〈2차〉

2022학년도
논술전형고사 출제배경 및 해설

SEOULTECH
서울과학기술대학교
SEOUL NATIONAL UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

[문제 1]

1. 출제 배경

수학을 배우는 목적 중 하나는 수학 지식과 이해력을 활용하여 다양한 문제의 해결 능력을 배양하는 데 있다. 접선의 방정식, 수열의 합, 정적분과 넓이와의 관계, 함수의 미분 등 고교 수학의 핵심적인 개념을 문제 해결에 적용할 수 있는지 평가하는 문제이다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[1.1] 무리함수로 표현된 곡선의 한 점에 접하는 접선의 방정식을 구할 수 있는지 평가한다.
[1.2] 등비수열의 첫째항과 공비를 이용하여 등비급수의 합을 구할 수 있는지 평가한다.
[1.3] 적분을 활용하여 주어진 도형의 넓이를 구할 수 있는지 평가한다.

2. 예시 답안 및 해설

[1.1] $f(x)=ax-3$, $g(x)=a\sqrt{x}$라고 하자. 접점에서의 접선이 $y=f(x)$이므로

$$a=g'(x)=\frac{1}{2}ax^{-\frac{1}{2}},\ x=\frac{1}{4}$$

이다. $f(x)$와 $g(x)$에 $x=\frac{1}{4}$을 대입하면

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{a}{4}-3=a\sqrt{\frac{1}{4}}=g\left(\frac{1}{4}\right)$$

이므로 $a=-12$이다. 앞서 구한 $x=\frac{1}{4}$과 $a=-12$를 직선의 방정식에 대입하면

$$y=-12\times\frac{1}{4}-3=-6$$

이다. 따라서 접점의 좌표와 상수 a는 각각 $\left(\frac{1}{4},-6\right)$과 -12이다.

[1.2] 수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라고 하면 수열 $\{b_n\}$의 첫째항은 $\frac{1}{a_1}$이고 공비는 $-r$이다. 따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n=\frac{\frac{1}{a_1}}{1-r}=1,\quad \sum_{n=1}^{\infty}d_n=\frac{a_1}{1+r}=2\ (-1<r<1)$$

이다. 첫 번째 식으로부터 구한 $a_1=\frac{1}{1-r}$을 두 번째 식에 대입하면

$$(1-r)(1+r)=\frac{1}{2}$$

이므로, $r=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $r=-\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

$r=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때, $a_1=2+\sqrt{2}$이고

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + 2\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{a_1}{1-r} + 2\frac{\frac{1}{a_1}}{1+r} = (6+4\sqrt{2}) + 2(3-2\sqrt{2}) = 12$$

이다. 마찬가지로 $r = -\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때, $a_1 = 2-\sqrt{2}$이고

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + 2\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{a_1}{1-r} + 2\frac{\frac{1}{a_1}}{1+r} = (6-4\sqrt{2}) + 2(3+2\sqrt{2}) = 12$$

이다. 따라서 구하는 값은 12이다.

[1.3] 곡선 $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 7$의 함수를 미분하면

$$f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4)$$

이다. 따라서 점 $(0,7)$에서 곡선에 접하는 접선의 기울기는 0이고 접선의 방정식은 $y = 7$이다.
접선 $y = 7$과 곡선 $y = f(x)$의 교점의 x좌표는

$$x^3 - 6x^2 = x^2(x-6) = 0$$

이므로 $x = 0$, $x = 6$이다. 또한 $y = f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	7 (극대)	↘	−25 (극소)	↗

이므로, $y = f(x)$는 $x = 0$에서 극댓값을 갖고, 구간 $0 \le x \le 6$에서 $y = 7$보다 아래에 위치한다.
따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_0^6 \{7-(x^3-6x^2+7)\}dx = \int_0^6 (6x^2-x^3)dx = \left[2x^3 - \frac{x^4}{4}\right]_0^6 = 108$$

이다.

