2013학년도 신입학 수시 2차 모집

논술고사 문제지 (자연계열)

※ 본 논술문제에 대한 지적 소유권은 광운대학교에 있으며,
시험종료 후 답안지와 함께 제출하여야 합니다.

지원학과(부)			
수 험 번 호		성 명	

※ 답안 작성 시 유의 사항

■ 시험시간은 2시간(120분)입니다.

■ 답안지는 1문제당 1장씩 총 2장으로 작성하며, 2장의 답안지에 모두 모집단위, 성명, 수험번호를 컴퓨터용 사인펜으로 작성하시기 바랍니다.

■ 답안은 검정색 볼펜으로 작성하십시오. (연필, 수정액, 수정테이프 사용 금지)

■ 답안 정정 시에는 두 줄을 긋고 그 위에 재작성하십시오.

■ 답안지에는 제목을 쓰지 마십시오.

■ 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 답안지는 '0'점 처리됩니다.

광운대학교

◆ 출제문제

[문제 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

> 집합 X가 덧셈연산(+)과 곱셈연산(·)에 대하여 닫혀있다고 할 때, 집합 X에 대해 다음과 같이 <성질 1>과 <성질 2>를 정의하자. (단, 0은 덧셈연산에 대한 항등원이고 연산 순서는 곱셈연산을 먼저 시행한 후에 덧셈연산을 시행한다.)
>
> <성질 1> $a, b \in X$, $b \neq 0$ 일 때, $a = b \cdot c + d$를 만족하는 원소 $c, d \in X$가 존재한다.
> <성질 2> $a, b \in X$, $b \neq 0$ 일 때, $a = b \cdot c + d$를 만족하는 원소 $c, d \in X$가 유일하게 존재한다.

※ 집합 X를 정수 전체의 집합 $\mathbb{Z}$라 하고 덧셈연산(+)과 곱셈연산(·)을 각각 정수의 덧셈연산과 곱셈연산이라고 하자. 그러면 임의의 정수 a와 $b \neq 0$에 대하여 <성질 1>의 식 $a = b \cdot c + d$를 만족하는 정수 c와 d가 존재한다. 이때 d의 조건을 $0 \leq d < |b|$로 놓으면 $b = 3$인 경우에 d는 $0, 1, 2$ 중 하나로 결정된다. 각각의 정수 d에 대해 집합

$$R_d = \{a \in \mathbb{Z} \mid a = 3 \cdot c + d,\ c\text{는 정수}\}, \quad d = 0, 1, 2$$

를 정의할 때 물음에 답하시오. (답안을 작성할 때 곱셈연산의 기호 · 은 생략하기로 한다.)

[1] 집합 $R_0 \cup R_1 \cup R_2$를 구하고 그 이유를 설명하시오.

[2] 서로 다른 두 정수 $i, j\ (0 \leq i \leq 2, 0 \leq j \leq 2)$에 대해 교집합 $R_i \cap R_j$를 구하고 그 이유를 설명하시오.

[3] 집합 R_0, R_1, R_2 중에서 <성질 1>을 만족하는 집합을 모두 찾고 그 이유를 설명하시오.

[4] 문항 [3]에서 <성질 1>을 만족하는 집합 중 <성질 2>도 만족하는 집합의 존재 여부를 설명하시오.

[5] 연립방정식 $\begin{cases} a_1 x + a_2 y = 0 \\ a_3 x + a_4 y = 1 \end{cases}$ 에서 $a_1 \in R_0, a_2 \in R_1, a_3 \in R_2$일 때 연립방정식이 오직 하나의 해를 갖기 위해서 a_4가 속할 수 있는 집합을 R_0, R_1, R_2 중에서 모두 찾고 그 이유를 설명하시오.

[6] 집합 $Y = R_0 \cup R_1$일 때 함수 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$와 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in Y \\ 1, & x \notin Y \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \mathbb{Z} \\ 0, & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

이때 함수 $g(x)$의 극한값이 존재하는 점들 전체의 집합 A를 구하고 그 이유를 설명하시오. (단, $\mathbb{R}$는 실수 전체의 집합이다.)

