〈자연계열〉

2025학년도
모의논술고사 출제배경 및 해설

SEOULTECH
서울과학기술대학교
SEOUL NATIONAL UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

[문제 1]

1. 출제배경

대학에서 배우는 수학 및 수학의 활용을 이해하기 위해서는 고등학교 교육과정의 내용을 바탕으로 논리적 사고를 할 수 있어야 한다. 수학을 활용하여 접근할 수 있는 주제들은 대부분 정의를 정확히 이해하고 주제에 필요한 성질을 찾을 수 있는 능력이 있으면 해결 가능하다. 본 문항에서는 고등학교 수학 교육과정의 기본적인 내용을 이해하고 있는지 평가하고자 하였다. 특히, 수열의 극한을 바탕으로 한 정적분의 정의는 수학에서 매우 중요한 개념으로, 이는 함수의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이를 계산하고 다양한 실생활 문제를 해결하는 데 필요한 기초이다. 또한, 미분을 통한 함수의 증가와 감소 구간의 분석은 함수의 그래프 모양을 이해하는 데 필수적이며, 이러한 능력은 대학교 수학에서 배우는 다양한 수학적 모델을 이해하는 데 중요한 역할을 한다. 수열의 성질과 극한의 개념을 이해하는 것은 고등학교 수학에서 중요한 부분을 차지하며, 단계별로 수열의 합을 구하는 문제를 통해 논리적인 해결방법을 익히는 것은 수학적 문제 해결의 기초이면서 알고리즘을 이해하는 토대가 된다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[1.1] 정적분과 급수의 관계를 이해하고 간단한 함수의 정적분을 계산할 수 있는지 평가한다.
[1.2] 도함수를 이용하여 함수의 증감을 조사하고, 이를 부등식의 풀이에 적용할 수 있는지 평가한다.
[1.3] 등차수열의 성질과 극한의 개념을 이해하고, 이를 이용하여 주어진 관계식을 이해하고 분석할 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[1.1] 로그의 성질에 의하여

$$a_n = \frac{1}{n}\left\{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

이고 적분과 급수의 관계로부터

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 \ln(1+x)dx \quad \left(=\int_1^2 \ln x\,dx\right)$$
$$= 2\ln 2-1$$

이다.

[1.2] $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$이므로 $x>e$이면 $f'(x)<0$이고 $0<x<e$이면 $f'(x)>0$이다. 따라서 $x>e$인 범위에서 $f(x)$는 감소하고, $0<x<e$인 범위에서 함수는 증가한다. $e<a<b$이므로 $f(a)>f(b)$가 성립하고, $f(a)=\frac{\ln a}{a}>\frac{\ln b}{b}=f(b)$이고, $\ln b>\ln a>0$이므로 $\frac{a}{b}<\frac{\ln a}{\ln b}$가 성립한다.

[1.3] 등차수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$의 일반항은 아래와 같다.

$$a_n = a_1+(n-1)d_1$$
$$b_n = b_1+(n-1)d_2$$

수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n과 $b_{n+2}-b_n$은 다음과 같다.

$$S_n=\frac{n}{2}(b_1+b_n)=\frac{n}{2}(2b_1+(n-1)d_2)$$

$$b_{n+2}-b_n=2d_2$$

따라서, 주어진 식에 대입하여 정리하면,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(a_1+(n-1)d_1)^2}{2d_2\cdot\frac{n}{2}(2b_1+(n-1)d_2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(\frac{a_1}{n}+\left(1-\frac{1}{n}\right)d_1\right)^2}{n^2d_2\left(\frac{2b_1}{n}+\left(1-\frac{1}{n}\right)d_2\right)}=\frac{d_1^2}{d_2^2}=27$$

이때, $d_1>0$, $d_2>0$이므로, $\frac{d_1}{d_2}=3\sqrt{3}$이다.

3. 출제근거

「로그의 뜻과 성질」, 『고등학교 수학I』, 비상교육, 2021, 23-25쪽.
「함수의 증가와 감소」, 『고등학교 수학Ⅱ』, 천재교육, 2021, 83-89쪽.
「방정식과 부등식에의 활용」, 『고등학교 미적분』, 동아출판, 2021, 109-111쪽.
「부분적분법」, 『고등학교 미적분』, 동아출판, 2021, 140-144쪽.
「정적분과 급수의 합」, 『고등학교 미적분』, 동아출판, 2021, 151-154쪽.
「등차수열」, 『고등학교 수학I』, 지학사, 2020, 117-124쪽.
「수열의 극한값의 계산」, 『고등학교 미적분』, ㈜교학사, 2021, 17-22쪽

[문제 2]

