〈자연계열〉

2020학년도
모의논술고사 출제배경 및 해설

SEOULTECH
서울과학기술대학교
SEOUL NATIONAL UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

[문제 1]

1. 출제배경

고등학교 과정 수학에서 다루는 기본적인 내용에 대한 이해도를 전반적으로 평가하고자 하였다. 이를 위해서 고등학교 수학에서 배우는 극한, 미분, 적분, (매개)곡선, 등비수열의 합, 3차 방정식의 풀이 등 다양한 개념을 알고 있는지 확인하는 문항들로 구성하였다.

각 세부 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[1.1] 등비급수의 합 공식을 알고 있는지와 함께 기본적인 극한값 계산이 가능한지 평가한다.

[1.2] 로그 함수의 미분과 적분을 할 수 있는지와 함께, 미분을 이용하여 최솟값을 계산할 수 있는지 평가한다.

[1.3] 매개변수로 표현된 곡선을 이해하고, 방정식의 풀이를 통해 곡선의 교점을 구할 수 있는지 확인한다. 주어진 조건으로부터 원하는 함수를 찾을 수 있는지와 기본적인 적분 계산이 가능한지를 함께 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[1.1] 등비급수의 합 공식으로부터 $\frac{1-r^n}{1-r}=1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}$이다. 이를 이용하기 위해

$$\lim_{r\to 1}\frac{(1-r^{1011})(1-r^{1012})(1-r^{1013})\cdots(1-r^{2020})}{(1-r)(1-r^2)(1-r^3)\cdots(1-r^{1010})}$$

에서 분모와 분자를 $(1-r)^{1010}$으로 나눈 후 극한값을 계산하면

$$\begin{aligned}&\lim_{r\to 1}\frac{(1-r^{1011})(1-r^{1012})(1-r^{1013})\cdots(1-r^{2020})}{(1-r)(1-r^2)(1-r^3)\cdots(1-r^{1010})}\\&=\lim_{r\to 1}\frac{(1+r+\cdots+r^{1010})(1+r+\cdots+r^{1011})\cdots(1+r+\cdots+r^{2019})}{1(1+r)(1+r+r^2)\cdots(1+r+\cdots+r^{1009})}\\&=\frac{1011\times 1012\times\cdots\times 2020}{1\times 2\times\cdots\times 1010}={}_{2020}\mathrm{C}_{1010}\end{aligned}$$

이다. 따라서 $a=2020, b=1010$이 된다.

[1.2] $f(x)=x\ln x$라고 하면 $f'(x)=\ln x+1$이므로, $y=f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	감소	극소(최소)	증가

이로부터 $f(x)$는 $\frac{1}{e}$에서 최소가 됨을 알 수 있고, 따라서 $a=\frac{1}{e}$이다. 부분적분을 이용하면, $t>a$이므로

$$\int_{1/e}^{t} x\ln x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_{x=1/e}^{x=t} - \int_{1/e}^{t}\frac{1}{2}x\,dx = \frac{t^2}{2}\ln t - \frac{t^2}{4} + \frac{3}{4e^2}$$

을 얻는다. 가정으로부터 $t>a$이고

$$\int_{1/e}^{t} x\ln x\,dx = \frac{3}{4e^2}$$

이므로

$$\int_{1/e}^{t} x\ln x\,dx - \frac{3}{4e^2} = \frac{t^2}{2}\ln t - \frac{t^2}{4} = 0$$

을 얻는다. 그러므로

$$\ln t = \frac{1}{2}$$

이고, 이로부터 $t=\sqrt{e}$이다.

[1.3] 두 매개곡선은 각각 원 $x^2+y^2=12$와 포물선 $y=x^2$이다. 원 $x^2+y^2=12$와 포물선 $y=x^2$의 교점을 구하기 위해 원의 방정식에 $y=x^2$을 대입하면

$$(x^2)^2+x^2-12=0$$

을 얻는다. 따라서 $x^2=-4$ 또는 $x^2=3$이 되고, x는 실수이므로, 두 교점은 $(-\sqrt{3},3)$과 $(\sqrt{3},3)$이다.

이로부터 직선 $y=L(x)$는 $y=mx+n=3$임을 알 수 있다.