< 다음 장 계속 >

[문제 2] (50점) 다음에 제시된 정의, 정리, 증명 방법을 참조하여 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

[정의] 집합 A에서 정의된 함수 $f:A\to A$에 대하여 다음을 만족시키는 집합 A의 원소 x_0을 함수 $f(x)$의 **고정점**이라고 한다.

$$f(x_0)=x_0$$

[평균값의 정리] 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고 열린 구간 (a,b)에서 미분 가능하면 다음 등식을 만족시키는 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

[수학적 귀납법] 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$에 관한 다음 2개의 주장이 참이면 명제 $p(n)$은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

① $n=1$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.
② $n=k$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.

※ ([1]~[2]) 구간 $[a,b]$에서 연속이고 구간 (a,b)에서 미분 가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 양의 실수 $r>0$에 대해 다음 식을 만족시킨다고 하자.

$$|f'(x)|<r, \qquad a<x<b \tag{1.1}$$

함수 $f(x)$가 고정점 x_0을 가진다고 할 때, $a<x_1<b$인 x_1을 첫째항으로 하여 다음 점화식 (1.2)에 의해 생성되는 수열을 $\{x_n\}$이라고 하자.

$$x_{n+1}=f(x_n), \qquad n=1,2,3,\ \ldots \tag{1.2}$$

[1] 모든 자연수 n에 대하여 $a<x_n<b$일 때, 수학적 귀납법을 사용하여 다음 부등식이 성립함을 증명하시오.

$$|x_{n+1}-x_0|<r^n|x_1-x_0|, \qquad n=1,2,3,\ldots \tag{1.3}$$

[2] 이계도함수가 연속인 함수 $g(x)$에 대하여 함수 $f(x)$를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x)=x-\frac{g(x)}{g'(x)}, \qquad g'(x)\neq 0 \tag{1.4}$$

함수 $f(x)$가 고정점 x_0을 가지면, x_0은 방정식 $g(x)=0$의 해임을 보이시오.

< 다음 장 계속 >

※ ([3]~[6]) 문항 [2]의 함수 $g(x)$가 구간 $[1,3]$에서 정의된 함수 $g(x)=x^2-2$라고 할 때 식 (1.4)의 함수 $f(x)$에 대해 첫째항을 $x_1=2$로 하는 점화식 (1.2)가 생성하는 수열을 $\{x_n\}$이라 하자.

[3] 함수 $f(x)$의 고정점 x_0을 찾으시오. 또한 수열 $\{x_n\}$의 제2항과 제3항을 구하시오.

[4] $1 \le x \le 3$인 모든 x에 대하여 $1 < f(x) < 3$임을 보이시오.

[5] $1 < x < 3$인 모든 x에 대하여 $|f'(x)| < \frac{1}{2}$임을 보이시오.

[6] 수열 $\{x_n\}$이 문항 [3]의 고정점 x_0에 수렴하는 이유를 설명하시오.

< 끝 >

◆ 출제의도

[문제 1] 해설(출제의도)

고등학교 수학에서 쉽게 접하고 있는 정수의 약수와 배수의 개념과 정수 전체의 집합 $\mathbb{Z}$에서 성립하는 나눗셈 정리를 정확하게 이해하고 있는지 평가하고 나눗셈 정리가 집합 $\mathbb{Z}$의 부분집합에서 성립하는지에 대하여 판단할 수 있는 능력을 평가한다. 또한 집합의 상등관계를 일반적으로 증명하는 논리력을 평가한다. 또한 연립방정식의 해의 존재성과 계수들 간의 관계를 행렬식을 이용하여 풀이할 수 있는 응용력을 평가하고 불연속인 함수의 극한을 구할 수 있는 능력을 평가한다.

[문제 2] 해설(출제의도)

함수의 고정점에 대한 정의와 수학적 귀납법 등을 제시하고 그를 이용하여 주어진 문제를 해결하는데 있어 수리적 분석력과 응용력, 그 과정에서 제시된 평균값의 정리에 대한 이해력과 활용 능력, 고등학교 과정에서 배운 도함수의 개념과 관련 성질을 이용하여 제시된 문제를 해결할 수 있는지 평가하고자 하였다. 특히, 점화식, 수열, 수열의 극한, 방정식의 해, 부등식, 함수의 극값 등과 관련된 문제를 단계적으로 해결하는 과정에서 얻은 결과들을 종합하여 새로운 결과를 도출하는 종합적 문제 해결 능력을 평가하고자 하였다.

