〈자연계열〉

2024학년도
모의논술고사 출제배경 및 해설

SEOULTECH
서울과학기술대학교
SEOUL NATIONAL UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

[문제 1]

1. 출제배경

대학에서 배우는 수학을 이해하기 위해서는 고등학교 교육과정에서의 내용을 바탕으로 논리적 사고를 할 수 있어야 한다. 대부분의 수학을 활용하여 풀 수 있는 주제들은 정의를 정확히 이해하고 주제에 필요한 성질을 찾아 해결할 수 있는 능력이 필요하다. 특히 주제를 단순화하여 가능성을 예측하는 과정은 경우의 수를 통하여 길러질 수 있다. 또한 직각삼각형의 닮음비를 이용하여 등비급수의 공비와 합을 구하는 과정은 문제해결 과정을 단계별로 처리할 수 있게 해준다. 단면의 넓이가 함수로 주어졌을 때 이를 이용하여 입체의 부피를 구할 수 있다면 적분 응용의 한 부분을 이해하고 적용할 수 있음을 뜻한다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[1.1] 함수의 정의를 이용하여 주어진 조건을 만족하는 함수의 경우의 수를 구할 수 있는지 평가한다.
[1.2] 주어진 도형의 닮음 조건을 알고, 이들의 닮음비를 이용하여 등비급수의 합을 구할 수 있는지 평가한다.
[1.3] 단면적이 주어진 입체도형의 부피를 구하기 위해 적분을 이용할 수 있는지와 다항식의 정적분을 할 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[1.1] 1은 홀수이므로 $f(1)$의 가능한 값은 조건 (가)로부터 2,3,5,7중 하나이다.
$f(1)=2$인 경우, 차례로

$$f(2)=4,\ f(3)=5,\ f(4)=6,\ f(5)=7,\ f(6)=8$$

이다. 또 $f(1)=3$인 경우,

$$f(2)=4,\ f(3)=5,\ f(4)=6,\ f(5)=7,\ f(6)=8$$

이다. $f(1)=5$인 경우, $f(3)=7$이다. 그러나 조건 (다)에 의해 $f(5)$는

$$7=f(3)<f(5)$$

인 소수이고 7보다 큰 소수는 Y의 원소가 아니므로 f는 함수가 아니다.
$f(1)=7$인 경우, $f(3)$은

$$7=f(1)<f(3)$$

인 소수이고 마찬가지로 7보다 큰 소수는 Y의 원소가 아니므로 f는 함수가 아니다. 따라서 함수 f의 개수는 2개이다.

[1.2] 삼각형 Q_1P_2O은 각 Q_1P_2O가 직각인 직각이등변삼각형이고 빗변의 길이가 1이므로

$$\overline{Q_1P_2}=\overline{OP_2}=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \overline{P_1P_2}=1-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

이다. 따라서 $a_1=\dfrac{\sqrt{2}-1}{4}$이다. 모든 자연수 n에 대하여 삼각형 $Q_nP_{n+1}O$이 각 $Q_nP_{n+1}O$가 직각인 직각이등변삼각형이므로,

$$\overline{Q_nP_{n+1}}=\overline{OP_{n+1}},\ \overline{OP_{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{OQ_n}$$

이고, 문제의 조건에서 $\overline{OP_n}=\overline{OQ_n}$이다. 따라서

$$\overline{OP_{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{OP_n},\qquad \overline{Q_{n+1}P_{n+2}}=\overline{OP_{n+2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{OP_{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{Q_nP_{n+1}},$$

$$a_n = \frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}\times\overline{\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}} = \frac{1}{2}\times\left(\overline{\mathrm{OP}_n}-\overline{\mathrm{OP}_{n+1}}\right)\times\overline{\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}}$$

로부터

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{2}\times\left(\overline{\mathrm{OP}_{n+1}}-\overline{\mathrm{OP}_{n+2}}\right)\times\overline{\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{P}_{n+2}} \\ &= \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{\mathrm{OP}_n}-\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{\mathrm{OP}_{n+1}}\right)\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\overline{\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}} \\ &= \frac{1}{4}\times\left(\overline{\mathrm{OP}_n}-\overline{\mathrm{OP}_{n+1}}\right)\times\overline{\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}} = \frac{1}{2}a_n, \end{aligned}$$

즉 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 합은

$$\frac{\frac{\sqrt{2}-1}{4}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

이다.

[1.3] 첫 번째 입체도형의 부피 V_1을 구하기 위하여, 밑면으로부터 높이가 x일 때 단면의 넓이를 $S_1(x)$라 하면, $S_1(x)=\pi(a^2-x)$이므로,

$$V_1 = \int_0^{a^2}\pi(a^2-x)dx = \frac{1}{2}\pi a^4$$

이다. 또 두 번째 입체도형의 부피 V_2를 구하기 위하여, 밑면으로부터 높이가 x일 때 단면의 넓이를 $S_2(x)$라 하면, $S_2(x)=\pi(a-x)^4$이므로 $V_2 = \int_0^{a}\pi(a-x)^4dx$이다. $t=a-x$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-1$이므로,

$$V_2 = \int_a^0\pi t^4(-dt) = \int_0^a\pi t^4dt = \frac{1}{5}\pi a^5$$

이다. $V_1 = V_2$를 만족하는 양의 실수인 a는 $\frac{5}{2}$이다.