문제의 조건 (1)로부터 $\alpha+\beta+\gamma=1$이고, 가정에서 $\alpha<\beta<\gamma$이므로 $\alpha=-\sqrt{3}$, $\beta=1$, $\gamma=\sqrt{3}$이다. 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=L(x)=3$과 $x=\pm\sqrt{3},1$에서 만나므로

$$y=f(x)=a(x-1)(x^2-3)+3$$

이다. 문제의 조건 (2)를 이용하면

$$\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx = 6\sqrt{3}+4\sqrt{3}a = 0$$

이므로 $a=-\frac{3}{2}$이다. 따라서

$$a+b+c=f(1)-f(0)=3-\left(-\frac{3}{2}\times 3+3\right)=\frac{9}{2}$$

를 얻는다.

3. 출제근거

「부분적분법」, 『미적분II』(고등학교 교과서), 좋은책 신사고, 2017, 145-146쪽.
「조합」, 『확률과 통계』(고등학교 교과서), 좋은책 신사고, 2017, 32-34쪽.
「다항함수의 적분법」, 『미적분I』(고등학교 교과서), ㈜지학사, 2018, 144~169쪽.
「함수의 극한」, 『미적분I』(고등학교 교과서), ㈜금성출판사, 2017, 52~57쪽.
「여러가지 방정식」, 『수학I』(고등학교 교과서), ㈜금성출판사, 2017, 90~106쪽.

「도함수의 활용」, 『미적분II』 (고등학교 교과서), ㈜교학사, 2018, 129~153쪽.
「여러 가지 함수의 적분」, 『미적분II』 (고등학교 교과서), 비상교육, 2017, 132~145쪽.
「지수함수와 로그함수의 미분」, 『미적분II』 (고등학교 교과서), 지학사, 2017, 28~41쪽.

[문제 2]

1. 출제배경

실생활에서 자주 접하는 종이 접기의 상황을 평면도형의 성질을 이용하여 해결할 수 있는지 평가하는 문제이다. 주어진 조건에 맞게 방정식을 유도하고 논리적으로 문제를 해결하는 능력을 평가하고자 하였다. 여기서 사용된 수학적 개념은 고등학생이면 누구나 알고 있는 간단한 내용이다.

각 세부 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

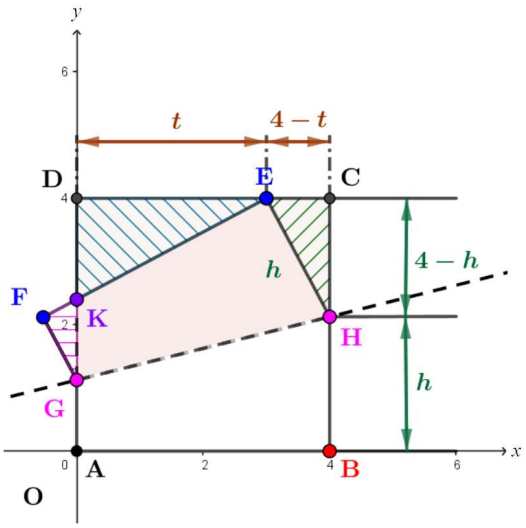
[2.1] 문제의 상황을 이해하고 기호화한 후, 피타고라스의 정리를 이용하여 방정식으로 표현할 수 있는지와 함께 기본적인 방정식의 해를 구할 수 있는지 평가한다.

[2.2] 삼각형의 닮음비와 선분의 길이의 비의 관계를 이해하고, 대칭인 점과 선분에 의해 나타나는 다각형의 합동 성질을 이용하여 구하고자 하는 길이를 표현할 수 있는지 평가한다.

[2.3] 삼각형의 넓이의 최대화 문제를 해결하기 위해 넓이를 함수로 표현할 수 있는지와 함께 제한된 정의역에서 도출된 함수의 최댓값을 구하기 위하여 미분을 활용할 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[2.1]



점 D로부터 점 E까지 이동한 거리를 t라 하고 점 B로부터 점 H까지의 거리를 h라 하자.

정사각형 ABCD의 한 변의 길이는 4이므로, 점 E와 점 C 사이의 거리 $\overline{EC}=4-t$, 점 C와 점 H 사이의 거리 $\overline{CH}=4-h$이다.

삼각형 $\triangle CEH$는 직각삼각형이므로 피타고라스의 정리에 의해,

$$\begin{aligned} & h^2=(4-t)^2+(4-h)^2 \\ \Rightarrow\quad & h^2=(4-t)^2+16-8h+h^2 \\ \Rightarrow\quad & 8h=(4-t)^2+16 \\ \Rightarrow\quad & h=\frac{t^2-8t+32}{8} \qquad \text{or} \qquad \frac{t^2}{8}-t+4 \end{aligned}$$

이므로 H의 y좌표는 $\frac{t^2}{8}-t+4$이다.

