2012학년도 신입학 수시 1차 모집

논술고사 문제지 (자연계열)

※ 본 논술문제에 대한 지적 소유권은 광운대학교에 있으며,
시험종료 후 답안지와 함께 제출하여야 합니다.

지원학과(부)			
수 험 번 호		**성 명**	

※ 답안 작성시 유의 사항

■ 시험시간은 2시간(120분)입니다.

■ 답안지는 2장으로 작성하며, 2장의 답안지 모두에 모집단위, 성명, 수험번호를 컴퓨터용 싸인펜으로 작성하시기 바랍니다.

■ 1번 문제는 필수로 답안을 작성하여야 하며 , 2~4번 문제 중 2문제를 선택하여 답안을 작성하시기 바랍니다. (2~4번 문제 중 반드시 2문제만 답안 작성)

■ 답안지의 **【응시문제 선택란】**에 답안작성한 문제를 반드시 컴퓨터용 싸인펜으로 표기하여야 합니다. (본인이 선택한 문제만 점수에 반영됨)

■ 답안은 검정색 볼펜으로 작성하십시오. (연필, 수정액, 수정테이프 사용금지)

■ 답안지 정정 시에는 원고지 교정법을 따라야 합니다.

■ 답안지에는 제목을 쓰지 말고, 특별한 표시를 하지 마십시오.

■ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

[가] f가 실수 전체의 집합에서 정의된 함수일 때, 실수 a에 대하여 극한값

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

가 존재하면 함수 f가 $x=a$에서 미분가능하다고 한다. 이때 이 값을 함수 f의 $x=a$ 에서의 미분계수라고 하며, 이것을 기호로 $f'(a)$와 같이 나타낸다.

[나] x가 변수, n이 음이 아닌 정수이고 $c_0, c_1, \ldots, c_n$을 $n+1$개의 실수라 할 때, 다음과 같이 표현되는 함수 f가 다항함수이다.

$$f(x)=c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1 x+c_0$$

이때 $c_m \neq 0$이 되는 최대의 m이 이 다항함수 f의 차수이며 $m=\deg(f)$ 로 표기한다. 각 상수 c_j를 이 다항함수 f의 계수라고 한다. 특히 $m=\deg(f)$이면 c_m을 최고차항의 계수라고 한다. $\deg(f)=m\geq 1$ 인 다항함수 f는 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)$가 존재하며

$$f'(x)=mc_m x^{m-1}+(m-1)c_{m-1}x^{m-2}+\cdots+c_1$$

이다.

[문제 1]

(1) 함수 f와 g는 실수 전체의 집합에서 정의된 함수이며 $x=0$에서 미분가능하다. $g(0)=1$이고 모든 실수 x와 y에 대하여

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+g(xy)-2$$

가 성립할 때, ①, ②, ③, ④에 대한 답안을 자세히 작성하시오.

① $f(0)$의 값을 구하시오.
② [가]의 미분가능성 정의를 사용하여 0이 아닌 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)$가 존재함을 보이시오.
③ 함수 f는 다항함수임을 보이시오.
④ 함수 g는 $\deg(g)=0$ 또는 $\deg(g)=1$인 다항함수임을 보이시오.

(2) 함수 f는 최고차항의 계수가 양수인 n차 다항함수이고

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x^3)+\{xf'(x)\}^3}{x^2 f(x^2)}=3$$

이 성립할 때, ⑤, ⑥에 대한 답안을 자세히 작성하시오.

⑤ $n=2$임을 보이고 다항함수 f의 최고차항의 계수를 구하시오.
⑥ $\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin x\ dx$의 값을 구하시오.

<다음 면 계속>

■ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

[가] 음성이나 음악과 같은 오디오 신호는 시간의 변화에 따른 매질의 압력 변화를 마이크 등의 센서를 이용해 전기신호로 표현할 수 있는 1차원 신호의 대표적인 예이다. 이를 수학적으로 표시하면 독립변수인 시간 t에 대한 함수 $x(t)$로 표시할 수 있다. (단, t는 실수이다.) 이러한 신호는 시간 t가 연속적으로 변하는 연속시간신호(continuous-time signal)와 시간 t가 일정한 시간 간격의 특정한 시각에서만 신호의 값을 가지는 이산시간신호(discrete-time signal)로 구분할 수 있다. 일반적으로 연속시간신호를 이산시간신호로 변환하는 과정을 샘플링(sampling)이라고 하며, 연속시간신호와 구분을 위해 $x[k]$로 표시한다. (단, k는 정수이다.) 예를 들면, 악기를 연주하거나 가수가 노래를 부를 때 들리는 자연 상태의 오디오 신호를 카세트테이프에 녹음하면 연속시간신호라 할 수 있고, 이것을 샘플링 과정을 통해 MP3 파일로 변환하면 이산시간신호가 되는 것이다. 이와 같이 이산시간신호는 정보를 표현하는 또 다른 방법으로 컴퓨터와 같은 디지털 장비에서의 다양한 신호처리에 적합하다. 아래의 그림 1과 그림 2는 sine 함수를 연속시간신호와 이산시간신호로 각각 표현한 예이다. 그림 2의 점선은 연속시간신호와의 관계를 보여주기 위해 표시한 것이다.