1. 출제배경

함수와 함수의 미분과 적분은 변화하는 현상을 수학적으로 설명하고 분석할 때 사용하는 필수적인 개념이다. 주어진 상황을 함수로 표현하고 원하는 정보를 얻기 위해서 미분 및 적분을 활용하는 능력은 이공계열은 물론 변화하는 현상을 다루는 모든 대학 수준 교육과정 이수에서 필수적인 능력이다. 본 문항에서는 함수의 미분과 적분을 활용하여 문제에서 요구하는 상황에 맞는 정보를 도출해낼 수 있는지 평가하고자 하였다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[2.1] 함수의 그래프의 대칭성을 이해하고 있는지 평가한다.
[2.2] 함수의 그래프의 대칭성과 미분을 활용하여 원하는 정보를 찾아낼 수 있는지 평가하고자 한다.
[2.3] 적분을 이용하여 필요한 값을 구할 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[2.1] 곡선 $y=f(x)$가 원점에 대해서 대칭일 필요충분조건은 $f(-x)=-f(x)$가 성립하는 것이다. 여기서

$$f(-x)=\frac{5^{-x}}{1+5^{-x}}-\frac{1}{2}=\frac{1}{1+5^x}-\frac{1}{2}=\frac{1+5^x-5^x}{1+5^x}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{5^x}{1+5^x}=-f(x)$$

가 성립하므로 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대해서 대칭이다.

[2.2] $h(x)=f(x)-g(x)$라고 놓으면 $h(x)=0$을 만족하는 x가 세 개임을 보이면 된다. $y=h(x)$의 그래프는 원점대칭이므로 원점을 지나고, $h(x)=0$을 만족하는 x가 $x>0$인 범위에서 오직 하나뿐임을 보이면 충분하다. 이때

$$h'(x)=\frac{(\ln 5)5^x}{(1+5^x)^2}-m,\ h''(x)=-\frac{(\ln 5)^2(5^x-1)5^x}{(1+5^x)^3}$$

이다. 여기서 $x>0$인 범위에서 $h''(x)<0$이므로 $h'(x)$는 $x>0$인 범위에서 감소한다.

또한 $\lim_{x\to\infty}h'(x)=-m<0$이므로 $h'(0)=\frac{1}{4}\ln 5-m>0$이면 $y=h(x)$는 $x>0$인 범위에서 $h'(x)=0$을 만족하는 $x=x_0$ $(x_0>0)$이 유일하게 존재한다.

$-\frac{1}{2}<f(x)<\frac{1}{2}$로부터, 함수 $h(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	0	…	x_0	…	$\frac{1}{m}$	…
$h'(x)$	$\frac{1}{4}\ln 5-m$	+	0	−	−	−
$h(x)$	0	증가	극댓값>0	감소	−	감소

따라서 그래프의 개형으로부터 $y=h(x)$의 그래프는 $0<x<\frac{1}{m}$인 범위에서 x축과 단 한 번 만난다는 것을 알 수 있다.

한편, $m\geq\frac{1}{4}\ln 5$이면 $h'(0)\leq 0$이므로 $h(x)$가 $x>0$에서 감소함수이다. 그런데 $h(0)=0$이므로 $x>0$인 범위에서 x축과 만나지 않는다. 따라서 $0<m<\frac{1}{4}\ln 5$이다.

[2.3] $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프가 모두 원점대칭이므로 $a=-c$ 이다.

또한, $f(x)>-\frac{1}{2}$로 부터 문제에 제시된 도형의 넓이는 $\int_{-c}^{c}\frac{5^x}{1+5^x}dx$이다. 여기서

$$\int_{-c}^{c}\frac{5^x}{1+5^x}dx=\int_{-c}^{0}\frac{5^x}{1+5^x}dx+\int_{0}^{c}\frac{5^x}{1+5^x}dx$$

이고 우변의 첫 번째 적분에서 $t=-x$로 치환하면

$$\int_{-c}^{0}\frac{5^x}{1+5^x}dx=\int_{0}^{c}\frac{5^{-t}}{1+5^{-t}}dt=\int_{0}^{c}\frac{1}{1+5^t}dt$$

이 성립한다. 도형의 넓이가 2이므로

$$\int_{-c}^{c}\frac{5^x}{1+5^x}dx=\int_{0}^{c}\frac{1}{1+5^x}dx+\int_{0}^{c}\frac{5^x}{1+5^x}dx=\int_{0}^{c}1\,dx=c=2$$

이다. 따라서 $f(2)=\frac{25}{1+25}-\frac{1}{2}=g(2)=2m$으로부터 $m=\frac{3}{13}$이다.