[2.2] 삼각형의 닮음비는 닮은 삼각형의 대응하는 변의 길이의 비와 같다.

따라서, 세 삼각형 $\triangle CEH$와 $\triangle DKE$, 그리고 $\triangle FKG$의 닮음비는 세 변의 길이 $\overline{CH}$, $\overline{DE}$, $\overline{FG}$의 비와 같다.

$\overline{DE}=t$로 놓으면, [2.1]에서 구한 h를 이용하여

$$\overline{CH}=4-h=4-\frac{t^2-8t+32}{8}=-\frac{t^2-8t}{8} \qquad \text{or} \qquad t-\frac{t^2}{8} \qquad \text{or} \qquad \frac{8t-t^2}{8}$$

이다.

$\overline{FG}$를 구하기 위해서는 사각형 $\square ABHG$와 사각형 $\square FEHG$는 합동이고 대각선 $\overline{EG}=\overline{BG}$임을 이용한다.

$$\begin{aligned} b^2=\overline{FG}^{\,2}&=\overline{AG}^{\,2} \\ &=\overline{BG}^{\,2}-\overline{AB}^{\,2} \\ &=\overline{EG}^{\,2}-4^2 \\ &=\overline{ED}^{\,2}+\overline{DG}^{\,2}-4^2 \\ &=t^2+(4-b)^2-4^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & b^2=t^2+16-8b+b^2-16 \\ \Rightarrow\quad & 8b=t^2 \\ \Rightarrow\quad & b=\frac{t^2}{8} \end{aligned}$$

따라서 세 삼각형 $\triangle CEH$와 $\triangle DKE$, 그리고 $\triangle FKG$의 닮음비 $=\overline{CH}:\overline{DE}:\overline{FG}$

$$=\frac{8t-t^2}{8}:t:\frac{t^2}{8}$$

이므로 $a=\frac{8t-t^2}{8}$, $b=\frac{t^2}{8}$이다.

[2.3] 삼각형 $\triangle CEH$의 넓이 $f(t)$는

$$f(t)=\frac{1}{2}\frac{t(8-t)}{8}\cdot(4-t)=\frac{1}{16}t(8-t)(4-t)=\frac{1}{16}(t^3-12t^2+32t)$$

로 나타낼 수 있다. 3차 함수의 최댓값을 구하기 위해 미분을 이용한다.

$$f'(t)=\frac{1}{16}(3t^2-24t+32) \Rightarrow t=\frac{-(-12)\pm\sqrt{(-12)^2-3\cdot 32}}{3}$$
$$=\frac{4}{3}(3\pm\sqrt{3})$$

$0\le t\le 4$이고, $t=\frac{4}{3}(3-\sqrt{3})$에서 극댓값을 가지므로, $t=\frac{4}{3}(3-\sqrt{3})$에서 $f(t)$는 최대가 된다. 따라서 점 E의 x좌표는 $\frac{4}{3}(3-\sqrt{3})$이다.

3. 출제근거

「두 점 사이의 거리」, 『수학I』(고등학교 교과서), 비상교육, 2017, 113-116쪽.
「도형의 대칭 이동」, 『수학I』(고등학교 교과서), 비상교육, 2017, 160-164쪽.
「함수의 그래프」, 『미적분I』(고등학교 교과서), 비상교육, 2017, 111-112쪽.
「함수의 그래프와 최대, 최소」, 『미적분I』(고등학교 교과서), 동아출판, 2017, 151-154쪽.

[문제 3]

1. 출제배경

확률변수와 확률질량함수의 의미를 알고, 주어진 상황을 정확히 파악하여 문제를 해결할 수 있는지 평가한다. 경우의 수를 이용하여 주어진 상황에서 확률을 계산할 수 있는지 확인한다. 또한 수열의 규칙을 이해하고, 이에 따라 특정 항을 구하거나 일반화할 수 있는지 확인한다.

각 세부 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[3.1] 확률변수와 확률질량함수의 의미를 알고, 경우의 수를 나열할 수 있는지 평가한다.

[3.2] 확률변수 X에 대하여 $Y=aX+b$도 확률변수임을 알고 확률질량함수를 찾을 수 있는지 평가한다.

[3.3] 수열의 규칙을 이해하여 특정 항에서의 확률을 계산할 수 있는지 확인한다.

2. 예시답안 및 해설

[3.1] X가 될 수 있는 값은 1,2,3,4이다.