$x(t) = \sin(\pi t)$

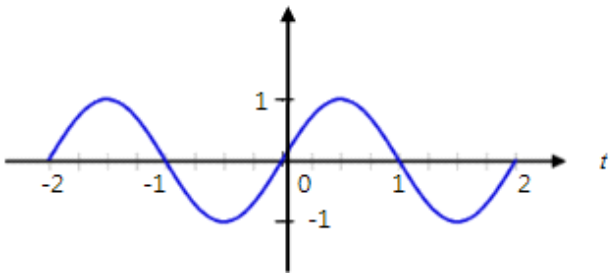


그림 1

$x[k] = \sin\left(\frac{1}{4}\pi k\right)$

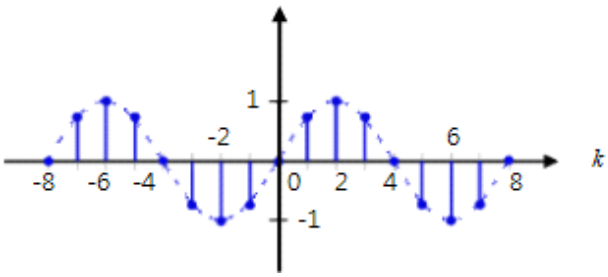


그림 2

[나] 상수 T가 0이 아닐 때, 임의의 실수 t에 대하여 연속시간신호 $x(t)$가 $x(t) = x(t+T)$의 관계를 만족하면 $x(t)$를 주기신호(periodic signal)라고 하고, 이 조건을 만족하는 T의 값 중 최소의 양수가 되는 T_0의 값이 존재할 때 T_0을 $x(t)$의 주기(period)라고 한다. 이산시간신호 $x[k]$에 대해서도 상수 K가 0이 아닐 때, 임의의 정수 k에 대하여 $x[k] = x[k+K]$의 관계를 만족하면 $x[k]$를 주기신호라고 하고, 이 조건을 만족하는 K의 값 중 최소의 자연수 K_0의 값을 $x[k]$의 주기라고 한다.

[다] 연속시간신호 $x(t)$가 임의의 실수 t에 대하여 $x(t) = x(-t)$의 관계를 만족하면 $x(t)$를 우신호(even signal)라고 하고, $x(t) = -x(-t)$의 관계를 만족하면 기신호(odd signal)라고 한다. 이산시간신호 $x[k]$도 마찬가지로 임의의 정수 k에 대하여 $x[k] = x[-k]$의 관계를 만족하면 $x[k]$를 우신호라고 하고, $x[k] = -x[-k]$의 관계를 만족하면 기신호라고 한다.

<다음 면 계속>

[문제 2]

(1) 연속시간신호 $x(t)$가 다음과 같이 주어졌을 때, $x(t)$가 주기신호임을 보이고 주기를 구하시오.

$$x(t) = 3\sin(3\pi t) + 4\cos(3\pi t)$$

(2) 실수 ω_0과 θ에 대하여 이산시간신호 $x[k]$가 다음과 같이 주어졌을 때, $x[k]$가 주기신호가 될 조건을 구하시오.

$$x[k] = \sin(\omega_0 k + \theta)$$

(3) 연속시간신호 $x(t) = \cos^2(\pi t)$이고 이산시간신호 $x[k] = \cos^2(\pi k)$일 때, $\int_{-5}^{5} x(t)dt$와 $\sum_{k=-5}^{5} x[k]$의 값을 구하시오.

(4) 임의의 연속시간신호 $x(t)$가 있다. 이때 우신호 $x_e(t)$와 기신호 $x_o(t)$를 아래와 같이 정의하면, $x(t) = x_e(t) + x_o(t)$이다.

$$x_e(t) = \frac{1}{2}\{x(t) + x(-t)\}, \qquad x_o(t) = \frac{1}{2}\{x(t) - x(-t)\}$$

아래와 같이 연속시간신호 $y(t)$가 주어졌을 때, 우신호 $y_e(t)$와 기신호 $y_o(t)$의 그래프를 각각 그리시오. (그림 3 참조)

$$y(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \le t < 1 \\ 0, & t < 0 \\ 0, & t \ge 1 \end{cases}$$

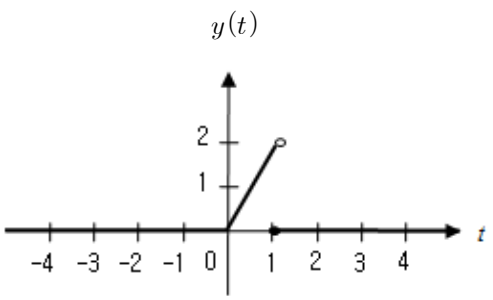
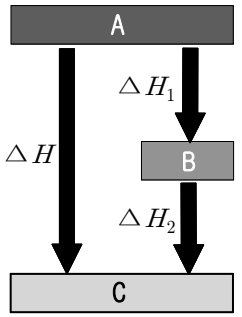