◆ 예시답안

[문제 1] 모범답안

[1] $R_0=\{3k|k\text{는 정수}\}, R_1=\{3k+1|k\text{는 정수}\}, R_2=\{3k+2|k\text{는 정수}\}$이다. 임의의 정수 a는 3으로 나눌 때 나머지가 0 또는 1 또는 2이므로 $a\in R_0$ 또는 $a\in R_1$ 또는 $a\in R_2$ 이다. 따라서 $R_0\cup R_1\cup R_2=\mathbb{Z}$ 이다.

[2] $a\in R_i\cap R_j$라고 하면 적당한 정수 m,n에 대하여 $a=3m+i=3n+j$로 나타낼 수 있으므로 $3(m-n)=j-i$이다. 따라서 $j-i$는 3의 배수이고 $0\le i\le 2, 0\le j\le 2$이므로 $i=j$이다. 그러므로 $i\neq j$이면, $R_i\cap R_j=\varnothing$ 이다.

[3] 집합 R_i가 <성질 1>을 만족한다면 $a,b\in R_i$, $b\neq 0$에 대하여 적당한 원소 $c,d\in R_i$가 존재하여 $a=b\cdot c+d$가 성립한다. 그런데 $a=3k+i, b=3m+i, c=3n+i, d=3p+i$ 인 정수 k,m,n,p가 존재하므로 $3k+i=(3m+i)(3n+i)+(3p+i)=3q+i^2+i$ 인 정수 q가 존재한다. 따라서 $3(k-q)=i^2$ 이고 i^2은 3의 배수이므로 $i=0$이다. 또한 R_0에 속하는 원소 $3k, 3m$에 대하여 원소 $3n, 3(k-mn)\in R_0$이 존재하여 등식 $3k=(3m)(3n)+3(k-3mn)$이 성립하므로 <성질 1>을 만족하는 집합은 R_0 뿐이다.

[4] 원소 $3,6\in R_0$에 대하여 $3=6\cdot 0+3=6\cdot 3+(-15)$이고 $0,3,-15\in R_0$이므로 집합 R_0는 <성질 2>를 만족하지 않는다. 따라서 <성질 1>을 만족하는 집합 중에서 <성질 2>를 만족하는 집합은 존재하지 않는다.

[5] 연립방정식의 계수로 이루어진 행렬 $M=\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{pmatrix}$의 행렬식 $\det(M)$가 0이 아닌 조건을 찾으면 된다. 그런데 적당한 정수 k,m,n,p에 대하여 $a_1=3k, a_2=3m+1, a_3=3n+2, a_4=3p+i$이라고 놓으면 $\det(M)=(3k)(3p+i)-(3m+1)(3n+2)=3q+1$인 정수 q가 존재하고 $3q+1\neq 0$이므로 a_4는 R_0, R_1, R_2 중 어느 집합에 속해도 된다.

[6] 함수 g는 R_2에 속하지 않는 모든 점 x에 대하여 $g(x)=0$이다. 따라서 $a\notin R_2$일 때 $\lim_{x\to a}g(x)=0$이다. 또한 $a\in R_2$일 때 $g(x)$의 좌극한과 우극한은 각각 $\lim_{x\to a^-}g(x)=0$ 이고 $\lim_{x\to a^+}g(x)=0$ 이므로 $\lim_{x\to a}g(x)=0$ 이다. 따라서 $A=\mathbb{R}$이다.

[문제 2] 모범답안

[1] ① $n=1$이라 하자. 그러면 $x_0=f(x_0)$, $x_2=f(x_1)$, 평균값의 정리, 조건식 (1.1)로부터

$$|x_2-x_0|=|f(x_1)-f(x_0)|=|f'(c_1)(x_1-x_0)|<r|x_1-x_0|$$

을 얻는다. (단, c_1은 x_0과 x_1사이의 수이다.) 따라서 $n=1$일 때 주어진 부등식은 성립한다.