X	1	2	3	4
가능한 경우	●	○●	○○●	○○○●
확률	$\frac{2}{5}$	$\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{4}\right)$	$\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{2}\right)$

●: 황금열쇠, ○: 일반열쇠

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

확률변수 X의 확률질량함수는 $P(X=x)=\frac{{}_3P_{x-1}\times{}_2P_1}{{}_5P_x}=\frac{5-x}{10}$, $x=1,2,3,4$이다.

별해) 첫 번째 황금열쇠를 찾아낼 때 까지 추출횟수 x라 놓고 확률을 구하면 5개의 열쇠 중 x개를 순서대로 뽑으니 그 순열이 분모가 된다. 그리고 그 중 우선 황금열쇠가 아닌 2개 중 $x-1$개를 순서대로 뽑고 마지막 1개는 황금열쇠 2개 중에서 순서대로 뽑으니 두 순열의 곱이 분자가 된다.

따라서 확률변수 X의 확률질량함수는 $P(X=x)=\frac{{}_3P_{x-1}\times{}_2P_1}{{}_5P_x}=\frac{5-x}{10}$

[3.2]

확률변수 Y가 가질 수 있는 값은 2,3,4,5이다.

Y	2	3	4	5
가능한 경우	●●	●○● ○●●	●○○● ○●○● ○○●●	●○○○● ○●○○● ○○●○● ○○○●●

Y의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	2	3	4	5	합계
$P(Y=y)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	1

확률변수 Y의 확률질량함수는 $P(Y=y)=\frac{y-1}{10}$, $y=2,3,4,5$이다.

$6-Y$의 확률분포를 표로 나타내면 X의 확률분포와 동일하다.

$6-Y$	1	2	3	4	합계
P	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

$T=6-Y$라고 할 때, T의 확률질량함수는 $P(T=t)=\frac{(6-t)-1}{10}=\frac{5-t}{10}$, $t=1,2,3,4$
X의 확률질량함수와 동일함을 알 수 있다.

별해)

$X-1$: 확률변수 X는 첫 번째 황금열쇠를 찾을 때까지 추출 횟수이므로 황금열쇠를 하나 찾아낸 상태이다. 1은 남아있는 황금열쇠라고 생각한다면, $X-1$은 두 개의 황금열쇠를 찾았을 때, 남아 있는 일반 열쇠의 수와 같다.

$5-Y$: 확률변수 Y는 두 번째 황금열쇠를 찾아낸 찾을 때까지 추출 횟수이므로 두 개의 황금열쇠를 모두 다 찾아낸 상태이다. 따라서 $5-Y$는 5개의 열쇠 중 남아 있는 일반 열쇠의 수와 같다.

따라서 두 확률변수 $X-1$와 $5-Y$는 같으므로 X의 확률분포와 $6-Y$의 확률분포는 동일하다.

[3.3]

●○○○●
○●○○●
○○●○●
○○○●●

Y가 5가 되는 경우는 총4가지이고 첫 번째 황금열쇠를 꺼낸 순서에 상관없이 확률은 모두 $\frac{1}{36}$로 동일하다. 그러므로 $P(Y=5)=\frac{1}{36}\times 4=\frac{1}{9}$

별해)

열쇠의 개수	$P(Y=y)=a_n$
4	$P(Y=y)=\frac{y-1}{6}=\frac{y-1}{{}_3C_2}\ y=2,3,4$
5	$P(Y=y)=\frac{y-1}{10}=\frac{y-1}{{}_4C_2},\ y=2,3,4,5$
6	$P(Y=y)=\frac{y-1}{{}_5C_2},\ y=2,3,4,5,6$
⋮	⋮
n	$P(Y=y)=\frac{y-1}{{}_nC_2},\ y=2,3,\cdots,n-1$

열쇠의 개수가 n인 경우에 확률변수 Y의 확률질량함수는 $P(Y=y)=\frac{y-1}{{}_nC_2},\ y=2,3,\cdots,n-1$이다.

따라서 $n=9$인 경우에 $P(Y=5)=\frac{5-1}{{}_9C_2}=\frac{1}{9}$이다.

3. 출제근거

「확률변수와 확률분포」, 『확률과 통계』(고등학교 교과서), 동아출판, 2016, 144-147쪽.
「순열과 조합」, 『확률과 통계』(고등학교 교과서), 비상교육, 2016, 29-33쪽.
「확률분포」, 『확률과 통계』(고등학교 교과서), 천재교육, 2018, 136-139쪽.
「수열」, 『수학Ⅱ』(고등학교 교과서), 비상교육, 2017, 108-110쪽.