3. 출제근거

「함수의 증가와 감소, 극대와 극소」, 『고등학교 수학Ⅱ』, 천재교육, 2020, 83-90쪽.
「함수의 그래프와 그 활용」, 『고등학교 수학Ⅱ』, 천재교육, 2020, 91-97쪽.
「방정식과 부등식에의 활용」, 『고등학교 미적분』, 동아출판, 2021, 109-111쪽.
「도형의 넓이」, 『고등학교 수학Ⅱ』, 천재교육, 2020, 132-139쪽.
「함수의 몫의 미분법」, 『고등학교 미적분』, 천재교육, 2021, 83-86쪽.
「치환적분법」, 『고등학교 미적분』, 동아출판사, 2021, 134-139쪽.

[문제 3]

1. 출제배경

기하적 대상을 삼각함수를 이용하여 표현하고, 이를 대수적으로 분석할 수 있는 능력은 이공계 대학 과정을 공부하는데 필수적이인 능력으로, 이를 갖추고 있는지 평가한다. 특히 삼각함수, 부등식, 코사인 법칙 등에 관한 내용을 알고 있는지 평가하는 문제이다. 코사인 법칙을 활용하여 문제에서 요구되는 값을 표현하고, 간단한 이차부등식을 풀이할 수 있는지 평가한다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[3.1] 코사인 법칙을 적용할 수 있는지 평가한다.
[3.2] 주어진 정보를 삼각함수를 포함하는 부등식 문제로 변환할 수 있는지와 함께 간단한 부등식을 풀이할 수 있는지 평가한다.
[3.3] 삼각함수의 값을 구할 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[3.1] $t=\overline{\mathrm{AB}}$이므로 코사인 법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{AP}}^2 = t^2+1-2t\cos\theta$$

이고

$$\overline{\mathrm{OP}}^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2+1-\frac{8}{3}\cos\theta = \frac{25}{9}-\frac{8}{3}\cos\theta$$

이다.

[3.2] 삼각형의 세 변의 길이의 제곱의 합은

$$l_1 = \overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2 = t^2+1-2t\cos\theta+t^2+1 = 2t^2-2t\cos\theta+2$$

이고

$$l_2 = \overline{\mathrm{OP}}^2+\frac{7}{9} = \frac{32}{9}-\frac{8}{3}\cos\theta$$

이다. 따라서 모든 점 A에 대하여 $l_1 > l_2$가 되기 위해서는, $0<t<\frac{4}{3}$에 대하여

$$2t^2-2t\cos\theta+2 > \frac{32}{9}-\frac{8}{3}\cos\theta$$

또는

$$t^2-t\cos\theta+\frac{4}{3}\cos\theta-\frac{7}{9} = \left(t-\frac{1}{2}\cos\theta\right)^2-\frac{1}{4}\cos^2\theta+\frac{4}{3}\cos\theta-\frac{7}{9} > 0$$

가 성립해야 한다. 그런데 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$일 때 $0<\frac{1}{2}\cos\theta<\frac{1}{2}$이므로

$$-\frac{1}{4}\cos^2\theta+\frac{4}{3}\cos\theta-\frac{7}{9} > 0$$

즉,

$$\cos^2\theta-\frac{16}{3}\cos\theta+\frac{28}{9} < 0$$

이면 된다. 인수분해하면

$$\left(\cos\theta-\frac{2}{3}\right)\left(\cos\theta-\frac{14}{3}\right) < 0$$

이므로 $\frac{2}{3} < \cos\theta < \frac{14}{3}$이다. 그런데 $\cos\theta < 1$이므로 $\cos\theta$의 범위는 $\frac{2}{3} < \cos\theta < 1$이다.

[3.3] $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$에 대해서 $\cos^2\theta$의 값을 구하면 각각 $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$이다.

이 중 $\left(\frac{2}{3}\right)^2$보다 큰 값은 $\frac{3}{4}$와 $\frac{1}{2}$이므로, 조건을 만족하는 θ는 $\frac{\pi}{6}$와 $\frac{\pi}{4}$이다.

3. 출제근거

「삼각함수의 그래프」,『고등학교 수학Ⅰ』, 동아출판, 2021, 72-83쪽.
「인수분해」, 『고등학교 수학』, 좋은책 신사고, 2021, 28-30쪽.
「두 점 사이의 거리」, 『고등학교 수학』, 좋은책 신사고, 2021, 105-107쪽.
「이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계」, 『고등학교 수학』, 좋은책 신사고, 2021, 62-63쪽.
「삼각함수의 그래프」, 『고등학교 수학I』, 비상교육, 2021, 76-88쪽.
「사인법칙과 코사인법칙」, 『고등학교 수학I』, 비상교육, 2021, 95-104쪽.