② $n=k$일 때 $|x_{k+1}-x_0|<r^k|x_1-x_0|$이 성립한다고 가정하자. 이때 $n=k+1$이면 $x_0=f(x_0)$, $x_{k+2}=f(x_{k+1})$, 평균값의 정리, 조건식 (1.1), 그리고 가정에 의해 다음을 얻는다. (단, c는 x_0와 x_{k+1} 사이의 수이다.)

$$|x_{k+2}-x_0|=|f(x_{k+1})-f(x_0)|=|f'(c)\,(x_{k+1}-x_0)|<r|x_{k+1}-x_0|=r^{k+1}|x_1-x_0|$$

즉, $n=k+1$일 때도 성립하므로 수학적 귀납법에 의해 모든 자연수 n에 식 (1.3)이 성립한다.

[2] x_0가 함수 $f(x)$의 고정점이면 $x_0=f(x_0)=x_0-\dfrac{g(x_0)}{g'(x_0)}$, 즉 $\dfrac{g(x_0)}{g'(x_0)}=0$이다. $g'(x_0)\neq 0$이므로 $g(x_0)=0$이다. 즉, x_0은 방정식 $g(x)=0$의 해이다.

[3] 문항 [2]에 의하면 함수 $f(x)$의 고정점 x_0은 방정식 $g(x)=x^2-2=0$의 해이다. 따라서 $x_0=\pm\sqrt{2}$이다. 그런데 이 중에 $\sqrt{2}$가 구간 $[1,3]$에 속하므로 $\sqrt{2}$가 고정점이다.

한편, 함수 $f(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{x}$에 대해 점화식 (1.2)가 생성하는 수열은 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}x_n+\dfrac{1}{x_n}$이다. 따라서 $x_1=2$일 때, x_2, x_3를 구하면 $x_2=\dfrac{1}{2}\cdot 2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$, $x_3=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{(\frac{3}{2})}=\dfrac{17}{12}$ 이다.

[4] 함수 $f(x)$의 도함수는 $f'(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x^2}$이므로 다음 표에서 $1\le x\le 3$이면 분명히 $1<f(x)<3$이다.

x	1	…	$\sqrt{2}$	…	3
$f'(x)$	-	-	0	+	+
$f(x)$	3/2	↘	최솟값 ($\sqrt{2}$)	↗	11/6

[5] $h(x)=f'(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x^2}$로 놓으면 $h'(x)=f''(x)=\dfrac{2}{x^3}$이다. 따라서 $x>1$에서 $h'(x)>0$이므로 $h(x)=f'(x)$는 증가함수이며 $h(1)=-\dfrac{1}{2}$이다. 또한 $x>1$이면 $h(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x^2}<\dfrac{1}{2}$이다. 따라서 $1<x<3$에서 $-\dfrac{1}{2}<h(x)<\dfrac{1}{2}$, 즉 $|f'(x)|<\dfrac{1}{2}$이다.

[6] 함수 $f(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{x}$는 구간 $[1,3]$에서 연속이고, 구간 $(1,3)$에서 미분가능하다. $x_1=2$이면 수열 $\{x_n\}$의 모든 항 x_n과 함수 $f(x)$의 고정점 $x_0=\sqrt{2}$은 문항 [4]에 의하면 구간 $(1,3)$에 있다. 또한 문항 [5]에 의하면 구간 $1<x<3$에서 $|f'(x)|<\dfrac{1}{2}$이므로 식 (1.1)을 만족시키는 r은 $r\ge\dfrac{1}{2}$이다. 이때 $r=\dfrac{1}{2}$로 택하면 부등식 (1.3)이 성립한다. 즉, $x_0=\sqrt{2}$, $x_1=2$이므로 $-(\frac{1}{2})^{n-1}|2-\sqrt{2}|<x_n-\sqrt{2}<(\frac{1}{2})^{n-1}|2-\sqrt{2}|$, $n=2,3,\ldots$ 이다. $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2})^{n-1}=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}(x_n-\sqrt{2})=0$이다. 따라서 $\lim_{n\to\infty}x_n=x_0=\sqrt{2}$ 이다.