〈1차〉

2022학년도
논술전형고사 출제배경 및 해설

SEOULTECH
서울과학기술대학교
SEOUL NATIONAL UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

[문제 1]

1. 출제 배경

대학에서 이공계로 전공을 선택한 학생들에게 필요한 수학 지식을 묻는 문항들로 구성하였다. 고등학교에서 배우는 수학의 범위 내에서 지수, 로그, 삼각함수, 수열, 중복 순열 등을 활용하여 문제에서 요구하는 결과를 얻을 수 있어야 한다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[1.1] 지수를 이용하여 표현된 두 수열의 관계식에서 로그의 성질을 이용하여 주어진 수열이 등비수열임을 밝힐 수 있는지 평가한다. 또한 등비급수의 합을 구할 수 있는지도 평가한다.
[1.2] 물체의 위치 및 속도가 사인함수, 코사인함수로 각각 주어질 때, 주어진 조건에서 미지수들을 찾아 올바르게 답할 수 있는지 평가한다.
[1.3] 주어진 조건을 만족하는 자연수들의 순서쌍의 개수를 바르게 셀 수 있는지 평가한다.

2. 예시 답안 및 해설

[1.1] $b_1 = 1$이므로 $a_1 = e$이다. $a_n^{b_n} = e$의 양변에 자연로그를 취하면 $b_n \ln a_n = 1$이다. $\ln a_n = \frac{1}{b_n}$이고 $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$이 공차가 $\ln\frac{2}{3}$인 등차수열이므로

$$\ln a_{n+1} = \ln a_n + \ln\frac{2}{3},\ a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n$$

이다. $\{a_n\}$은 첫째항이 e이고 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{e}{1-\frac{2}{3}} = 3e$$

이다.

[1.2] $t = 0$일 때 $x = 0$이므로, $f(0) = 2\cos b + 2 = 0$ 이고 $b = \pi$이다. $v = f'(t) = 2a\sin at$의 최댓값은 $2a$이므로 $a = \frac{3}{2}$이다. 즉

$$x = 2\cos\left(\frac{3}{2}t + \pi\right) + 2 = -2\cos\left(\frac{3}{2}t\right) + 2,\ v = 3\sin\left(\frac{3}{2}t\right)$$

이다. 이를 $c(x-2)^2 + 2v^2 = d$ 에 대입하면,

$$4c\cos^2\left(\frac{3}{2}t\right) + 18\sin^2\left(\frac{3}{2}t\right) = d$$

이다. $t = \frac{\pi}{3}$이면 $d = 18$, $t = 0$이면 $4c = d$ 즉 $c = \frac{9}{2}$이다. 따라서

$$a + b + c + d = \frac{3}{2} + \pi + \frac{9}{2} + 18 = \pi + 24$$

이다.

[1.3] 14의 약수는 1,2,7,14로 모두 4개이며, $b + c + d \geq 3$이므로 a는 1 또는 2이다. $a = 1$일 때,

$b+c+d=14$를 만족하는 자연수 b, c, d의 순서쌍의 개수는

$$ {}_3\mathrm{H}_{14-3} = {}_{13}\mathrm{C}_{11} = 78 $$

이다. 마찬가지로 $a=2$일 때, $b+c+d=7$을 만족하는 자연수 b, c, d의 순서쌍의 개수는

$$ {}_3\mathrm{H}_{7-3} = {}_6\mathrm{C}_4 = 15 $$

이다. 따라서 위 조건을 만족하는 순서쌍 (a, b, c, d)는 총 93개이다.

3. 출제 근거

「로그」, 『고등학교 수학 I』, 좋은책신사고, 2021, 26-31쪽.
「등차수열」, 『고등학교 수학 I』, 좋은책신사고, 2021, 115-121쪽.
「등비수열」, 『고등학교 수학 I』, 좋은책신사고, 2021, 123-127쪽.
「등비급수」, 『고등학교 미적분』, 좋은책신사고, 2021, 32-36쪽.
「지수와 로그」, 『고등학교 수학 I』, 비상, 2021, 10-34쪽.
「지수함수와 로그함수」, 『고등학교 수학 I』, 비상교육, 2021, 37-55쪽.
「지수함수와 로그함수의 활용」, 『고등학교 수학 I』, ㈜교학사, 2021, 55-55쪽.
「지수함수와 로그함수의 활용」, 『고등학교 수학 I』, 지학사, 2021, 50-63쪽.
「중복조합」, 『고등학교 확률과 통계』, ㈜금성출판사, 2020, 25-29쪽.
「여러가지 순열과 중복조합」, 『고등학교 확률과 통계』, 비상교육, 2020, 11-20쪽.

