〈오후〉

2024학년도
논술전형고사 출제배경 및 해설

SEOULTECH
서울과학기술대학교
SEOUL NATIONAL UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

[문제 1]

1. 출제배경

이공계열 전공과정을 이수하기 위해 필수적으로 알아야 할 고등학교 수학 교과과정의 내용을 숙지하고 있는지 확인하는 문항들로 구성하였다. 본 문제를 해결하기 위해서는 문항의 내용을 수식화하고 원하는 답을 얻기 위해 관련된 기본 개념을 활용할 수 있어야 한다. 특히 도형의 이동, 이차함수, 역함수, 이차방정식, 미분을 잘 알고 적용할 수 있는지 평가하고자 하였다.

문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[1.1] 좌표평면 위 그래프의 이동과 이차함수와 직선의 위치 관계를 이해하고, 연립방정식을 풀 수 있는지 평가한다.
[1.2] 역함수의 성질을 이용하여 주어진 지수함수로부터 이차방정식을 유도하고, 그 방정식의 근을 구할 수 있는지 평가한다.
[1.3] 닫힌 구간에서 정의된 연속함수의 최솟값을 미분을 이용하여 구할 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[1.1] $y=g(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프이므로

$$g(x)=-\left\{\frac{1}{4}(x-2)^2+(x-2)+3\right\}=-\frac{1}{4}x^2-2$$

이다. 직선의 방정식 $y=ax+b$와 $y=f(x)$를 연립하면

$$\frac{1}{4}x^2+x+3=ax+b \Rightarrow \frac{1}{4}x^2+(1-a)x+3-b=0$$

이고, 이 이차방정식의 판별식이 0이어야 하므로 $a^2-2a-2+b=0$이다. 직선의 방정식 $y=ax+b$와 $y=g(x)$를 연립하면 $-\frac{1}{4}x^2-2=ax+b \Rightarrow -\frac{1}{4}x^2-ax-2-b=0$

이고, 이 이차방정식의 판별식이 0이어야 하므로 $a^2-2-b=0$이다. 정리된 두 판별식을 연립하면, $a=-1$, $b=-1$ 또는 $a=2$, $b=2$이다. 따라서 두 그래프와 동시에 접하는 직선의 방정식은 $y=-x-1$ 또는 $y=2x+2$이다.

(별해) $y=g(x)$를 찾은 이후 미분하여 구한 기울기를 이용하는 방법에 해당된다. $f(x)$와 $g(x)$의 두 그래프와의 접점을 각각 $(a,f(a))$, $(b,g(b))$로 가정하면, 아래가 성립한다.

$$\frac{f(a)-g(b)}{a-b}=f'(a)=g'(b)$$

$f'(x)$와 $g'(x)$는 각각 $f'(x)=\frac{1}{2}x+1, g'(x)=-\frac{1}{2}x$이며, $f'(a)=g'(b)$의 관계를 통해 $\frac{1}{2}a+1=-\frac{1}{2}b$ 임을 알 수 있다. 이를 대입하면,

$$\frac{f(a)-g(b)}{a-b}=\frac{\frac{1}{4}a^2+a+3-(-\frac{1}{4}(-a-2)^2-2)}{a+a-2}=\frac{\frac{1}{2}a^2+2a+6}{2a+2}$$

이고, 위 식과 $f'(a)$와의 관계를 통해

$$\frac{\frac{1}{2}a^2+2a+6}{2a+2}=\frac{1}{2}a+1 \quad \Rightarrow \quad a^2+2a-8=0 \quad \Rightarrow \quad (a+4)(a-2)=0$$

임을 알 수 있다. 결과적으로 a는 -4 또는 2의 경우가 되며,
(i) $a=-4$일 때, 점 $(-4,3)$을 -1의 기울기로 지나는 직선이므로, $y=-x-1$
(ii) $a=2$일 때, 점 $(2,6)$을 2의 기울기로 지나는 직선이므로, $y=2x+2$
가 된다.

[1.2] 함수 $f(x)=a^x+b$의 그래프 $y=f(x)$와 그 역함수의 그래프와의 교점은 함수 $f(x)=a^x+b$의 그래프 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점과 같다. 방정식 $a^x+b=x$의 두 근이 1, 2이므로, 다음 연립이차 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a^2+b=2 \end{cases}$$

$a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $b=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 또는 $a=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $b=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$이다. $a>0$이므로 $a-b$의 값은 $\sqrt{5}$이다.