3. 출제 근거

「무리함수」, 『고등학교 수학』, 지학사, 2021, 243-249쪽.
「등비수열」, 『고등학교 수학 I』, 지학사, 2020, 125-131쪽.
「접선의 방정식」, 『고등학교 수학 II』, 좋은책신사고, 2020, 72-74쪽.
「다항함수의 정적분」, 『고등학교 수학 II』, (주)교학사, 2020, 134-136쪽.
「두 곡선 사이의 넓이」, 『고등학교 수학 II』, (주)교학사, 2020, 146-148쪽.
「접선의 방정식」, 『고등학교 미적분』, 지학사, 2021, 111-113쪽.
「여러가지 함수의 미분」, 『고등학교 미적분』, 좋은책신사고, 2021, 48-57쪽.
「급수」, 『고등학교 미적분』, 비상, 2020, 28-34쪽.

[문제 2]

1. 출제 배경

이공계 대학 과정을 공부하는데 필수적인 정적분, 부분적분법, 도함수, 최댓값 등에 관한 내용을 알고 있는지 평가하는 문제이다. 이를 위하여 자연로그 함수 그래프 위에 있는 임의의 두 점에 대하여 제시문에 설명된 도형을 이해하고, 그 도형의 넓이를 구할 수 있는지 확인하고자 하였다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[2.1] 접선의 기울기를 알고 있는 어떤 점의 좌표를 구할 수 있는지 평가한다.
[2.2] 로그함수의 그래프와 두 직선으로 이루어진 도형의 넓이를 정적분을 이용하여 구할 수 있는지 평가한다. 로그함수의 부분적분을 계산할 수 있어야 하고, 로그의 성질을 적절히 이용하여 정적분 결과를 간단히 정리할 수 있어야 한다.
[2.3] 문항 [2.2]에서 구한 도형의 넓이를 나타내는 함수의 최댓값을 구할 수 있는지 평가한다.

2. 예시 답안 및 해설

[2.1] $y'=\frac{1}{x}$이고 직선 AB의 기울기는 $\frac{\ln b-\ln a}{b-a}$이므로

$$\frac{1}{x}=\frac{\ln b-\ln a}{b-a}$$

이고, $x=\frac{b-a}{\ln b-\ln a}$이다.

[2.2] 넓이 S는 x축과 곡선 $y=\ln x$ 사이의 넓이에서 삼각형 A_1AC_1과 삼각형 C_1BB_1의 넓이를 빼면 구할 수 있다. 따라서

$$\begin{aligned}S&=-\int_a^b \ln x\,dx-\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{\ln b-\ln a}-a\right)\times(-\ln a)-\frac{1}{2}\left(b-\frac{b-a}{\ln b-\ln a}\right)\times(-\ln b)\\&=-\frac{1}{2}(b\ln b-a\ln a)+\frac{1}{2}(b-a)\end{aligned}$$

이다.

[2.3] $b=2a$이므로 넓이 S는 a에 대한 함수

$$S(a)=-\frac{1}{2}\{2a\ln(2a)-a\ln a\}+\frac{1}{2}a=-a\ln 2-\frac{1}{2}a\ln a+\frac{1}{2}a$$

이고

$$S'(a)=-\ln 2-\frac{1}{2}\ln a$$

이다. 따라서 $a=\frac{1}{4}$일 때, $S'(a)=0$이다. 이때 $S'(a)$의 부호는 양에서 음으로 바뀌므로 최댓값은

$$S\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\ln\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$$

이다.

3. 출제 근거

「로그함수」, 『고등학교 수학 I』, 좋은책신사고, 2021, 43-45쪽.
「접선의 방정식」, 『고등학교 수학 Ⅱ』, 좋은책신사고, 2021, 72-74쪽.
「함수의 극대와 극소」, 『고등학교 수학 Ⅱ』, 좋은책신사고, 2021, 83-86쪽.
「함수의 그래프」, 『고등학교 수학 Ⅱ』, 좋은책신사고, 2021, 87-90쪽.
「지수함수와 로그함수의 미분」, 『고등학교 미적분』, 좋은책신사고, 2021, 55-57쪽.
「접선의 방정식」, 『고등학교 미적분』, 좋은책신사고, 2021, 97-99쪽.
「함수의 그래프」, 『고등학교 미적분』, 좋은책신사고, 2021, 102-108쪽.
「부분적분법」, 『고등학교 미적분』, 좋은책신사고, 2021, 137-138쪽.
「여러 가지 함수의 정적분」, 『고등학교 미적분』, 좋은책신사고, 2021, 140-144쪽.
「넓이」, 『고등학교 미적분』, 좋은책신사고, 2021, 155-156쪽.