[문제 2]

1. 출제 배경

삼각형은 다각형의 기본이 되는 도형이다. 고교과정에서 삼각함수의 여러 성질을 배운 학생이라면 삼각형의 변들과 각들 사이의 관계식을 찾을 수 있어야 한다. 문제를 해결하기 위해서는 좌표평면 위에 놓인 도형을 수식으로 바꾸어 방정식을 풀 수 있어야 하고, 삼각함수의 법칙들을 활용할 수 있어야 한다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[2.1] 조건을 만족하는 직선의 방정식을 구하기 위하여 두 점 사이의 거리공식을 이용한 방정식을 세우고 이 방정식의 해를 구할 수 있는지 평가한다.
[2.2] 주어진 삼각형의 각에 대하여 사인값, 코사인값을 구할 수 있는지와 삼각함수의 덧셈정리를 활용할 수 있는지 평가한다.
[2.3] 사인법칙을 이용하여 삼각형의 외접원의 반지름의 길이를 구할 수 있는지 평가한다.

2. 예시 답안 및 해설

[2.1] 점 A의 좌표는 $(\sqrt{25-t^2}, t)$, 점 B의 좌표는 $(\sqrt{64-t^2}, t)$이고 $\overline{\mathrm{OA}}=5$이므로

$$ \sqrt{64-t^2} - \sqrt{25-t^2} = 5 $$

이고 방정식을 풀면 $t=\dfrac{24}{5}$이다.

[2.2] 코사인법칙에 의해

$$\overline{\mathrm{OB}}^2 = \overline{\mathrm{OA}}^2 + \overline{\mathrm{AB}}^2 - 2\overline{\mathrm{OA}}\ \overline{\mathrm{AB}}\cos\theta_1$$
$$64 = 25 + 25 - 2\times 5\times 5\cos\theta_1$$

이고 따라서 $\cos\theta_1 = -\frac{7}{25}$이다. 여기서 $\sin\theta_1 = \sqrt{1-\left(-\frac{7}{25}\right)^2} = \frac{24}{25}$이다.

$\cos 2\theta_2 = \cos(\pi-\theta_1) = -\cos\theta_1 = \frac{7}{25}$, $\cos(\theta_2+\theta_2) = 2\cos\theta_2\cos\theta_2 - 1$이므로 $\cos^2\theta_2 = \frac{16}{25}$이다.

θ_2는 예각이므로 $\cos\theta_2 = \frac{4}{5}$이다. 또 $\sin\theta_2 = \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$이다. 따라서

$$\cos(\theta_1-\theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2 = -\frac{7}{25}\times\frac{4}{5} + \frac{24}{25}\times\frac{3}{5} = \frac{44}{125}$$

이다.

[2.3] 사인법칙에 의해 삼각형 AOB의 외접원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\times\frac{\overline{\mathrm{OB}}}{\sin\theta_1} = \frac{1}{2}\times\frac{8}{\frac{24}{25}} = \frac{25}{6}$$

이다.

3. 출제 근거

「좌표평면 위의 두 점 사이의 거리」, 『고등학교 수학』, ㈜교학사, 2021, 102-103쪽.
「두 점 사이의 거리」, 『고등학교 수학』, 좋은책신사고, 2021, 105-107쪽.
「원과 직선의 위치관계」, 『고등학교 수학』, ㈜교학사, 2021, 134-139쪽.
「원과 직선의 위치관계」, 『고등학교 수학』, 좋은책신사고, 2021, 137-141쪽.
「사인법칙과 코사인법칙」, 『고등학교 수학 I』, ㈜교학사, 2020, 97-102쪽.
「사인법칙과 코사인법칙」, 『고등학교 수학 I』, 지학사, 2021, 95-100쪽.
「삼각함수의 덧셈정리」, 『고등학교 미적분』, 미래엔, 2020, 65-69쪽.
「삼각함수의 덧셈정리」, 『고등학교 미적분』, 천재교과서, 2021, 68-72쪽.