3. 출제근거

「함수」, 『고등학교 수학』, 미래엔, 2021, 219-223쪽.
「경우의 수」, 『고등학교 수학』, 미래엔, 2021, 261-264쪽.
「등비급수의 활용」, 『고등학교 미적분』, 천재교육, 2021, 40-42쪽.
「치환적분법」, 『고등학교 미적분』, 동아출판사, 2021, 134-139쪽.
「부피」, 『고등학교 미적분』, 동아출판사, 2021, 159-161쪽.

[문제 2]

1. 출제배경

함수 및 미분과 적분은 변화하는 현상을 수학적으로 모델링하고 해석할 때 필수적인 도구이다. 주어진 상황을 함수로 표현하고 원하는 정보를 얻기 위해서 미분 및 적분을 활용하는 능력은 이공계열 전공과정 수학을 위해 필수적인 능력이다. 본 문항에서는 함수의 미분과 적분을 활용하여 문제에서 요구하는 상황에 맞는 정보를 도출해낼 수 있는지 평가하고자 하였다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[2.1] 미분을 이용하여 그래프의 개형을 그릴 수 있고 이를 교점의 개수를 구하는 데 활용할 수 있는지 평가한다.
[2.2] 정적분을 이용하여 두 곡선이 만나서 생기는 도형의 넓이를 계산할 수 있는지 평가한다.
[2.3] 미분을 이용하여 연속함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는지 평가한다.

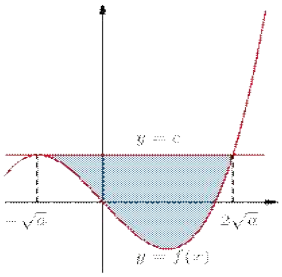
2. 예시답안 및 해설

[2.1] 곡선 $y=f(x)$의 도함수

$$f'(x)=3x^2-3a=3(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})$$

로부터 $y=f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{a}$	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
$f'(x)$	>0	0	<0	0	>0
y	증가	극대	감소	극소	증가



이를 이용하여 곡선 $y=f(x)$의 그래프를 그려보면 직선 $y=c$와 곡선 $y=f(x)$가 두 점에서 만나기 위해서는 c가 $y=f(x)$의 극댓값 혹은 극솟값과 같아야 한다는 것을 알 수 있다. 극댓값은 $f(-\sqrt{a})=2a\sqrt{a}$이고 극솟값은 $f(\sqrt{a})=-2a\sqrt{a}$이므로 구하는 값은 $c=2a\sqrt{a}$이다.

[2.2] 직선 $y=2a\sqrt{a}$와 곡선 $y=f(x)$의 교점의 x좌표는

$$x^3-3ax-2a\sqrt{a}=(x+\sqrt{a})^2(x-2\sqrt{a})=0$$

으로부터 $x=-\sqrt{a}$ 또는 $x=2\sqrt{a}$이다.
이 구간에서 직선 $y=2a\sqrt{a}$가 곡선 $y=f(x)$보다 위쪽에 위치하므로

$$\begin{aligned}S&=\int_{-\sqrt{a}}^{2\sqrt{a}}\left(2a\sqrt{a}-(x^3-3ax)\right)dx\\&=\left[2a\sqrt{a}\,x-\frac{x^4}{4}+\frac{3ax^2}{2}\right]_{-\sqrt{a}}^{2\sqrt{a}}\\&=\frac{27}{4}a^2\end{aligned}$$

이다.

[2.3] $g(x)=\dfrac{x^2}{(x-2)^2(6-x)}$의 최솟값을 구간 $3\le x\le 5$에서 구하면 된다. 함수 $y=g(x)$가 닫힌구간에서 연속이므로 최솟값은 구간의 양 끝점 혹은 $g'(x)=0$을 만족하는 점에서의 함숫값 중 가장 작은 값이다.

$$\begin{aligned}g'(x)&=\frac{2x(x-2)^2(6-x)-x^2\{2(x-2)(6-x)-(x-2)^2\}}{(x-2)^4(6-x)^2}\\&=\frac{x(x^2+2x-24)}{(x-2)^3(6-x)^2}\\&=\frac{x(x+6)(x-4)}{(x-2)^3(6-x)^2}\end{aligned}$$

이므로 $g'(x)=0$을 만족하는 값은 구간 $3\le x\le 5$ 내에서 $x=4$ 뿐이다. 그러므로

$$g(3)=3,\ g(4)=2,\ g(5)=\frac{25}{9}$$

중 가장 작은 값인 2가 최솟값이다.