그림 3

<다음 면 계속>

■ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

[가] 열화학반응식은 화학량론적인 정보만 제공하는 화학반응식에 비해 열화학적 정보, 즉 주어진 화학반응을 통해 열을 방출할지 또는 흡수할지 등을 알려준다. 이를 위해 반응물과 생성물이 가지는 에너지의 차이를 엔탈피(enthalpy)의 변화, $\triangle H$로 표시한다. $\triangle H$는 초기상태와 최종상태가 같으면 반응경로에 상관없이 일정하며 이를 '$\triangle H$는 상태함수이다'라고 정의한다. 따라서 헤스(Hess)의 법칙에 의하면 A → C로 진행되는 반응의 엔탈피 변화와 A → B → C의 경로로 진행되는 반응의 엔탈피 변화들 사이에는 오른쪽 그림과 같은 관계가 성립한다.



$\triangle H = \triangle H_1 + \triangle H_2$

[나] 질소(N_2)는 생물에서 가장 중요한 원소 중의 하나이다. 대기 중의 질소를 식물이 사용하기 적합한 형태로 전환시키는 과정을 질소고정화라 부르며 이는 식물의 성장에 매우 중요하다. 독일의 화학자 하버는 1908년에 이 같은 질소고정화에 중요 화합물인 암모니아(NH_3)를 아래의 방법으로 합성함으로써 인공비료의 길을 열고, 작물의 생산량 증대에 지대한 공헌을 하였다.

$$N_2(g) + 3H_2(g) \rightleftarrows 2NH_3(g), \quad \triangle H(25℃) = -92\text{kJ}$$

[다] 깁스 자유에너지(Gibbs free energy), G는 반응의 자발성을 나타내는 척도로 사용되어 화학반응의 자유에너지 변화, $\triangle G$가 0보다 작으면 자발적 반응을, 0보다 크면 비자발적인 반응을, 그리고 0이면 평형상태에 있는 반응을 의미한다. 또한 상태함수인 $\triangle G$에도 엔탈피에서와 같이 헤스의 법칙을 적용할 수 있다. 엔트로피(entropy), S는 물질의 무질서도를 나타내는 척도이며 엔트로피의 변화를 $\triangle S$로 나타낸다. 예를 들어, 한 용기에서 두 기체 사이를 분리하고 있는 칸막이를 제거하면 두 기체가 섞이고 이때 '엔트로피가 증가($\triangle S > 0$)하였다'라고 말한다. $\triangle G$, $\triangle H$, $\triangle S$ 사이에는 깁스-헬름홀츠(Gibbs-Helmholtz) 식인 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\triangle G = \triangle H - T\triangle S$$

여기서 T는 절대 온도(K)이다.

[라] 제철산업은 19세기 말의 산업혁명을 이끌었고 현재도 중요한 기간산업이다. 자연계의 철은 주로 산화철(III)(Fe_2O_3)인 적철광 형태로 존재하는데 이를 환원시켜 금속 철(Fe)을 경제적으로, 즉 에너지를 적게 사용하여 생산하는 것이 중요하다. 다음 반응을 통해 산화철(III)로부터 금속 철을 얻는 과정을 생각해 보자.

$$Fe_2O_3(s) \rightarrow 2Fe(s) + \frac{3}{2}O_2(g), \quad \triangle G(25℃) = +742\text{kJ}$$

이 반응은 비자발적이고 심지어 2000℃의 고온에서도 $\triangle G$는 여전히 양수이며 비자발적이다. 따라서 이 반응을 통해 금속 철을 생산하기 위해서는 매우 많은 에너지가 필요하게 되어 비효율적이다. 실제 철을 생산하기 위한 용광로에서는 코르크 $C(s)$를 태워 일산화탄소 $CO(g)$를 생산하고, 생산된 $CO(g)$가 산화철(III)과 반응하는 일련의 단계를 이용한다.

$$2C(s) + O_2(g) \rightarrow 2CO(g)$$

$$Fe_2O_3(s) + 3CO(g) \rightarrow 2Fe(s) + 3CO_2(g)$$

<다음 면 계속>

[문제 3]

(1) 극지방에 거주하는 에스키모는 얼음 블록으로 이글루라 부르는 얼음집을 짓는다. 외부 온도가 영하 30℃ 정도라도 이글루 내부 온도는 외부 온도에 비해 상대적으로 높은 온도를 유지한다. 그러나 에스키모도 외부 기온이 더욱 추워지면 이글루에 물을 뿌려 실내 온도를 올린다. 어떤 원리로 이와 같은 결과가 가능한지 열화학적 근거로 논하시오.

(2) 이 문제는 제시문 [나]에 소개된 하버법에 의한 암모니아의 합성에 대한 것이다. 평형을 이루고 있는 반응계에 보다 높은 효율로 암모니아를 합성하기 위해 반응을 정방향으로 유도하고자 한다. 르샤틀리에 (Le Châtelier)의 원리를 기반으로 온도의 상승/감소의 관점에서, 또한 반응용기의 압축/팽창의 관점에서 어떤 변화가 정반응으로 유도하기에 바람직한지 이유와 함께 논하시오. 단, 이때 반응속도는 고려하지 않고, 온도의 상승/감소 시 반응용기의 크기 변화는 없으며 압축/팽창 시 반응계의 온도 변화는 없다고 가정한다.