[문제 3]

1. 출제 배경

이공계열 대학생은 자연현상 및 공학 문제를 모사한 수학적 모델을 이해하고, 수학 개념을 이용하여 원하는 물리량(거리, 면적, 부피, 속도, 각도 등)을 계산할 수 있는 능력이 필요하다. 이차원 평면에 모델링된 문제를 명확하게 이해하고, 꼭 필요한 수학 개념인 미분과 삼각함수를 이용하여 각도와 거리를 계산할 수 있는지 평가한다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[3.1] 서술된 문제를 이해하여 함수를 설계할 수 있는지 평가한다.
[3.2] 주어진 조건과 무리함수에 대한 미분을 이용하여 거리를 구하고, 삼각함수를 이용하여 각도를 구할 수 있는지 평가한다.
[3.3] 주어진 조건과 삼각함수 합차공식, 사인과 코사인의 관계식을 이용하여 직각삼각형의 한 변의 길이를 구할 수 있는지 평가한다.

2. 예시 답안 및 해설

[3.1] 각 도로의 길이는

$$\overline{\mathrm{OA}} = \sqrt{(d-x)^2+1}\,,\quad \overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{x^2+4}$$

이므로 필요한 총 연료의 양은

$$f(x) = \sqrt{(d-x)^2+1} + k\sqrt{x^2+4}$$

이다.

[3.2] $f'(x)=0$일 때, $f(x)$가 최소이므로

$$f'(x)=\frac{x-d}{\sqrt{(d-x)^2+1}}+\frac{kx}{\sqrt{x^2+4}}=0$$

이다. 주어진 값 $k=\frac{3}{2}$과 $x=\sqrt{2}$를 위 방정식에 대입하면

$$\frac{\sqrt{2}-d}{\sqrt{(d-\sqrt{2})^2+1}}+\frac{3}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+4}}=0$$

이고 $d=\sqrt{2}\pm\sqrt{3}$이다. $d>0$이므로 $d=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 이고, θ_1이 예각인 직각삼각형에서

$$\tan\theta_1=\frac{d-x}{1}=\sqrt{3}$$

이므로 $\theta_1=\frac{\pi}{3}$이다.

[3.3] h가 한 변인 직각삼각형에서

$$h=\overline{\mathrm{AB}}\sin(\theta_1-\theta_2)=\overline{\mathrm{AB}}(\sin\theta_1\cos\theta_2-\cos\theta_1\sin\theta_2)$$

이다. 주어진 값 $k=\frac{3}{2}$, $x=\sqrt{2}$와 문항 [3.2]에서 구한 $\theta_1=\frac{\pi}{3}$를 이용하면

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{6},\ \sin\theta_1=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\theta_1=\frac{1}{2}$$

이고

$$\sin\theta_2=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \cos\theta_2=\sqrt{1-\sin^2\theta_2}=\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

이다. 따라서

$$h=\sqrt{6}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

이다.

[3.3] 문항 [3.2]에서 구한 $d=\sqrt{2}+\sqrt{3}$이고 $x=\sqrt{2}$이므로, 점 A가 원점인 좌표계에서 점 O와 B의 좌표는 각각 $(-1,-\sqrt{3})$과 $(2,\sqrt{2})$이다. 따라서 직선 OA의 방정식은 $y=\sqrt{3}x$이고, 직선 OA에서 점 B까지의 거리는

$$h=\frac{|2\sqrt{3}-\sqrt{2}|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}=\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}=\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

이다.

3. 출제 근거

「두 점 사이의 거리」, 『고등학교 수학』, 지학사, 2021, 111-114쪽.
「직선의 방정식」, 『고등학교 수학』, 미래엔, 2021, 125-128쪽.
「점과 직선 사이의 거리」, 『고등학교 수학』, 미래엔, 2021, 132-134쪽.
「삼각함수의 뜻」, 『고등학교 수학 I』, 지학사, 2021, 75-80쪽.
「삼각함수의 뜻과 그래프」, 『고등학교 수학 I』, ㈜교학사, 2021, 80-96쪽.
「도함수」, 『고등학교 수학 II』, 지학사, 2021, 62-71쪽.
「여러가지 함수의 미분」, 『고등학교 미적분』, 좋은책신사고, 2020, 48-57쪽.
「접선의 방정식」, 『고등학교 미적분』, 천재교과서, 2021, 124-127쪽.