3. 출제근거

「함수의 증가와 감소, 극대와 극소」, 『고등학교 수학Ⅱ』, 천재교육, 2020, 83-90쪽.
「함수의 그래프와 그 활용」, 『고등학교 수학Ⅱ』, 천재교육, 2020, 91-97쪽.
「도형의 넓이」, 『고등학교 수학Ⅱ』, 천재교육, 2020, 132-139쪽.
「함수의 몫의 미분법」, 『고등학교 미적분』, 천재교육, 2021, 83-86쪽.

[문제 3]

1. 출제배경

이공계 대학 과정을 공부하는데 필수적인 삼각함수, 도함수, 접선, 무한급수 등에 관한 내용을 알고 있는지 평가하는 문제이다. 삼각함수가 포함된 분수함수의 근을 찾고, 도함수를 이용하여 접선의 방정식을 구할 수 있어야 하며, 무한급수의 합을 이해하고 구할 수 있는지 확인하고자 하였다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[3.1] 코사인 함수의 값이 0이 되는 점을 구할 수 있는지 평가한다.
[3.2] 접선의 방정식을 찾고 y절편을 구할 수 있는지 평가한다. 삼각함수가 포함된 분수함수의 도함수를 구할 수 있어야 하고, n이 홀수일 때와 짝수일 때로 나누어 생각할 수 있어야 한다.
[3.3] 삼각형의 넓이를 구하고, 급수의 합을 구하기 위하여 분수식을 부분분수로 변형할 수 있는지 평가한다.
[3.4] 부분합을 구하고 극한을 계산하여 무한급수의 합을 구할 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[3.1] $x^2>0$이므로 $\cos x=0$이 되는 x를 찾으면 된다. 따라서 $x_n=\frac{(2n-1)\pi}{2}$이다.

[3.2] $f(x)$를 미분하면

$$f'(x)=-\frac{\sin x}{x^2}-\frac{2\cos x}{x^3}$$

이므로

$$f'(x_n)=\frac{-\sin x_n}{x_n^2}-\frac{2\cos x_n}{x_n^3}=-\frac{\sin x_n}{x_n^2}=-\left(\frac{2}{(2n-1)\pi}\right)^2\sin\frac{(2n-1)\pi}{2}$$

이고, 사인값을 계산하면

$$f'(x_n)=\begin{cases}-\left(\frac{2}{(2n-1)\pi}\right)^2, & n=1,3,5,\cdots\\ \left(\frac{2}{(2n-1)\pi}\right)^2, & n=2,4,6,\cdots\end{cases}$$

이다. 따라서 $n=1,3,5,\cdots$일 때 점 P_n에서 곡선 $y=f(x)$의 접선의 방정식은

$$y=-\left(\frac{2}{(2n-1)\pi}\right)^2\left(x-\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)$$

이고, 이 직선의 y절편은 $y_n=\frac{2}{(2n-1)\pi}$이다. 또 $n=2,4,6,\cdots$일 때 점 P_n에서 곡선 $y=f(x)$의 접선의 방정식은

$$y=\left(\frac{2}{(2n-1)\pi}\right)^2\left(x-\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)$$

이고, 이 직선의 y절편은 $y_n=-\frac{2}{(2n-1)\pi}$이다. 따라서

$$y_n=\begin{cases}\frac{2}{(2n-1)\pi}, & n=1,3,5,\cdots\\ -\frac{2}{(2n-1)\pi}, & n=2,4,6,\cdots\end{cases}$$

이다.

[3.3] 두 점 P_n과 P_{n+1} 사이의 거리는 π이므로

$$A_n=\frac{1}{2}\times\pi\times\frac{2}{(2n-1)\pi}=\frac{1}{2n-1}$$

이고

$$\sum_{n=1}^{10}A_nA_{n+1}=\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

이다. 부분분수로 바꾸어 계산하면

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{10}A_nA_{n+1}&=\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\\&=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)\right\}=\frac{10}{21}\end{aligned}$$

이다.

[3.4] 부분합을 구하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_nA_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}$$

이다.

3. 출제근거

「삼각함수의 그래프」, 『고등학교 수학 Ⅰ』, 동아출판, 2021, 72-83쪽.
「여러 가지 수열의 합」, 『고등학교 수학 Ⅰ』, 동아출판, 2021, 130-133쪽.
「급수의 수렴과 발산」, 『고등학교 미적분』, 천재교육, 2021, 30-34쪽.
「접선의 방정식」, 『고등학교 수학Ⅱ』, 천재교육, 2021, 74-76쪽.
「사인함수와 코사인함수의 도함수」, 『고등학교 미적분』, 천재교육, 2021, 76-77쪽.
「함수의 몫의 미분법」, 『고등학교 미적분』, 천재교육, 2021, 83-86쪽.
「접선의 방정식」, 『고등학교 미적분』, 천재교육, 2021, 108-110쪽.