(3) 문제 (2)에서 제시된 방법 외에도 평형상태에서 생성물인 암모니아를 제거하여 주어도 반응이 정반응으로 유도되고 높은 효율로 암모니아를 합성할 수 있다. 그런데 일반적으로 합성이 일어나는 상온 이상에서는 반응물과 생성물은 혼합기체의 형태로 존재한다. 이때 암모니아만을 효율적으로 제거하는 방법을 분자 간의 힘(intermolecular force)의 원리를 기반으로 논하시오.

(4) 제시문 [다]와 아래 열화학반응식을 이용하여 제시문 [라]에서 금속 철을 생산하기 위해 2단계 반응을 사용하는 이유를 논하시오.

$$\mathrm{CO}(g) + \frac{1}{2}\mathrm{O_2}(g) \rightarrow \mathrm{CO_2}(g), \quad \triangle G(25℃) = -257\mathrm{kJ}$$

(5) 아래 열화학반응식은 산화철(III)로부터 금속 철을 제조할 수 있는 또 다른 반응식을 나타낸다.

$$\mathrm{Fe_2O_3}(s) + 3\mathrm{H_2}(g) \rightarrow 2\mathrm{Fe}(s) + 3\mathrm{H_2O}(g),$$

$$\triangle H(25℃) = +99\mathrm{kJ}, \ \triangle S(25℃) = +0.14\mathrm{kJ/K}$$

상기 반응은 25℃에서는 비자발적이다. 이 반응이 자발적으로 일어날 수 있는 가장 낮은 온도를 구하시오.

<다음 면 계속>

■ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

[가] 전자기와 관련된 여러 현상들은 전하를 가진 입자의 운동을 중심으로 설명될 수 있다. 전류 I는 전하를 가진 입자의 흐름으로 단위부피당 전하량을 q, 평균속도를 v, 입자들이 움직여 지나가는 단면적을 A라고 하면 이 값들의 곱, $I=qvA$이다. 어떤 물질에 전압 V를 가하고 흐르는 전류 I를 측정하여, 전압과 전류 사이에 $I=\frac{1}{R}V$의 비례관계가 성립함을 확인할 수 있다. 전선이나 막대 모양의 물질에서는 저항 R는 $R=\rho\frac{l}{A}$이다. 여기에서 ρ는 물질의 고유 값인 비저항, l은 길이이고 A는 단면적이다.

[나] 고체 물질은 원자들이 적당한 간격을 두고 3차원 공간에 배열되어 있는 구조를 가지고 있다. 그 중 금속과 같이 전류를 잘 흐르게 하는 도체에는 원자로부터 벗어나서 원자들 사이의 공간에서 자유롭게 움직일 수 있는 자유전자라 불리는 전자들이 있어서, 외부에서 전압을 가할 때 이 자유전자들이 힘을 받아 움직이므로 전류가 잘 통하게 된다. 온도도 전류에 영향을 주는데, 온도가 높아지면 원자들의 움직임이 커져서 자유전자와 원자들 간의 충돌로 전류의 흐름이 방해받는다. 이는 저항 값의 증가로 나타난다.

[다] 전기 에너지는 전선 등을 통해 쉽게 전달될 수 있고 다른 에너지로 쉽게 변환될 수 있는 특징이 있어서 그 사용량이 지속적으로 증가되고 있다. 전기 에너지를 얻는 방법의 하나로 원자력 발전을 들 수 있다. 핵분열의 반응속도를 조절하는 것이 원자력 발전의 가장 중요한 요소인데, 이는 중성자의 수와 속력을 조절하는 것에 달려 있다. 핵분열은 원자핵이 속력이 느린 중성자 하나를 흡수하면 잘 일어난다. 문제는 핵분열의 결과로 여러 개의 빠른 중성자가 방출된다는 점이다. 중성자의 속력을 낮추고 그 수를 줄여야 핵분열의 연쇄 반응이 적정 반응속도로 꾸준히 진행될 수 있다. 중성자의 속력을 낮추기 위해서는 중성자와 질량이 비슷한 ${}_{1}^{1}\mathrm{H}$, ${}_{1}^{2}\mathrm{H}$, ${}_{6}^{12}\mathrm{C}$ 등의 원자핵을 가지고 있는 경수(${}_{1}^{1}\mathrm{H}_2\mathrm{O}$), 중수(${}_{1}^{2}\mathrm{H}_2\mathrm{O}$), 흑연 등을 감속재로 사용한다. 또한, 중성자를 잘 흡수하는 카드뮴이나 붕소로 만들어진 제어봉을 연료봉 사이에 두어 연쇄 반응이 기하급수적으로 일어나지 않도록 한다.