[1.3] $\tan\theta$를 x로 치환하면 $-1\le x\le 1$인 범위에서 $g(x)=\frac{2+x^2}{2-x}$의 최솟값을 구하면 된다.

$$g'(x)=\frac{-x^2+4x+2}{(2-x)^2}$$

이므로 $x=2\pm\sqrt{6}$에서 $g'(x)=0$이다. $2+\sqrt{6}>1$이므로 $x=-1$, $x=2-\sqrt{6}$, $x=1$에서 $g(x)$의 함숫값 중 최댓값과 최솟값이 있다. 여기서

$$g(-1)=1,\ g(2-\sqrt{6})=2(\sqrt{6}-2),\ g(1)=3$$

이므로 구하는 최솟값은 $2(\sqrt{6}-2)$이다.

3. 출제근거

「도형의 이동」, 『고등학교 수학』, ㈜교학사, 2021, 143-152쪽.
「이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계」, 『고등학교 수학』, ㈜교학사, 2021, 63-64쪽.
「연립이차방정식」, 『고등학교 수학』, 좋은책신사고, 2021, 76-77쪽.
「이차방정식의 근과 판별식」, 『고등학교 수학』, 동아출판, 2021, 49-51쪽.
「지수함수」, 『고등학교 수학I』, 동아출판, 2021, 37-40쪽.
「함수의 몫의 미분법」, 『고등학교 미적분』, 좋은책신사고, 2021, 76-79쪽.
「함수의 그래프」, 『고등학교 미적분』, 좋은책신사고, 2021, 102-108쪽.

[문제 2]

1. 출제배경

수학을 배우는 목적 중 하나는 수학 지식을 활용하여 다양한 문제의 해결 능력을 배양하는 데 있다. 본 문제에서는 주어진 조건을 이해하고 조합을 이용하여 경우의 수를 계산할 수 있는지와 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있는지를 평가하고자 하였다.

문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[2.1] 조합을 이용하여 경우의 수를 계산할 수 있는지 평가한다.
[2.2] 주어진 조건이 있을 때 경우의 수를 계산할 수 있는지 평가한다.
[2.3] 수학적 귀납법을 이해하고, 이를 이용하여 명제를 증명할 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[2.1] 주어진 선분을 이용하여 찾을 수 있는 서로 다른 사각형의 개수는 ${}_{10}C_2 \times {}_{10}C_2 = 2025$이다.

[2.2] $n=9$일 때 찾을 수 있는 가장 작은 사각형의 넓이 a_9는 $\frac{1}{9}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{81}$이고, 두 번째로 작은 사각형의 넓이는 $\frac{1}{9}\times\frac{2}{9}=\frac{2}{81}>a_8=\frac{1}{64}$이다. 따라서 문제의 조건을 만족하는 사각형의 개수는, 문항 [2.1]에서 구한 사각형의 개수에서 넓이가 가장 작은 사각형의 개수 81을 뺀 값과 같으므로 $2025-81=1944$이다.

[2.3] a_k는 $\frac{1}{k^2}$이고, $m\geq 2$인 모든 자연수 m에 대하여 $n=m$일 때 찾을 수 있는 두 번째로 넓이가 큰 사각형의 넓이는 $1-\frac{1}{m}$이다. 따라서 주어진 명제 $p(m)$은 다음과 같다.

$$p(m)\colon\ n=m\text{일 때 } 1-\frac{1}{m}>\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{m^2}$$

(i) $m=2$일 때 $\frac{1}{2}>\frac{1}{2^2}$이므로 $p(2)$가 성립한다.

(ii) $m=k$일 때 $p(k)$가 성립한다고 가정하자.

$$1-\frac{1}{k}>\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}$$

양변에 $\frac{1}{(k+1)^2}$을 더하면

$$1-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}>\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}$$

이다. 이때 $1-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}=1-\frac{k^2+k+1}{k(k+1)^2}$이고, $\frac{k^2+k+1}{k(k+1)^2}>\frac{k^2+k}{k(k+1)^2}=\frac{1}{k+1}$이므로

$$1-\frac{1}{k+1}>1-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}>\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}$$

이다. 따라서 $p(k+1)$이 성립한다.
(i), (ii)에 의해서 $p(m)$은 $m\geq 2$인 모든 자연수 m에 대하여 성립한다.

