〈오전〉

2024학년도
논술전형고사 출제배경 및 해설

SEOULTECH
서울과학기술대학교
SEOUL NATIONAL UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

[문제 1]

1. 출제배경

대학에서 이공계 전공을 수학하기 위해서는 주어진 문제를 수식화하고 풀이하는 능력이 필요하다. 이러한 능력을 측정하기 위해, 본 문제에서는 고등학교 수학에서 다루는 내용을 얼마나 잘 이해하는지 묻고자 하였다. 특히, 근과 계수의 관계, 삼각함수, 미분에서의 극값의 개념, 지수함수 적분, 단면 도형의 넓이와 부피의 관계 등을 잘 알고 이를 문제 풀이에 적용할 수 있는지 평가하고자 하였다.

문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[1.1] 근과 계수의 관계를 알고 이를 통해 삼각함수로 주어진 값을 구할 수 있는지 평가한다.
[1.2] 함수의 미분을 활용하여 주어진 조건을 만족하는 함수를 얻고 이를 통해 도함수와 극값의 개념을 이해하고 있는지 평가한다.
[1.3] 주어진 단면의 넓이로부터 지수함수의 적분을 활용하여 입체도형의 부피를 구할 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[1.1] $\sin\theta, \cos\theta$는 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이다. 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하면

$$\sin\theta+\cos\theta=\frac{k+4}{k},\quad \sin\theta\cos\theta=\frac{k+2}{k}$$

이다. 따라서,

$$\frac{(k+4)^2}{k^2}=1+\frac{2(k+2)}{k}$$
$$(k-4)(k+2)=0$$

이다.

$k=4$일 때, $f(x)=4x^2-8x+6=4(x-1)^2+2>0$이므로 x축과의 교점이 없다.

$k=-2$일 때, $f(x)=-2x^2-2x$가 되어 x축과의 교점은 $(0,0),(-1,0)$이다. 그러므로

$$\sin\theta=0,\ \cos\theta=-1\text{일 때}\ \ \theta=\pi$$
$$\sin\theta=-1,\ \cos\theta=0\text{일 때}\ \ \theta=\frac{3}{2}\pi$$

이다. 따라서 모든 θ값들의 합은 $\pi+\frac{3}{2}\pi=\frac{5}{2}\pi$이다.

[1.2] $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 4인 삼차함수이다. 조건 (가)에 의해 $f'(x)$의 이차항의 계수와 상수항은 0이다. 따라서

$$f'(x)=4x^3+ax$$

이다. 조건 (나)에 의해 $f'(2)=0$이므로 $a=-16$이다. 즉,

$$f'(x)=4x^3-16x$$

이다. 이를 적분하면 $f(x)=x^4-8x^2+C$ 이고 다시 조건 (나)에 의해

$$f(2)=16-32+C=-13$$

이므로 $C=3$이다. 즉, $f(x)=x^4-8x^2+3$이다.

[1.3] 단면의 넓이는 $(x+1)2^x$이다. 따라서 부피는

$$V = \int_0^1 (x+1)2^x dx = \left[(x+1)\frac{2^x}{\ln 2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2^x}{\ln 2} dx$$
$$= \frac{3}{\ln 2} - \left[\frac{2^x}{(\ln 2)^2}\right]_0^1 = \frac{3}{\ln 2} - \frac{1}{(\ln 2)^2} = \frac{3\ln 2 - 1}{(\ln 2)^2}$$

이다.

3. 출제근거

「이차방정식의 근과 계수의 관계」, 『고등학교 수학』, ㈜교학사, 2021, 54-56쪽.
「x축, y축, 원점, 직선 $y=x$에 대한 대칭이동」, 『고등학교 수학』, 금성출판사, 2021, 157-160쪽.
「삼각함수의 뜻」, 『고등학교 수학I』, 동아출판, 2021, 67-71쪽.
「도함수」, 『고등학교 수학II』, 금성출판사, 2021, 64-68쪽.
「함수의 극대와 극소」, 『고등학교 수학II』, 금성출판사, 2021, 87-90쪽.
「정적분」, 『고등학교 수학II』, 천재교육, 2020, 121-126쪽.
「지수함수와 로그함수의 미분」,『고등학교 미적분』, 지학사, 2021, 57-60쪽.
「부분적분법」,『고등학교 미적분』, 지학사, 2021, 148-149쪽.
「여러 가지 함수의 정적분」,『고등학교 미적분』, 지학사, 2021, 150-155쪽.
「입체도형의 부피」,『고등학교 미적분』, 지학사, 2021, 167-169쪽.

[문제 2]

1. 출제배경

무리함수는 고등학교 수학 교과과정에서 처음 다루게 되는 함수로써 다항함수의 역함수뿐 아니라 지진해일의 전파 속력과 수심과의 관계, 태풍의 중심기압과 최대 풍속의 관계, 자유낙하 물체의 위치에 따른 시간 등을 표현하는 데 이용된다. 데카르트에 의해 도형을 좌표평면으로 이동할 수 있게 되면서 대칭, 각의 값 등 도형의 여러 성질을 명확하게 계산할 수 있게 되었다. 문제를 해결하기 위해 대칭이동, 무리함수의 미분, 접선의 방정식, 코사인 법칙을 활용할 수 있는지 평가하고자 하였다.

