〈4차〉

2022학년도
논술전형고사 출제배경 및 해설

SEOULTECH
서울과학기술대학교
SEOUL NATIONAL UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

[문제 1]

1. 출제 배경

고등학교 수학 과정에서 배우는 수학의 내용들은 대학에서 배우는 전공에서 필수 지식을 습득하는 바탕이 된다. 이 문제를 풀기 위한 수학적 개념은 여러 가지 방정식과 함수, 함수에 대한 미분, 수열, 확률 등 고등학생이 알아야 할 기본적인 내용이며 이공계 대학생이 갖춰야 할 기초 지식이기도 하다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[1.1] 절댓값이 포함된 방정식의 해를 구하고 원하는 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있는지 평가한다.
[1.2] 수열의 합으로 원하는 수열의 성질을 얻어낼 수 있는지 평가한다.
[1.3] 이항분포를 이해하고 원하는 확률을 구할 수 있는지 평가한다.

2. 예시 답안 및 해설

[1.1] $x>0$에서 방정식 $|x^3-2x|=x^2$의 해는 $x=1,2$이므로 교점은 $(1,1)$, $(2,4)$이다.

$$f(x)=\begin{cases}-x^3+2x & (0<x\le\sqrt{2})\\ x^3-2x & (x>\sqrt{2})\end{cases}$$

이다. 미분하면

$$f'(x)=\begin{cases}-3x^2+2 & (0<x<\sqrt{2})\\ 3x^2-2 & (x>\sqrt{2})\end{cases}$$

이므로, $(1,1)$에서 접선의 기울기는 $f'(1)=-1$이고 $(2,4)$에서 접선의 기울기는 $f'(2)=10$이다. 따라서 접선의 방정식은 $y=-x+2$와 $y=10x-16$이다.

[1.2] 주어진 식에서

$$\frac{11\,a_{10}}{10a_9}=\sum_{k=1}^{9}\frac{(k+2)a_{k+1}}{(k+1)a_k}-\sum_{k=1}^{8}\frac{(k+2)a_{k+1}}{(k+1)a_k}=(9^2+5\times9)-(8^2+5\times8)=22$$

이고

$$\frac{10\,a_9}{9\,a_8}=\sum_{k=1}^{8}\frac{(k+2)a_{k+1}}{(k+1)a_k}-\sum_{k=1}^{7}\frac{(k+2)a_{k+1}}{(k+1)a_k}=(8^2+5\times8)-(7^2+5\times7)=20$$

이므로

$$a_{10}=20a_9,\quad a_9=18a_8$$

이다. 따라서 $\dfrac{a_{10}}{a_8}=360$이다.

[1.3] A가 4회의 사격 중 1회 이상 명중시킬 확률은

$${}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^4+{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^4+{}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^4+{}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{15}{16}\quad\text{또는}\quad 1-{}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{15}{16}$$

이고 B가 2회의 사격 중 1회 이상 명중시킬 확률은

$${}_2\mathrm{C}_1p(1-p)+{}_2\mathrm{C}_2p^2=p(2-p)\quad\text{또는}\quad 1-{}_2\mathrm{C}_0(1-p)^2=p(2-p)$$

이다. $p(2-p)=\dfrac{15}{16}$를 풀면 $p=\dfrac{3}{4},\dfrac{5}{4}$이고 $p\le1$이므로 $p=\dfrac{3}{4}$이다.

3. 출제 근거

「삼차방정식과 사차방정식」, 『고등학교 수학』, 지학사, 2021, 81-83쪽.
「삼차방정식과 사차방정식」, 『고등학교 수학』, 천재교육, 2021, 76-77쪽.
「접선의 방정식」, 『고등학교 수학 II』, ㈜교학사, 2021, 80-82쪽.
「접선의 방정식」, 『고등학교 수학 II』, 좋은책신사고, 2020, 72-74쪽.
「수열의 합」, 『고등학교 수학 I』, 동아출판, 2018, 127-137쪽.
「수열의 합」, 『고등학교 수학 I』, 미래엔, 2021, 143-154쪽.
「이항분포와 그 성질」, 『고등학교 확률과 통계』, 천재교육, 2019, 98-99쪽.
「이항분포」, 『고등학교 확률과 통계』, 지학사, 2020, 92-94쪽.

