〈3차〉

2022학년도
논술전형고사 출제배경 및 해설

SEOULTECH
서울과학기술대학교
SEOUL NATIONAL UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

[문제 1]

1. 출제 배경

고등학교 과정에서 다루는 기본적인 내용을 이해하고 있는지 평가하고자 하였다. 이를 위해 음함수 미분법, 접선의 방정식, 지수함수와 로그함수, 그래프의 평행이동, 삼각함수, 수열, 여러 가지 수열의 합 등 다양한 개념에 대한 지식을 갖추고 있는지 평가하는 항목으로 문제를 구성하였다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[1.1] 음함수 미분법을 이해하여 접선의 방정식을 구하는 데 적용할 수 있는지 평가한다.
[1.2] 지수함수와 로그함수의 성질과 그래프의 평행이동을 이해하여 질문에 답할 수 있는지 평가한다.
[1.3] 삼각함수의 그래프를 이해하여 등차수열을 찾을 수 있는지와 수렴하는 급수의 합을 계산할 수 있는지 평가한다.

2. 예시 답안 및 해설

[1.1] $y=x$를 $\cos(x-y)+x^2+y^2=9$에 대입하면

$$\cos(x-x)+x^2+x^2=9$$

이므로 $x=\pm 2$이다. 따라서 곡선과 직선이 만나는 점은 $(2,2)$와 $(-2,-2)$이다.

만나는 점에서의 접선의 기울기 $\frac{dy}{dx}$를 구하기 위해 곡선의 방정식 양변을 x에 대해 미분하면

$$-\left(1-\frac{dy}{dx}\right)\sin(x-y)+2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

이고, 이를 정리하면

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin(x-y)-2x}{\sin(x-y)+2y}$$

이다. 만나는 점 $(2,2)$와 $(-2,-2)$에서 접선의 기울기는 각각

$$\frac{\sin(2-2)-4}{\sin(2-2)+4}=-1,\ \frac{\sin(-2+2)+4}{\sin(-2+2)-4}=-1$$

이다. 따라서 접선의 방정식은 각각

$$y=-x+4,\ y=-x-4$$

이다.

[1.2] $y=\frac{1}{1024}4^{-x}+\frac{3}{2}=\left(\frac{1}{4}\right)^{x+5}+\frac{3}{2}$이므로, $a=\frac{1}{4}$, $m=-5$, $n=\frac{3}{2}$이다. $a=\frac{1}{4}$을 $3\log_b a=\frac{4}{4a-3}$에 대입하면 $-3\log_b 4=-2$이므로 $b=8$이다. 따라서 $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$, $g(x)=-\frac{15}{2}\log_8 x$이므로

$$(g\circ f)(5)=-\frac{15}{2}\log_8 4^{-5}=-\frac{15}{2}\times(-5)\times\frac{2}{3}=25$$

이다.

[1.3] $n=1$일 때 $y=\frac{x}{\pi}$의 그래프와 $y=\sin x$는 원점을 포함하여 $x\geq 0$에서 두 개의 교점을 갖는다. $y=\frac{x}{\pi}$, $y=\sin x$ 모두 원점대칭이므로 $-\pi<x\leq 0$에서 원점을 포함하여 두 개의 교점을 갖게 되므로 $a_1=2+2-1=3$이다.

$n\geq 2$인 자연수 n에 대하여 곡선 $y=\sin x$와 직선 $y=\frac{1}{(2n-1)\pi}x$는 $0\leq x<(2n-2)\pi$에서 주기 2π마다 2개씩의 교점이 있으므로 원점을 포함하여 $2n-2$개의 교점을 갖는다. 또 $(2n-2)\pi<x<(2n-1)\pi$에서 2개의 교점을 갖고 $x\geq(2n-1)\pi$에서는 교점이 없다. 따라서 $x\geq 0$에서 $2n$개의 교점을 갖는다. 곡선 $y=\sin x$와 직선 $y=\frac{1}{(2n-1)\pi}x$이 모두 원점대칭임을 생각하면 $x\leq 0$에서 원점을 포함하여 $2n$개의 교점이 있으므로 $a_n=2n+2n-1=4n-1$이다. 따라서 주어진 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n a_{n+1}}$의 제 n항까지의 부분합을 S_n이라고 하면

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_n a_{n+1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(4k-1)(4k+3)}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{4k+3}\right)\\&=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{15}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n+3}\right)\right\}\\&=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4n+3}\right)=\frac{1}{12}-\frac{1}{16n+12}\end{aligned}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{16n+12}\right)=\frac{1}{12}$$

즉 주어진 급수의 극한값은 $\frac{1}{12}$이다.