문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[2.1] 대칭이동을 이용하여 삼각형의 둘레가 최소가 되는 점의 좌표를 구할 수 있는지 평가한다.
[2.2] 무리함수의 미분을 이용하여 접선의 방정식과 두 직선의 교점을 바르게 구하여 원하는 삼각함수의 값을 얻을 수 있는지 평가한다.
[2.3] 원하는 값을 얻기 위해 삼각함수 법칙과 유리방정식을 풀 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[2.1] 점 A를 x축 대칭시켜 얻은 점 $A'(t,-\sqrt{t})$와 점 B를 지나는 직선의 x절편이 점 P의 x좌표이다. 이 직선의 방정식은

$$y=\frac{1}{2\sqrt{t}}(x-t)-\sqrt{t}=\frac{1}{2\sqrt{t}}x-\frac{3}{2}\sqrt{t}$$

이므로, $y=0$을 대입하면 점 P의 x좌표는 $3t$이다.

[2.2] $f(x)=\sqrt{x}$라 놓으면, $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$이므로 점 A에서의 접선 l_1의 방정식과 점 B에서의 접선 l_2의 방정식은 각각

$$y=\frac{1}{2\sqrt{t}}x+\frac{\sqrt{t}}{2},\quad y=\frac{1}{6\sqrt{t}}x+\frac{3}{2}\sqrt{t}$$

이다. 이 두 직선의 방정식을 연립하면 점 Q의 좌표는 $(3t,2\sqrt{t})$이다. 삼각형 PQO는 각 OPQ가 직각인 직각삼각형이고 $\overline{\mathrm{PQ}}=2\sqrt{t}$이므로

$$\tan(\angle \mathrm{PQO})=\frac{\overline{\mathrm{OP}}}{\overline{\mathrm{PQ}}}=\frac{3t}{2\sqrt{t}}=\frac{3}{2}\sqrt{t}$$

이다.

[2.3] $k=\cos\theta$로 두어 $k+\frac{1}{k}=-\frac{10}{3}$의 해를 구하면, $k=-3,\ -\frac{1}{3}$이다. $-1\le\cos\theta\le1$이므로

$\cos\theta=-\frac{1}{3}$이다.

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{t+4t^2}$, $\overline{\mathrm{BP}}=\sqrt{9t+36t^2}$, $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{4t+64t^2}$이므로 코사인 법칙에 의해

$$\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2-\overline{\mathrm{AB}}^2}{2\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{BP}}}=\frac{1-4t}{1+4t}=-\frac{1}{3}$$

이다. 마지막 등식을 풀면 $t=\frac{1}{2}$이다.

(별해)

$k=\cos\theta$로 두어 $k+\frac{1}{k}=-\frac{10}{3}$의 해를 구하면, $k=-3,\ -\frac{1}{3}$이다. $-1\le\cos\theta\le1$이므로

$\cos\theta=-\frac{1}{3}$이고 이로부터 $\tan\theta=-2\sqrt{2}$이다. x축의 양의 방향과 l_1, l_2가 이루는 각을 각각 θ_1, θ_2라 하면,$\tan\theta_1=-\frac{1}{2\sqrt{t}}$, $\tan\theta_2=\frac{1}{2\sqrt{t}}$이고 $\theta=\theta_1-\theta_2$이므로

$$\tan\theta=\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}=\frac{4\sqrt{t}}{1-4t}=-2\sqrt{2}$$

이다. (여기서 $1-4t<0$이어야 한다) 양변을 제곱하여 t에 관한 방정식을 풀면 $t=\frac{1}{2},\frac{1}{8}$이고 $1-4t<0$이어야 하므로 $t=\frac{1}{2}$이다.

3. 출제근거

「직선의 방정식」, 『고등학교 수학』, 미래엔, 2021, 125-127쪽.
「대칭이동」, 『고등학교 수학』, ㈜교학사, 2021, 147-152쪽.
「무리함수」, 『고등학교 수학』, 미래엔, 2021, 243-248쪽.
「코사인 법칙」, 『고등학교 수학I』, 미래엔, 2021, 102-106쪽.
「도함수」, 『고등학교 수학II』, 금성출판사, 2021, 64-68쪽.
「합성함수의 미분법」, 『고등학교 미적분』, 비상교육, 2021, 79-84쪽.