[문제 4]

(1) 도체 물질의 양쪽 끝에 일정한 전압이 가해져도 원자와의 충돌 때문에 자유전자는 계속적으로 가속되지는 않는다. 상온에서 단면적이 A이고 길이가 l인 전선 형태의 어떤 도체 물질의 길이 방향 양쪽 끝에 전압 V를 가하면 질량이 m인 자유전자들이 힘 F를 받아 움직이다가 평균적으로 거리 L만큼 움직인 뒤에 원자와 충돌한다고 하자. 이때 이 물질의 비저항 ρ와 L 사이의 관계식을 구하시오. (단, 단위부피당 전하량 q는 움직이는 전하를 가진 입자가 전자인 경우 단위체적당 전자의 수 n과 전자의 전하량 e의 곱이다. 또 충돌 직후 자유전자의 속도는 0으로 가정한다.)

<다음 면 계속>

(2) x축에 수평한 방향으로 무한히 긴, 외부에서 어떤 힘도 가해지고 있지 않은 진공 용기 내에서, 그림 1과 같이 전자 하나가 움직이고 있다고 하자. 전자가 영역 A에 들어올 때의 시간을 0초로, 위치를 $x=0$, $y=0$으로 정하자. 이때 전자가 x축의 양의 방향으로 v_0의 속도로 움직인다고 하면, 전자가 $x=2d$인 위치에 도달할 때 걸리는 시간 t_1과 그때의 y축 방향의 위치 y_1을 구하시오.

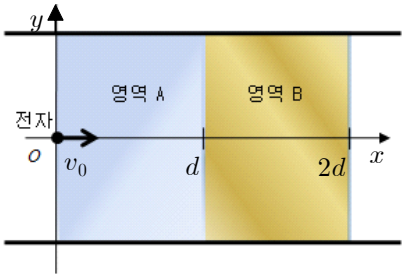


그림 1 진공용기 내에서 운동하는 전자

(3) 문제 (2)와 동일한 조건이지만 이번에는 영역 A에서 y축의 양의 방향으로 일정한 힘 F를 받는 조건이 추가되었다고 하자. 문제 (2)에서와 같이 전자가 시간 0초에 $x=0$, $y=0$인 위치에서 x축의 양의 방향으로 v_0의 속도로 움직인다고 하자. 전자가 $x=2d$에 도달할 때까지 걸린 시간 t_2와 그때의 y축 방향의 위치 y_2를 구하고, 또 영역 A와 영역 B에서 전자가 움직인 자취에 대하여 설명하시오. (단, F가 충분히 작아서 전자가 용기의 벽에 부딪치는 일은 발생하지 않는다고 가정한다.)

(4) 교류 전력을 공급하는 송전의 효율은 전압이 높을수록 좋다고 한다. 그런데 전력에 대한 식 $P=\dfrac{V^2}{R}$을 살펴보면, 같은 저항에서 전압이 크면 송전선에서 소모되는 손실 전력이 오히려 크다는 결과를 얻을 수 있는 것처럼 보인다. 이러한 오류가 어떤 점을 잘못 고려했기 때문인지 설명하고, 전압이 높으면 실질적으로 손실 전력이 줄어드는 이유를 설명하시오. 또한 손실 전력을 줄이는 다른 방법 3가지를 그 이유와 함께 제시하시오.

(5) 중성자와 비슷한 질량을 가진 원자핵이 빠른 중성자의 속력을 줄여주는데 효과적이라는 제시문 [다]의 내용이 맞는지 확인하고자 한다. 질량이 m인 중성자와 정지해 있고 질량이 αm인 원자핵의 1차원 충돌에서 중성자의 충돌 전의 속도 v_0과 충돌 후의 속도 v 사이의 관계식을 구하시오. α가 1에 가까울 경우와 또 α가 1보다 충분히 큰 경우에 충돌 전과 후 속도의 변화를 서로 비교하여 논하시오.

<끝>

<모 범 답 안>

[문제 1]

① $x=y=0$일 때, $f(0+0)=f(0)+f(0)+g(0)-2$이고 $g(0)=1$이므로 $f(0)=1$이다.

② x가 0이 아닌 실수라고 하자. 조건에서 $f'(0)$과 $g'(0)$이 존재하고 $f(0)=1=g(0)$이므로 모든 $h\neq 0$에 대하여 다음이 성립한다.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{f(h)+g(xh)-2}{h}=\frac{f(h)-f(0)}{h}+x\frac{g(xh)-g(0)}{xh}$$

따라서

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+x\lim_{h\to 0}\frac{g(xh)-g(0)}{xh}=f'(0)+g'(0)x$$

이 성립한다. 그러므로 $f'(x)$가 존재한다.

③ $f(0)=1$이고 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=f'(0)+g'(0)x$이므로 $f(x)=1+f'(0)x+\frac{g'(0)}{2}x^2$이다.

따라서 f는 다항함수이다.