3. 출제 근거

「사인함수와 코사인함수의 미분」, 『고등학교 미적분』, 좋은책 신사고, 2021, 70-74쪽.
「음함수의 미분법」, 『고등학교 미적분』, 좋은책 신사고, 2021, 87-88쪽.
「접선의 방정식」, 『고등학교 미적분』, 지학사, 2021, 111-113쪽.
「지수와 로그」, 『고등학교 수학 I』, 비상, 2021, 10-34쪽.
「지수함수와 로그함수」, 『고등학교 수학 I』, 비상, 2021, 37-55쪽.
「지수함수와 로그함수의 활용」, 『고등학교 수학 I』, 지학사, 2021, 50-63쪽.
「합성함수」, 『고등학교 수학』, 교학사, 2021, 219-222쪽.
「삼각함수의 그래프」, 『고등학교 수학 I』, 지학사, 2020, 81-88쪽.
「등차수열」, 『고등학교 수학 I』, 교학사, 2020, 118-120쪽.
「급수의 수렴과 발산」, 『고등학교 미적분』, 천재교과서, 2021, 30-33쪽.

[문제 2]

1. 출제 배경

이공계 대학생에게는 문제에서 주어진 상황을 이해하고 이를 수학적으로 기술하는 능력이 반드시 필

요하다. 예를 들어 주어진 입체도형의 부피는 단면적의 넓이를 수식으로 나타내고 이를 적분함으로써 구할 수 있다. 이 문제를 풀기 위한 수학적 개념은 원의 방정식, 삼각함수의 그래프, 치환적분법, 부분적분법, 정적분 등 이공계 대학생이 갖춰야 할 기초지식으로 고등학생이 알아야 할 기본적인 내용이다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[2.1] 단면적의 넓이를 정적분하여 입체도형의 부피를 계산할 수 있는지 평가한다.
[2.2] 치환적분법, 부분적분법을 활용하여 삼각함수가 포함된 합성함수의 정적분을 계산할 수 있는지 평가한다.
[2.3] 주어진 상황을 이해하고 정적분을 통해 질문에 답할 수 있는지 평가한다.

2. 예시 답안 및 해설

[2.1] 단면의 넓이가 $\pi^2 - 2\pi x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi^2 - 2\pi x)dx = \left[\pi^2 x - \pi x^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{4}$$

이다. 따라서 아래쪽 입체도형의 부피는 $\frac{\pi^3}{4}\,\mathrm{cm}^3$이다.

[2.2] 단면의 넓이가 $\pi\left(x - \frac{\pi}{2}\right)(1+\cos 2x)$이므로

$$V = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \pi\left(x - \frac{\pi}{2}\right)(1+\cos 2x)\,dx$$

이다. $x - \frac{\pi}{2}$를 t로 치환하면

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi t\{1+\cos(2t+\pi)\}\,dt = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} (t - t\cos 2t)dt$$

이다. 부분적분하면

$$\int t\cos 2t\,dt = \frac{1}{2}t\sin 2t + \frac{1}{4}\cos 2t + C \quad (C\text{는 적분상수})$$

이므로

$$V = \pi\left[\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t\sin 2t - \frac{1}{4}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{8} + \frac{\pi}{2}$$

이다. 따라서 위쪽 입체도형의 부피는 $\left(\frac{\pi^3}{8} + \frac{\pi}{2}\right)\mathrm{cm}^3$이다.

[2.3] 4분 후 아래쪽 입체도형에 채워진 물의 부피는 $\frac{4\pi^3}{25}$이며, 물의 높이를 h라 하면

$$\int_0^h (\pi^2 - 2\pi x)dx = \pi^2 h - \pi h^2 = \frac{4\pi^3}{25}$$

이다. 이를 정리하여 인수분해하면

$$h^2-\pi h+\frac{4\pi^2}{25}=\left(h-\frac{\pi}{5}\right)\left(h-\frac{4\pi}{5}\right)=0$$

이다. $0\le h\le\frac{\pi}{2}$이므로 물의 높이는 $\frac{\pi}{5}$ cm이다.

3. 출제 근거

「삼각함수의 그래프」, 『고등학교 수학 I』, 천재교과서, 2021, 84-96쪽.
「삼각함수의 뜻과 그래프」, 『고등학교 수학 I』, 교학사, 2021, 85-87쪽.
「치환적분법」, 『고등학교 미적분』, 비상교육, 2020, 126-130쪽.
「부분적분법」, 『고등학교 미적분』, 비상교육, 2020, 121-133쪽.
「부분적분법」, 『고등학교 미적분』, 교학사, 2021, 158-161쪽.
「입체도형의 부피」, 『고등학교 미적분』, 교학사, 2021, 176-178쪽.
「사인함수와 코사인함수의 미분」, 『고등학교 미적분』, 교학사, 2021, 74-76쪽.
「여러 가지 함수의 부정적분과 정적분」, 『고등학교 미적분』, 교학사, 2021, 140-148쪽.