3. 출제근거

「조합」, 『고등학교 수학』, 좋은책신사고, 2021, 257−259쪽.
「조합」, 『고등학교 수학』, 동아출판, 2021, 264−267쪽.
「수학적 귀납법」, 『고등학교 수학I』, 지학사, 2020, 152−156쪽.
「수학적 귀납법」, 『고등학교 수학I』, 동아출판, 2021, 142−144쪽.

[문제 3]

1. 출제배경

다양한 자연현상과 사회현상을 이해하고 설명하기 위해 미적분이 활용되는 경우가 많다. 따라서, 미적분 개념의 이해는 이공계 대학 신입생이 반드시 갖춰야 하는 기본 소양이다. 특히 도형의 넓이나 부피를 계산하기 위해 정적분을 활용하는 방법을 배우는 것은, 복잡한 문제를 세분하여 단순화한 후 이를 종합하여 해결하는 원리를 이해하기 위한 초석이다. 이러한 원리는 일, 에너지, 압력, 확률 계산 등에 널리 활용된다. 본 문제에서는 적분과 관련하여 여러 가지 함수의 원시함수를 구하고 부분적분법을 활용할 수 있는지, 정적분을 이용하여 넓이를 계산할 수 있는지, 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해하고 활용할 수 있는지를 평가하고자 하였다.

문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[3.1] 부분적분법을 이용하여 여러 가지 함수의 부정적분을 구할 수 있는지 평가한다.
[3.2] 정적분을 이용하여 주어진 도형의 넓이를 구할 수 있는지 평가한다.
[3.3] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이용하여 극한값을 구할 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[3.1] 부분적분법을 적용하면

$$\int 2e^x \sin x dx = 2e^x \sin x - \int 2e^x \cos x dx$$

이다. 우변의 부정적분식에서 부분적분법을 적용하면

$$\int 2e^x \cos x dx = 2e^x \cos x + \int 2e^x \sin x dx$$

이다. 이를 첫 번째 식에 대입하면

$$\int 2e^x \sin x dx = e^x(\sin x - \cos x) + C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

를 얻는다.

[3.2] $e^x > 0$이므로, $[2n\pi, (2n+1)\pi]$에서 $2e^x \sin x \geq 0$이고 $[(2n+1)\pi, (2n+2)\pi]$에서 $2e^x \sin x \leq 0$이다. 따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} A_n &= \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} 2e^x \sin x dx - \int_{(2n+1)\pi}^{(2n+2)\pi} 2e^x \sin x dx \\ &= \left[e^x(\sin x - \cos x)\right]_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} - \left[e^x(\sin x - \cos x)\right]_{(2n+1)\pi}^{(2n+2)\pi} \\ &= e^{(2n+1)\pi} + e^{2n\pi} + e^{(2n+2)\pi} + e^{(2n+1)\pi} \\ &= e^{2n\pi}(1+e^{\pi})^2 \end{aligned}$$

이다.

[3.3] 문항[3.2]로부터 $\ln A_k - 2\ln(1+e^{\pi}) = \ln \dfrac{A_k}{(1+e^{\pi})^2} = 2k\pi$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^8}\left\{\ln A_k-2\ln(1+e^{\pi})\right\}^7=(2\pi)^7\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^7\frac{1}{n}$$

이 성립한다. 정적분과 급수의 합 사이의 관계에 의하여, 구하는 극한값은

$$(2\pi)^7\int_0^1 x^7dx=16\pi^7$$

이다.

3. 출제근거

「여러 가지 함수의 부정적분과 정적분」, 『고등학교 미적분』, 천재교육, 2021, 139-146쪽.
「부분적분법」, 『고등학교 미적분』, 미래엔, 2020, 151-157쪽.
「정적분과 급수」, 『고등학교 미적분』, ㈜교학사, 2020, 167-171쪽.
「넓이」, 『고등학교 미적분』, 비상교육 2020, 147-149쪽.