④ $f(x+1)=f(x)+f(1)+g(x)-2$이고 $f(x)=\frac{g'(0)}{2}x^2+f'(0)x+1$이므로 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}g(x)&=f(x+1)-f(x)-f(1)+2\\&=\frac{g'(0)}{2}(x+1)^2+f'(0)(x+1)+1-\frac{g'(0)}{2}x^2-f'(0)x-1-\frac{g'(0)}{2}-f'(0)-1+2\\&=1+g'(0)x\end{aligned}$$

따라서 함수 g는 $g'(0)=0$이면 $\deg(g)=0$인 다항함수이고 $g'(0)\neq 0$이면 $\deg(g)=1$인 다항함수이다.

또한 $f(x)=1+f'(0)x+\frac{g'(0)}{2}x^2$이고 $g(x)=1+g'(0)x$일 때, 모든 실수 x와 y에 대하여 다음이 성립한다.

$$f(x+y)=1+f'(0)(x+y)+\frac{g'(0)}{2}(x+y)^2=f(x)+f(y)+g(xy)-2$$

⑤ $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x^3)+\{xf'(x)\}^3}{x^2f(x^2)}=3$이므로 $n>0$이다. $f(x)=c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1x+c_0$ 라고 할 때, 다음이 성립한다.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x^3)+\{xf'(x)\}^3}{x^2f(x^2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{(c_n+n^3c_n^3)x^{3n}+\cdots+c_0}{c_nx^{2n+2}+\cdots+c_0x^2}=3$$

$c_n>0$이므로 $3n=2n+2$이고 $1+n^3c_n^2=3$이다. 따라서 $n=2$이고 f의 최고차항의 계수, $c_n=c_2=\frac{1}{2}$이다.

⑥ $f(x)=\frac{1}{2}x^2+c_1x+c_0$이므로 $f'(x)=x+c_1$이다. 그러므로 부분적분법을 사용하여 다음을 얻는다.

$$\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin x\ dx=\int_{-\pi}^{\pi}x\sin x\ dx+c_1\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\ dx=2\int_0^{\pi}x\sin x\ dx=-2\pi\cos(\pi)+2\int_0^{\pi}\cos x\ dx=2\pi$$

[문제 2]

(1) 삼각함수 합성공식에 의하여

$x(t)=3\sin(3\pi t)+4\cos(3\pi t)=5\sin(3\pi t+\theta)$ (단, $\cos\theta=\frac{3}{5}$, $\sin\theta=\frac{4}{5}$)

sine 함수는 주기가 2π인 주기함수이므로 $x(t)$도 주기함수이다.

이때 주기는 $\frac{2\pi}{3\pi}=\frac{2}{3}$가 된다.

(2) 이산시간신호 $x[k]$의 주기를 K_0라고 가정하면

$x[k+K_0]=\sin(\omega_0(k+K_0)+\theta)=\sin(\omega_0 k+\omega_0 K_0+\theta)$

주기신호 정의에 의해 $x[k]=x[k+K_0]$이므로 $\omega_0 K_0$가 2π의 정수배이어야 한다.

따라서 $x[k]$가 주기신호가 될 조건은 $\omega_0 K_0=2m\pi$이다. (단, m은 정수이다.)

(3) 삼각함수 반각의 공식에 의해 $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1+\cos(x)}{2}$이므로

$$\int_{-5}^{5}\cos^2(\pi t)dt=\int_{-5}^{5}\frac{1+\cos(2\pi t)}{2}dt=\left[\frac{1}{2}t+\frac{1}{4\pi}\sin(2\pi t)\right]_{-5}^{5}=5$$

이산시간신호의 정의에 따라 모든 정수 k에 대하여 $\cos^2(\pi k)=1$이고

정수구간 $[-5,5]$ 사이의 항의 개수는 모두 11개이므로

$$\sum_{k=-5}^{5}\cos^2(\pi k)=11$$

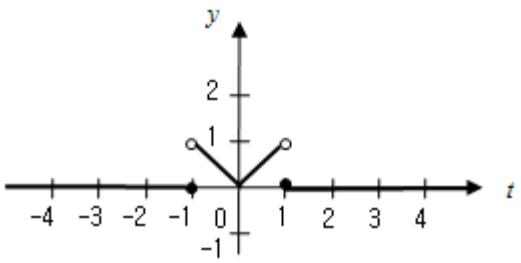
(4) 이산시간신호 $y(-t)$는 다음과 같다.

$$y(-t)=\begin{cases}-2t, & -1<t\le 0\\ 0, & t\le -1\\ 0, & t>0\end{cases}$$

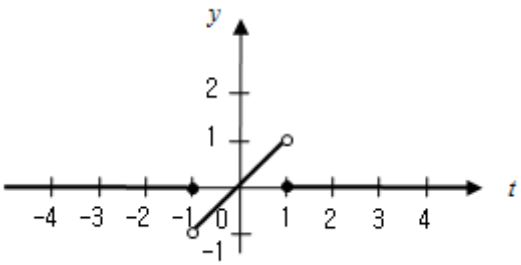
따라서 문제에 제시된 정의에 따라 $y_e(t)$와 $y_o(t)$는 각각 다음과 같다.

$$y_e(t)=\begin{cases}-t, & -1<t\le 0\\ t, & 0<t<1\\ 0, & t\le -1\\ 0, & t\ge 1\end{cases}\qquad y_o(t)=\begin{cases}t, & -1<t<1\\ 0, & t\le -1\\ 0, & t\ge 1\end{cases}$$

이를 그래프로 표시하면 아래 그림과 같다.