[문제 3]

1. 출제 배경

주어진 상황을 함수로 표현하여 함수의 최댓값 또는 최솟값을 구하는 문제로써 이해하는 것은 이공계열 이론 및 응용에서 빈번하게 등장한다. 본 문항에서는 주어진 상황을 함수를 이용하여 표현할 수 있는지, 함수의 최댓값을 미분을 활용하여 찾을 수 있는지, 함수의 표현 및 미분 과정에서 다항함수, 무리함수, 삼각함수를 활용할 수 있는지를 종합적으로 평가하고자 하였다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[3.1] 극대-극소 판별을 위해 2차 함수의 그래프를 활용할 수 있는지 평가한다.
[3.2] 2차 방정식의 근과 계수와의 관계를 이해하고 있는지 평가한다.
[3.3] 삼각함수의 의미를 알고 수식으로 표현할 수 있는지 평가한다.
[3.4] 미분을 활용하여 최댓값을 찾을 수 있는지 평가한다.

2. 예시 답안 및 해설

[3.1] 함수 $f(x)$를 미분하면 $f'(x)=3x^2+2tx+9$이다. 함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 갖기 위해서는 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. 따라서 판별식이 양수이므로 $t^2-27>0$이다. 제시문 (가)로부터 α와 β가 모두 음수이므로 $\alpha\beta=3>0$이고 $\alpha+\beta=-\frac{2}{3}t<0$이 성립해야 한다. 따라서 $t>3\sqrt{3}$이다.

[3.2] α와 β는 방정식 $f'(x)=3x^2+2tx+9=0$의 두 근이다. $f'(x)=0$의 두 근은

$$x=\frac{-t\pm\sqrt{t^2-27}}{3}$$

이고 $\alpha<\beta$이므로

$$\alpha+\beta=-\frac{2t}{3},\ \alpha\beta=3,\ \alpha-\beta=-\frac{2}{3}\sqrt{t^2-27}$$

이다. 그러므로

$$\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\frac{4t}{9}\sqrt{t^2-27}$$

이다.

[3.3] $\tan\theta_1=\frac{f(\alpha)}{\alpha}$, $\tan\theta_2=\frac{f(\beta)}{\beta}$ 이므로

$$g(t)=\frac{f(\alpha)}{\alpha}-\frac{f(\beta)}{\beta}=\frac{\beta f(\alpha)-\alpha f(\beta)}{\alpha\beta}=\frac{\beta f(\alpha)-\alpha f(\beta)}{3}$$

이다. 이때

$$\begin{aligned}\beta f(\alpha)-\alpha f(\beta)&=\beta(\alpha^3+t\alpha^2+9\alpha+15)-\alpha(\beta^3+t\beta^2+9\beta+15)\\&=(\alpha-\beta)\{\alpha\beta(\alpha+\beta)+3t-15\}\\&=-\frac{2}{3}(t-15)\sqrt{t^2-27}\end{aligned}$$

이다. 따라서

$$g(t)=\frac{f(\alpha)}{\alpha}-\frac{f(\beta)}{\beta}=-\frac{2}{9}(t-15)\sqrt{t^2-27}$$

이다.

[3.4] 먼저 $g(t)$를 미분하면

$$g'(t)=-\frac{2(t-9)(2t+3)}{9\sqrt{t^2-27}}$$

이다. $t>3\sqrt{3}$이므로 $\sqrt{t^2-27}$과 $2t+3$은 양수이고, 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	9	$\cdots$
$g'(t)$	+	0	−
$g(t)$	↗	$4\sqrt{6}$ (극대)	↘

따라서 함수 $g(t)$는 $t=9$에서 극댓값이자 최댓값인 $4\sqrt{6}$을 갖는다.

3. 출제 근거

「일반각과 호도법」, 『고등학교 수학 I』, 지학사, 2021, 69-74쪽.
「삼각함수의 뜻」, 『고등학교 수학 I』, 지학사, 2021, 75-80쪽.
「함수의 극대와 극소」, 『고등학교 수학 II』, 지학사, 2021, 83-89쪽.
「함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법」, 『고등학교 수학 II』, 교학사, 2021, 71-74쪽.
「도함수」, 『고등학교 수학 II』, 좋은책 신사고, 2021, 61-66쪽.
「근과 계수와의 관계」, 『고등학교 수학』, 동아출판, 2020, 52-54쪽.
「합성함수의 미분법」, 『고등학교 미적분』, 지학사, 2021, 88-94쪽.