[문제 3]

1. 출제배경

자연에서 일어나는 여러 물리 현상들을 과학기술에 접목하여 제품을 생산하고 그 제품의 성능을 향상하려는 노력이 최근에 많이 이루어지고 있다. 특히, 나노/바이오 기술을 활용한 자연 모사 소자에 관한 연구는 AI 기반 반도체 개발에 이용될 수 있다. 이처럼 자연의 여러 현상들을 이해하고 기술 개발에 활용하기 위해서는 이를 수학적으로 기술하고 해석하는 능력이 중요하다. 예를 들어 매개변수로 물체의 운동을 기술할 수 있다. 또한 동심원 형태의 구조는 렌즈, 회절격자, X-선 반사판 등 빛을 제어하는 여러 광학기기에 이용되고 있다. 본 문제에서는 물체가 움직일 때 동심원 형태의 경계선을 지나는 상황을 자연로그, 등비급수, 미분, 적분 등을 활용하여 올바르게 해석하고 답을 구할 수 있는지 평가하고자 하였다.

문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[3.1] 원의 중심에서 점까지의 거리와 원의 반지름을 비교하여 주어진 문제에 올바르게 답할 수 있는지 평가한다.
[3.2] 원을 마지막으로 만나는 시간을 구한 뒤, 정적분을 활용하여 점이 움직인 거리를 올바르게 답할 수 있는지 평가한다.
[3.3] 삼각함수의 적분과 등비급수를 활용하여 주어진 식을 해석하고 질문에 올바르게 답할 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[3.1] 원점과 점 P사이의 거리는 $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(e^{2t}\cos t)^2+(e^{2t}\sin t)^2}=e^{2t}$이다. $t=0$에서 $t=\pi$일 때까지 점 P가 움직이므로, $t=\pi$일 때 원점과 점 P사이의 거리 $e^{2\pi}$이 원의 반지름 3^N 이상이 되는 최대 자연수 N을 구하자.

$$3^N \le e^{2\pi} \Rightarrow \quad N\ln 3 \le 2\pi \quad \Rightarrow \quad N \le \frac{2\pi}{\ln 3}$$

이고, 주어진 조건 $1.09 < \ln 3 < 1.10$에서 $\frac{2\pi}{1.10} < \frac{2\pi}{\ln 3} < \frac{2\pi}{1.09}$이므로 $5 < \frac{2\pi}{\ln 3} < 6$임을 알 수 있다. 따라서 점 P가 만난 원의 개수 $N=5$이다.

[3.2] 반지름의 길이가 3^5인 원을 마지막으로 만나므로, 이때의 시각 t를 구하면 다음과 같다.

$$e^{2t}=3^5 \quad \Rightarrow \; t=\frac{5}{2}\ln 3$$

또한

$$\frac{dx}{dt}=2e^{2t}\cos t-e^{2t}\sin t,\ \frac{dy}{dt}=2e^{2t}\sin t+e^{2t}\cos t$$

이고

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{4e^{4t}+e^{4t}}=\sqrt{5}\,e^{2t}$$

이므로 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^{\frac{5}{2}\ln 3}\sqrt{5}\,e^{2t}dt=\sqrt{5}\left[\frac{e^{2t}}{2}\right]_0^{\frac{5}{2}\ln 3}=\frac{\sqrt{5}}{2}(243-1)=121\sqrt{5}$$

이다.

[3.3] 정적분을 계산하면

$$\int_{k-1}^{k} \pi \sin(\pi x)dx = [-\cos(\pi x)]_{k-1}^{k} = -\cos(k\pi) + \cos(k-1)\pi = 2(-1)^{k-1}$$

이고 $N=5$이므로

$$\sum_{k=5}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} \times \{2(-1)^{k-1}\} = \sum_{k=5}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} = \frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

이다.

3. 출제근거

「속도와 거리」, 『고등학교 수학II』, 동아출판, 2021, 144-150쪽.
「속도와 거리」, 『고등학교 수학II』, 지학사, 2021, 148-152쪽.
「속도와 거리」, 『고등학교 미적분』, 동아출판, 2021, 162-168쪽.
「속도와 거리」, 『고등학교 미적분』, 천재교육, 2021, 176-187쪽.
「여러 가지 함수의 부정적분과 정적분」, 『고등학교 미적분』, 동아출판, 2021, 127-133쪽.
「여러 가지 함수의 부정적분과 정적분」, 『고등학교 미적분』, 천재교육, 2021, 139-146쪽.
「등비급수」, 『고등학교 미적분』, 동아출판, 2021, 34-38쪽.
「등비급수」, 『고등학교 미적분』, 천재교육, 2021, 36-39쪽.
「매개변수로 나타낸 함수의 미분법」, 『고등학교 미적분』, 동아출판, 2021, 91-93쪽.
「매개변수로 나타낸 함수의 미분법」, 『고등학교 미적분』, 천재교육, 2021, 93-96쪽.
「등비수열」, 『고등학교 수학I』, 동아출판, 2021, 115-120쪽.
「지수함수와 로그함수의 극한」, 『고등학교 미적분』, 동아출판, 2021, 51-55쪽.
「원의 방정식」, 『고등학교 수학』, ㈜교학사, 2021, 131-133쪽.
「무리함수」, 『고등학교 수학』, ㈜교학사, 2021, 238-244쪽.