〈자연계열〉

2022학년도
모의논술고사 출제배경 및 해설

SEOULTECH
서울과학기술대학교
SEOUL NATIONAL UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

[문제 1]

1. 출제배경

수학을 배우는 목적 중 하나는 수학 지식과 이해력을 변형된 조건에 응용하여 문제를 푸는 능력을 배양하는 데 있다. 지수함수, 직선의 방정식, 접선, 음함수 미분법, 수열의 합, 정적분의 계산 등의 개념을 알고 문제 해결에 적용할 수 있는지 평가하는 문제이다.

각 세부 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[1.1] 어떤 물질의 처음 상태와 나중 상태에 대한 설명을 만족하는 함수의 수식 표현을 찾고, 이 함수를 이용하여 원하는 정보를 찾을 수 있는지 평가한다.
[1.2] 음함수 미분법을 이용하여 함수의 그래프가 아닌 곡선의 접선을 구할 수 있는지 평가한다.
[1.3] 다항함수의 정적분을 계산할 수 있고, 간단한 수열의 합을 구할 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[1.1] $T(0)=88$이므로

$$88=24+a,\quad a=64$$

이고, $T(5)=72$이므로

$$24+64e^{5b}=72,\quad e^b=\left(\frac{3}{4}\right)^{1/5}$$

이다. 따라서

$$T(t)=24+64\left(\frac{3}{4}\right)^{t/5}$$

이다. $t=15$일 때

$$T(15)=24+64\left(\frac{3}{4}\right)^{3}=51$$

이므로 음료수의 온도는 $51\,℃$이다.

[1.2] 점 P의 좌표를 $(a,0)$이라 하면 $a^3-8=0$이므로 $a=2$이다. 주어진 곡선의 방정식을 음함수 미분하면

$$3x^2+y+xy'+3y^2y'=0$$

이므로 $(x,y)=(2,0)$을 대입하여 점 $(2,0)$에서의 접선의 기울기 $y'=-6$을 얻는다. 따라서 l_1의 방정식은 $y=-6x+12$이다. 직선 l_1과 l_2는 수직이므로 l_2의 기울기는 $\frac{1}{6}$이 되고 다시 l_2는 점 P를 지나므로 l_2의 방정식은 $y=\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}$이다. l_1과 l_2의 교점 좌표는 $\mathrm{P}(2,0)$이고 l_1의 y절편은 12, l_2의 y절편은 $-\frac{1}{3}$이므로 직선 l_1와 l_2, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\left(12+\frac{1}{3}\right)\times 2=\frac{37}{3}$이다.

[1.3] 자연수 k에 대하여,

$$\int_{-1}^{1}k^2x^{k-1}dx=\left[kx^k\right]_{-1}^{1}=\begin{cases}2k, & k\text{는 홀수}\\ 0, & k\text{는 짝수}\end{cases}$$

이다. 이로부터 구하는 정적분의 값은

$$\int_{-1}^{1}(1+4x+9x^2+\cdots+2022^2x^{2021})dx = 2(1+3+\cdots+2021)$$
$$= 2\sum_{k=1}^{1011}(2k-1)$$
$$= 2\times\left\{2\times\frac{1011\times(1011+1)}{2}-1011\right\}$$
$$= 2\times 1011^2 = 2044242$$

이다.

3. 출제근거

「거듭제곱과 거듭제곱근」, 『고등학교 수학I』, 좋은책 신사고, 2020, 11-15쪽.
「지수함수」, 『고등학교 수학I』, 좋은책 신사고, 2020, 40-42쪽.
「지수함수와 로그함수의 활용」, 『고등학교 수학I』, 좋은책 신사고, 2020, 46-51쪽.
「직선의 방정식」, 『고등학교 수학』, ㈜금성출판사, 2018, 126-129쪽.
「두 직선의 평행과 수직」, 『고등학교 수학』, ㈜금성출판사, 2018, 131-134쪽.
「접선의 방정식」, 『고등학교 수학II』, 좋은책 신사고, 2020, 72-74쪽.
「음함수와 역함수의 미분법」, 『고등학교 미적분』, 미래앤, 2020, 94-97쪽.
「여러 가지 수열의 합」, 『고등학교 수학I』, 좋은책 신사고, 2020, 136-138쪽.
「다항함수의 정적분」, 『고등학교 수학II』, ㈜교학사, 2020, 134-136쪽.

