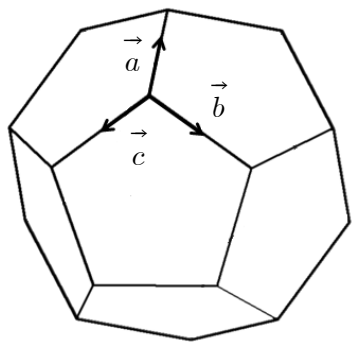
3. 정삼각형의 한 내각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$이므로 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3}=\cos\frac{\pi}{3}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$. 마찬가지로 $\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{1}{2}$. 그리고 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$는 단위벡터이므로 $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{b}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{c}=1$.
그러므로 $\vec{v}\cdot\vec{a}=0$과 $\vec{v}\cdot\vec{b}=0$에서

$$1+\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}l=0$$
$$\frac{1}{2}+k+\frac{1}{2}l=0$$

따라서 $k=1$, $l=-3$.

4. $\cos\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)=\alpha$ 라 두자.

그림과 같이 정십이면체의 한 꼭지점을 시점으로 하는 세 개의 단위벡터를 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 라 두고 $\vec{v}=a+k\vec{b}+l\vec{c}$ 가 $\vec{a}$와 $\vec{b}$에 모두 수직인 벡터라고 하자.



정오각형의 한 내각의 크기는 $\frac{3\pi}{5}$이므로

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{3\pi}{5}=\cos\frac{3\pi}{5}=-\cos\frac{2\pi}{5}=-\alpha\ .$$

마찬가지로 $\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=-\alpha$. 그리고 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$는 단위벡터이므로 $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{b}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{c}=1$.
그러므로 $\vec{v}\cdot\vec{a}=0$과 $\vec{v}\cdot\vec{b}=0$에서

$$1-\alpha k-\alpha l=0$$
$$-\alpha+k-\alpha l=0$$

따라서 $k=1$, $l=\frac{1-\alpha}{\alpha}$. 그러므로 $\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}+\frac{1-\alpha}{\alpha}\vec{c}$ ($\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}+\sqrt{5}\vec{c}$)가 $\vec{a}$와 $\vec{b}$에 모두 수직인 벡터, 즉, $\vec{a}$와 $\vec{b}$에 모두 평행한 오각형에 수직인 벡터임을 알았다. 이 오각형에 인접한 면으로 $\vec{a}$와 $\vec{c}$에 모두 평행한 오각형이 있다. 이 오각형에 수직인 벡터 $\vec{w}$를 위와 마찬가지로 구하면 $\vec{w}=\vec{a}+\frac{1-\alpha}{\alpha}\vec{b}+\vec{c}$ ($\vec{w}=\vec{a}+\sqrt{5}\vec{b}+\vec{c}$).

이로부터 $\vec{v}\cdot\vec{w}=\frac{1}{\alpha^2}(-2\alpha^3-\alpha^2+\alpha)=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 이고 $|\vec{v}|^2=|\vec{w}|^2=\frac{1}{\alpha^2}(2\alpha^3-\alpha^2-2\alpha+1)=\frac{\sqrt{5}+5}{2}$.

그러므로

$$\cos\theta=\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|}$$
$$=\frac{-2\alpha^3-\alpha^2+\alpha}{2\alpha^2-\alpha^2-2\alpha+1}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

($\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{5}}$도 가능한 값)