[문제 2]

1. 출제 배경

복잡하고 다루기 어려운 함수를 비교적 간단한 함수를 이용하여 이해하는 것은 이공계열 학생이 갖춰야 할 기본 소양 중 하나이다. 예를 들어 최근 각광 받는 인공지능 분야에서는 자연에서 등장하는 복잡한 함수를 상대적으로 간단한 인공신경망 함수로 표현한다. 본 문항에서는 다루기 어려운 지수함수의 크기를 비교적 간단한 다항함수와 미분을 이용해서 파악할 수 있는지와 수열의 극한을 이해하고 있는지 평가하고자 하였다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[2.1] 미분을 이용하여 접선의 방정식 및 최솟값을 구할 수 있는지 평가한다.
[2.2] 미분을 이용하여 최솟값을 구할 수 있는지 평가한다.
[2.3] 함수를 이용하여 부등식을 증명할 수 있는지 평가한다.
[2.4] 주어진 상황을 이해하고 이를 활용하여 수열의 극한을 계산할 수 있는지 평가한다.

2. 예시 답안 및 해설

[2.1] $y=e^x$를 미분하면 $y'=e^x$이므로 점 $(0,1)$에서 접선의 기울기는 1이다. 따라서 $f(x)=x+1$이다. $g(x)=e^x-x-1$이라고 하자. $g(x)$를 미분하면

$$g'(x)=e^x-1$$

이므로 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	0 (극소)	↗

따라서 $g(0)=0$은 극솟값이자 최솟값이다.

[2.2] $h(x)=2x^2+x+1-e^x$이라고 하면

$$h'(x)=4x+1-e^x,\ h''(x)=4-e^x$$

이다. 열린구간 $(0,1)$에서 $h''(x)>0$이므로 $h'(x)$는 구간 $(0,1)$에서 증가한다. 한편 $h'(0)=0$이므로 $0<x<1$에서 $h'(x)>0$이다. 따라서 $h(x)$는 열린구간 $(0,1)$에서 극값을 가지지 않는다. 여기서 $h(0)=0,\ h(1)>0$이므로 함수 $h(x)$의 최솟값은 0이다.

[2.3] 문항 [2.2]에 의해서 $0\le x\le 1$에서 $2x^2+x+1-e^x\ge 0$이므로 부등식

$$e^x\le 1+x+2x^2$$

이 성립한다. 모든 자연수 n에 대하여 $0<\frac{1}{n}\le 1$이므로 $x=\frac{1}{n}$을 위 부등식에 대입하면

$$\sqrt[n]{e}\le 1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}$$

가 성립한다.

[2.4] 문항 [2.1]에 의해서 $e^x\ge 1+x$가 성립한다. 여기서 $x=\frac{1}{n}$을 대입하면, 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{1}{n}\le \sqrt[n]{e}-1$$

이 성립함을 알 수 있다. 또 문항 [2.3]에 의하여

$$\sqrt[n]{e}-1\le \frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}$$

가 모든 자연수 n에 대하여 성립한다. $c_n=n(\sqrt[n]{e}-1)$이라고 하면 모든 자연수 n에 대하여

$$1\le c_n\le 1+\frac{2}{n}$$

가 성립한다. $a_n=1,\ b_n=1+\frac{2}{n}$라고 하면

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=1$$

이므로 제시문 (나)에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{e}-1)=1$$

이다.

3. 출제 근거

「수열의 극한값의 계산」, 『고등학교 미적분』, ㈜교학사, 2021, 17-22쪽.
「수열의 극한값의 계산」, 『고등학교 미적분』, 좋은책신사고, 2020, 15-18쪽.
「지수함수와 로그함수의 미분」, 『고등학교 미적분』, ㈜교학사, 2021, 60-63쪽.
「지수함수와 로그함수의 미분」, 『고등학교 미적분』, 좋은책신사고, 2020, 55-57쪽.
「함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법」, 『고등학교 수학 II』, ㈜교학사, 2021, 71-74쪽.
「도함수」, 『고등학교 수학 II』, 좋은책신사고, 2020, 61-66쪽.
「함수의 증가와 감소, 극대와 극소」, 『고등학교 수학 II』, ㈜교학사, 2021, 88-95쪽.
「함수의 극대와 극소」, 『고등학교 수학 II』, 좋은책신사고, 2020, 83-86쪽.
「방정식과 부등식에의 활용」, 『고등학교 수학 II』, ㈜교학사, 2021, 100-102쪽.
「방정식과 부등식에의 활용」, 『고등학교 수학 II』, 좋은책신사고, 2020, 93-95쪽.