[문제 2]

1. 출제배경

주어진 두 곡선이 서로 수직이 되기 위한 조건을 찾고, 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있는지 평가하는 문제이다. 원하는 결과를 얻기 위해서는 제시문과 고등학교 수학 지식을 적절히 이용하여야 하며, 삼차함수의 그래프를 이해하여야 한다.

각 세부 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[2.1] 두 곡선의 교점의 좌표를 구할 수 있는지 평가한다.
[2.2] 제시문에서 주어진 두 곡선의 수직을 이해하고, 주어진 곡선이 수직이 되기 위한 조건을 찾을 수 있는지 평가한다. 모든 교점에서 수직이 되어야 함을 제대로 이해하였는지도 평가 항목이다.
[2.3] 두 곡선의 그래프에서 대소 관계를 판별할 수 있는지 평가한다.
[2.4] 삼차함수로 주어진 두 곡선과 두 직선으로 둘러싸인 도형을 이해하고 그 넓이를 구할 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[2.1] 교점은

$$\frac{1}{\sqrt{3}}x^3-ax^2+1=\frac{1}{\sqrt{3}}x^3+ax^2-1$$

일 때 이므로 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{a}}$ 이고, 이때 $y=\pm\frac{1}{a\sqrt{3a}}$ 이다. 따라서 교점의 좌표는

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a}},\frac{1}{a\sqrt{3a}}\right),\quad \left(-\frac{1}{\sqrt{a}},-\frac{1}{a\sqrt{3a}}\right)$$

이다.

[2.2] $f(x)$와 $g(x)$를 미분하면

$$f'(x)=\sqrt{3}x^2-2ax,\quad g'(x)=\sqrt{3}x^2+2ax$$

이다. 모든 교점에서 두 곡선의 접선이 수직이 되려면

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{a}-2\sqrt{a}\right)\times\left(\frac{\sqrt{3}}{a}+2\sqrt{a}\right)=-1,\quad \left(\frac{\sqrt{3}}{a}+2\sqrt{a}\right)\times\left(\frac{\sqrt{3}}{a}-2\sqrt{a}\right)=-1$$

이어야 한다. 정리하면 $\frac{3}{a^2}-4a=-1$이므로

$$4a^3-a^2-3=(a-1)(4a^2+3a+3)=0$$

이어야 한다. 그런데 $4a^2+3a+3\neq 0$이므로 $a=1$이다.

[2.3] [2.2]에서 $a=1$이다. $\frac{1}{\sqrt{3}}x^3-x^2+1\geq\frac{1}{\sqrt{3}}x^3+x^2-1$이려면 $x^2\leq 1$이다. 따라서 $f(x)\geq g(x)$이기 위한 x값의 범위는 $-1\leq x\leq 1$이다.

[2.4] $-1\leq x\leq 1$이면 $f(x)\geq g(x)$이고, $x<-1$ 또는 $x>1$이면 $f(x)<g(x)$이므로 구하는 도형의 넓이 A는

$$\begin{aligned}A&=\int_{-2}^{2}|f(x)-g(x)|\,dx=\int_{-2}^{2}|-2x^2+2|\,dx\\&=\int_{-2}^{-1}(2x^2-2)\,dx+\int_{-1}^{1}(-2x^2+2)\,dx+\int_{1}^{2}(2x^2-2)\,dx=8\end{aligned}$$

이다.

3. 출제근거

「인수분해」, 『고등학교 수학』, ㈜교학사, 2018, 29-33쪽.
「삼차방정식과 사차방정식」, 『고등학교 수학』, ㈜교학사, 2018, 72-74쪽.
「이차부등식과 연립이차부등식」, 『고등학교 수학』, ㈜교학사, 2018, 86-90쪽.
「두 직선의 평행과 수직」, 『고등학교 수학』, ㈜교학사, 2018, 120-123쪽.
「접선의 방정식」, 『고등학교 수학II』, 좋은책 신사고, 2020, 72-74쪽.
「다항함수의 정적분」, 『고등학교 수학II』, ㈜교학사, 2020, 134-136쪽.
「넓이」, 『고등학교 수학II』, ㈜교학사, 2020, 142-148쪽.
「넓이」, 『고등학교 미적분』, 비상, 2020, 147-149쪽.