$y=y_e(t)$의 그래프



$y=y_o(t)$의 그래프

[문제 3]

(1) 물이 얼어 얼음이 되는 과정은 열을 방출하는 발열과정 ($\triangle H < 0$)이다. 따라서 영하 30℃ 정도의 추운 날씨에는 뿌려준 물이 바로 얼음으로 상변환 되며 열을 방출한다. 이 방출된 열 때문에 이글루의 실내 온도는 상승하는 결과를 얻는다.

(2) 르 샤틀리에의 원리는 평형에 도달해 있는 반응계에 화학종의 농도변화, 온도변화 및 압력의 변화 등과 같은 외부 자극이 주어졌을 때 이를 상쇄시키는 방향으로 반응이 진행된다는 원리이다. 따라서 하버법에 의한 암모니아의 합성에서 반응을 정방향으로 유도하기 위해서는 다음과 같이한다.

i) $\triangle H$ < 0이므로 하버의 암모니아 합성반응은 발열반응이다. 따라서 반응계의 온도를 감소시켜야 이를 상쇄하는 방향, 즉 온도를 상승시키는 정반응(발열반응)이 진행된다.

ii) 문제 (2)에서 제시된 반응식에서 볼 수 있는 바와 같이 총 4mol의 기체종이 반응하여 절반에 해당하는 2mol의 기체종 만을 생산한다. 따라서 반응용기를 압축시켜야 반응계의 압력이 높아지고, 이에 따라 압력을 낮추기 위해 기체종의 숫자가 적어지는 방향, 즉 정방향으로 반응이 진행된다.

(3) 분자 간에 작용하는 힘은 분산력(또는 런던 힘), 쌍극자 힘(또는 쌍극자-쌍극자 인력), 그리고 수소결합으로 나눌 수 있다. 이때 질소와 수소 기체는 모두 비극성(또는 무극성) 분자로 분자 간 인력은 그 세기가 가장 약한 분산력 만이 작용하므로 끓는점이 매우 낮을 것으로 예상된다. 따라서 이와 같은 기체종들은 액화시키기 어렵다. 그러나 암모니아는 분자 간 가장 강한 인력인 수소결합이 작용하므로 끓는점이 상대적으로 높을 것으로 예상된다. 따라서 반응용기의 온도를 암모니아를 액화시킬 수 있는 온도까지만 낮추어 주면 액체 암모니아는 질소와 수소 기체로부터 쉽게 분리, 제거될 수 있다.

(4) 주어진 주제에 대한 논의를 위해서는 $Fe_2O_3(s)$과 $CO(g)$를 반응시켜 금속 철을 생산하는 반응의 $\triangle G$를 알아야 한다. $\triangle G$도 $\triangle H$와 같이 상태함수라고 하였으므로 헤스의 법칙을 적용하여 문제에서 제시한 반응식의 $\triangle G$를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$Fe_2O_3(s) \rightarrow 2Fe(s) + \frac{3}{2}O_2(g), \qquad \triangle G = +742\text{kJ}$$

$$3CO(g) + \frac{3}{2}O_2(g) \rightarrow 3CO_2(g), \qquad \triangle G = (-257\text{kJ}) \times 3 = -771\text{kJ}$$

$$Fe_2O_3(s) + 3CO(g) \rightarrow 2Fe(s) + 3CO_2(g), \qquad \triangle G = -29\text{kJ}$$

$$\triangle G = +742\text{kJ} + 3(-257\text{kJ}) = -29\text{kJ}$$

정리하면, $Fe_2O_3(s)$을 직접 가열하여 금속 철을 제조하는 방법의 경우 비자발적 반응으로 매우 큰 에너지 ($\triangle G = +742\text{kJ}$)를 필요로 하지만, $Fe_2O_3(s)$을 $CO(g)$와 반응시켜 금속 철을 제조하는 방법의 경우 자발적으로 반응이 일어나 ($\triangle G = -29\text{kJ}$) 상대적으로 적은 에너지만으로도 금속 철을 효율적으로 제조할 수 있기 때문이다.

(5) 제시문 (다)에 주어진 깁스-헬름홀츠 식에 따르면 $\triangle H$와 $\triangle S$가 모두 0보다 클 때, 반응의 자발성을 나타내는 $\triangle G$는 온도 T에 따라 결정된다. 즉, 반응의 평형 상태를 나타내는 $\triangle G = 0$인 온도를 기준으로, 이 온도 보다 더 높은 온도가 되면 $\triangle G < 0$이 되며 반응은 자발적으로 일어난다. 반면에 $\triangle G = 0$이 되는 온도보다 낮은 온도에서는 $\triangle G > 0$이 되고 반응은 비자발적으로 일어난다. 따라서 $\triangle G = 0$이 되는 온도가 반응이 자발적으로 진행되는 시작온도, 즉 가장 낮은 온도이고 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$T = \frac{\triangle H}{\triangle S} = \frac{99\text{kJ}}{0.14\text{kJ/K}} = 707\text{K}$$

즉, 707K(또는 434℃)이 반응이 자발적으로 일어나는 가장 낮은 온도이다.