[문제 3]

1. 출제 배경

제시문에 설명된 내용을 이해하고, 주어진 조건을 적절히 활용하여 필요한 결과를 수학적으로 도출할 수 있는 능력은 이공계 대학 교육을 받는 학생에게 필수적인 것이다. 이 문제를 풀기 위한 개념은 삼각함수, 삼각함수의 미분, 곡선의 길이 등 고등학생이 알아야 할 기본적인 내용이다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[3.1] 원 위에 있는 점의 좌표를 삼각함수를 이용하여 매개방정식으로 표현할 수 있는지 평가한다.
[3.2] 제시문에서 설명하는 곡선의 형태를 이해하고 매개방정식을 구할 수 있는지 평가한다.

[3.3] 문항 [3.2]에서 매개방정식으로 구한 곡선의 길이를 정적분을 이용하여 계산할 수 있는지 평가한다.

[3.4] 문항 [3.3]에서 구한 곡선의 길이를 포함하여 제시문에서 설명하는 곡선 전체의 길이를 계산할 수 있는지 평가한다. 조건에 따라 세 개의 곡선으로 나누어 길이를 구할 수 있어야 한다.

2. 예시 답안 및 해설

[3.1] 점 Q의 좌표는 $(2\cos\theta, 2\sin\theta)$이다.

[3.2] $\overline{\mathrm{PQ}}$는 호 QB의 길이와 같으므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=2\theta$이다. 점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H라고 하면, $\angle \mathrm{QPH}=\frac{\pi}{2}-\theta$이고 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$이므로

$$x=2\cos\theta+2\theta\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=2(\cos\theta+\theta\sin\theta)$$
$$y=2\sin\theta-2\theta\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=2(\sin\theta-\theta\cos\theta)$$

이다. 따라서 점 P의 좌표는 $(2(\cos\theta+\theta sin\theta),\ 2(\sin\theta-\theta cos\theta))$이다.

[3.3] $\frac{dx}{d\theta}=2\theta\cos\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=2\theta\sin\theta$이고 θ의 범위는 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$이다. 따라서 점 P가 그리는 도형의 길이 l_1은

$$l_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\theta\,d\theta=\frac{\pi^2}{4}$$

이다.

[3.4] 정사각형의 윗변에 있는 실이 움직이면 점 P는 반지름의 길이가 $2+\pi$인 원에서 중심각 $\frac{\pi}{6}$인 호를 따라 움직인 것이므로 이때의 거리 l_2는

$$l_2=(2+\pi)\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi^2}{6}$$

이다. 모든 실이 움직여서 점 P가 x축과 다시 만날 때까지 반시계방향으로 움직이면 점 P는 반지름의 길이가 $6+\pi$인 원에서 중심각 $\frac{5}{6}\pi$인 호를 따라 움직인 것이므로 이때의 거리 l_3는

$$l_3=(6+\pi)\times\frac{5}{6}\pi=5\pi+\frac{5}{6}\pi^2$$

이다. 따라서 점 P가 그리는 도형의 길이는

$$l_1+l_2+l_3=\frac{16}{3}\pi+\frac{5}{4}\pi^2$$

이다.

3. 출제 근거

「원의 방정식」, 『고등학교 수학』, 좋은책신사고, 2021, 133-135쪽.
「일반각과 호도법」, 『고등학교 수학 I』, 좋은책신사고, 2021, 65-69쪽.
「삼각함수」, 『고등학교 수학 I』, 좋은책신사고, 2021, 70-74쪽.

「삼각함수의 그래프」, 『고등학교 수학 I』, 좋은책신사고, 2021, 75-85쪽.
「사인함수와 코사인함수의 미분」, 『고등학교 미적분』, 좋은책신사고, 2021, 70-71쪽.
「속도와 거리」, 『고등학교 미적분』, 좋은책신사고, 2021, 160-164쪽.