[문제 3]

1. 출제배경

극한은 사회과학, 자연과학 등 여러 분야의 연구에서 현상 분석에 많이 이용된다. 등비수열은 빛의 투과율, 원리합계 등 물리학이나 경제학에서도 나타나며 프랙털 구조와 같은 자연현상을 단순화할때

도 나타나는 수학적 개념이다. 주어진 현상에서 규칙을 발견하고 그 현상을 이해, 예측하기 위하여 등비수열과 등비급수를 바르게 이해하는지 평가하는 문제이다.

각 세부 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[3.1] 직각삼각형에서 삼각비를 이용하여 원하는 식을 얻을 수 있는지 평가한다.
[3.2] 삼각형의 닮음을 이용하여 등비급수의 합을 구할 수 있는지 평가한다.
[3.3] 등비급수로 표현되는 도형들의 넓이의 합이 특정한 값이 되는 조건을 구할 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[3.1] $t=\tan\theta=\dfrac{\alpha}{1-\alpha}$ 이므로 $\alpha=\dfrac{t}{1+t}$ 이다.

[3.2] 자연수 n에 대하여 삼각형 $\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n$에서 $\overline{\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n}:\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n}=\alpha:\sqrt{2\alpha^2-2\alpha+1}$ 이므로

$$\alpha\,\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n}=\sqrt{2\alpha^2-2\alpha+1}\,\overline{\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n}=\sqrt{2\alpha^2-2\alpha+1}\times l_n$$

이다. 또 $l_{n+1}=\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}}=\alpha\,\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n}$ 이므로 $l_{n+1}=\sqrt{2\alpha^2-2\alpha+1}\times l_n$ 이 된다. $l_1=\alpha$ 이므로 수열 $\{l_n\}$는 첫째항이 α, 공비가 $\sqrt{2\alpha^2-2\alpha+1}$ 인 등비수열이 된다. 이를 [3.1]에서의 관계식을 이용하여 t로 표현하면

$$\alpha=\frac{t}{1+t},\qquad \sqrt{2\alpha^2-2\alpha+1}=\frac{\sqrt{1+t^2}}{1+t}$$

이고 따라서 구하고자 하는 등비급수의 합은

$$\sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{t}{1+t-\sqrt{1+t^2}}=\frac{1}{2}(1+t+\sqrt{1+t^2})$$

이다.

[3.3] [3.2]에서 삼각형 $\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n$와 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{D}_{n+1}$의 닮음비는 $1:\sqrt{2\alpha^2-2\alpha+1}$ 이므로 넓이의 비는 $1:(2\alpha^2-2\alpha+1)$이다. 따라서 수열 $\{S_{2n-1}\}$은 첫째항 S_1이 $\dfrac{\alpha(1-\alpha)}{2}$, 공비가 $(2\alpha^2-2\alpha+1)^2$인 등비수열이다. 등비급수가 $\sum_{n=1}^{\infty}S_{2n-1}=\dfrac{2}{13}$을 만족해야 하므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_{2n-1}=\frac{\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}}{1-(2\alpha^2-2\alpha+1)^2}=\frac{1}{8(\alpha^2-\alpha+1)}=\frac{2}{13}$$

을 풀면 $\alpha=\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}$이다. α의 범위가 $0<\alpha<\dfrac{1}{2}$이므로 $\alpha=\dfrac{1}{4}$이다.

3. 출제근거

「인수분해」, 『고등학교 수학』, ㈜교학사, 2018, 29-33쪽.
「삼각함수의 뜻」, 『고등학교 수학I』, 지학사, 2020, 75-79쪽.
「등비수열」, 『고등학교 수학I』, 지학사, 2020, 125-131쪽.
「등비급수의 활용」, 『고등학교 미적분』, 미래앤, 2020, 37-39쪽.