[문제 4]

(1) 자유전자는 원자와의 충돌로 속도가 0이 되었다가 최대속도 $v_{\max}$까지 가속되는 운동을 반복한다.

거리 L만큼 움직이는 동안 등가속 되는 입자의 최대속도는, $2\frac{F}{m}L = v_{\max}^2 - 0^2$에서, $\sqrt{\frac{2FL}{m}}$ 이고,

평균속도 v는 $\frac{v_{\max}+0}{2} = \sqrt{\frac{FL}{2m}}$ 이다.

따라서 비저항은 $\rho = \frac{RA}{l} = \frac{V}{I}\frac{A}{l} = \frac{V}{envA}\frac{A}{l} = \frac{V}{enl}\sqrt{\frac{2m}{FL}}$ 로 구해진다.

(2) 외부에서 힘이 가해지지 않으면 관성의 법칙에 의해 운동상태가 유지되어 등속 직선 운동을 한다.

따라서 $t_1 = \frac{2d}{v_0}$, $y_1 = 0$이다.

(3) x축 방향으로의 힘은 없으므로 x축 방향으로는 등속 직선 운동을 하여 $t_2 = \frac{2d}{v_0}$이다.

y축 방향으로는 영역 A를 지나는 동안은 힘 F을 받아 등가속 운동을 하고, 영역 A를 벗어나면 힘이 0이므로 등속 직선 운동을 한다.

영역 A를 벗어날 때의 시간을 t_d라 하면 $t_d = \frac{d}{v_0}$이고,

이때의 y축 방향의 속도를 v_{yd}라 하면, y축 방향의 가속도를 a_y라 할 때, $v_{yd} = a_y t_d = \frac{F}{m}\frac{d}{v_0}$이다.

영역 A를 벗어난 이후 $x = 2d$에 이를 때까지 걸린 시간은 $t_2 - t_d = \frac{d}{v_0}$이고,

전자가 $x = 2d$에 이르렀을 때 y축 방향의 위치는 $y_2 = \frac{1}{2}\frac{F}{m}\left(\frac{d}{v_0}\right)^2 + \frac{Fd}{mv_0}\frac{d}{v_0} = \frac{3Fd^2}{2mv_0^2}$이다.

영역 A에서는 x축 방향으로는 등속 운동, y축 방향으로는 등가속 운동을 하므로 포물선 모양의 운동을 한다.
영역 A를 벗어난 이후 영역 B에서는 x축 방향, y축 방향 모두 등속 직선 운동이어서 등속 직선 운동을 한다.

(4) 오류는 교류 전력을 송전할 때의 송전 전압이 모두 송전선에서의 전압강하로 나타난다고 잘못 간주한 것이다. 송전 회로에서 송전 전압의 일부분만 송전선에 걸리게 되며 나머지는 변압기 코일 등에 걸릴 수 있다.

동일한 전력을 전달한다면 $P = VI$에서 송전 회로의 전류는 $I = \frac{P}{V}$로 주어지며, 송전 전압이 증가할 때 전류가 감소함은 자명하다. 이때 송전선에서 소모되는 전력은 $I^2R = \left(\frac{P}{V}\right)^2 R$로 송전 전압의 제곱에 반비례 한다.

송전선의 저항을 감소시키면 전력 손실을 줄일 수 있다. $R = \rho\frac{l}{A}$에 의하면, 송전선의 굵기 A를 증가시키거나, 송전선의 길이 l을 줄이거나, 송전선 재료 물질을 비저항 ρ가 작은 물질로 바꾸는 3가지 방법이 손실 전력을 줄이기 위해 사용될 수 있다.

(5) 운동량 보존과 운동 에너지 보존을 고려하여 두 식을 얻는다.

$mv_0 = mv + \alpha m v_B$, $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\alpha m v_B^2$

여기에서 v_B는 질량이 αm인 원자핵의 충돌 후 속도이다. 이 입자의 충돌 전 속도는 0이다.

위 식을 정리하여, 두 식 $v_0 - v = \alpha v_B$, $(v_0 - v)(v_0 + v) = \alpha v_B^2$을 얻는다.

$v_0 - v = \alpha v_B \neq 0$이므로 $v_0 + v = v_B$를 얻어, $v = -\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}v_0 = (-1 + \frac{2}{\alpha + 1})v_0$로 구할 수 있다.

α가 1에 가까울수록, 즉 원자핵의 질량이 중성자의 질량에 가까울수록, 중성자의 충돌 후 속도가 0에 가까워진다. 반면에 α가 충분히 커지면, 즉 원자핵의 질량이 충분히 커지면, 중성자의 충돌 후 속도가 $-v_0$에 수렴하여 속도의 방향은 바뀌지만 크기의 변화는 0에 가까워진다.