[문제 3]

1. 출제 배경

이공계 대학생에는 주어진 상황을 이해하고 이를 수학적으로 기술하는 능력이 반드시 필요하다. 예를 들어 원운동이나 주기운동의 경우 물체의 운동을 삼각함수 등을 이용하여 기술할 수 있다. 본 문제를 풀기 위한 수학적 개념은 직선의 방정식, 삼각함수의 정의 및 법칙, 정적분과 급수의 합 사이의 관계 등 이공계 대학생이 갖춰야 할 기초 지식이다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[3.1] 좌표평면 위의 선분의 길이를 각으로 표현할 수 있는지 평가한다.
[3.2] 코사인법칙을 이용하여 복잡한 식을 간단히 하고 문제에서 원하는 값을 계산할 수 있는지 평가한다.
[3.3] 정적분을 이용하여 극한값을 구할 수 있는지 평가한다.

2. 예시 답안 및 해설

[3.1] 점 P_k의 좌표는 $(\cos\theta_k, \sin\theta_k)$이고 $\mathrm{C}(-1,0)$이므로 점 C와 점 P_k를 지나는 직선의 방정식은 $y=\dfrac{\sin\theta_k}{\cos\theta_k+1}(x+1)$이다. 점 O와 점 B를 지나는 직선의 방정식은 $y=-x$이고, 이 두 직선의 교점 R_k의 좌표는 $\left(-\dfrac{\sin\theta_k}{\sin\theta_k+\cos\theta_k+1}, \dfrac{\sin\theta_k}{\sin\theta_k+\cos\theta_k+1}\right)$이다. 따라서

$$L_k=\frac{\sqrt{2}\sin\theta_k}{\sin\theta_k+\cos\theta_k+1}$$

이다.

[3.2] 삼각형 R_kCO에서 코사인법칙을 이용하면

$$M_k^2=L_k^2+1-2L_k\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=L_k^2+1-\sqrt{2}L_k$$

이다. $\theta_k=\dfrac{3\pi}{4n}k$이므로 $n=3$일 때 $\theta_k=\dfrac{\pi}{4}k$이다. 따라서 구하고자 하는 값은

$$\sum_{k=1}^{3}\left(M_k^2-L_k^2\right)=\sum_{k=1}^{3}\left(1-\sqrt{2}L_k\right)=3-2\sum_{k=1}^{3}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}k\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}k\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}k\right)+1}=3-2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$$

이다.

[3.3] $\theta_k=\dfrac{3\pi}{4n}k$이므로

$$S_k=\frac{1}{2}\times 4\times\sin\frac{3k\pi}{4n}=2\sin\frac{3k\pi}{4n},\quad T_n=\sum_{k=1}^{n}S_k=\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{3k\pi}{4n}$$

이다. 따라서 정적분을 이용하여 극한값을 구하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{3k\pi}{4n}\frac{1}{n}=\int_0^1 2\sin\left(\frac{3\pi x}{4}\right)dx=-\frac{8}{3\pi}\left[\cos\left(\frac{3\pi x}{4}\right)\right]_0^1=\frac{8+4\sqrt{2}}{3\pi}$$

이다.

3. 출제 근거

「삼각함수」, 『고등학교 수학 I』, 비상, 2021, 64-91쪽.
「사인법칙과 코사인법칙」, 『고등학교 수학 I』, 비상, 2021, 94-107쪽.
「급수」, 『고등학교 미적분』, 비상, 2020, 28-31쪽.
「여러 가지 함수의 부정적분」, 『고등학교 미적분』, 비상, 2020, 121-125쪽.
「정적분과 급수」, 『고등학교 미적분』, 비상, 2020, 143-146쪽.
「정적분과 급수와의 관계」, 『고등학교 미적분』, 지학사, 2021, 161-163쪽.
「넓이」, 『고등학교 미적분』, 지학사, 2021, 164-165쪽.