〈자연계열 – 4차〉

2021학년도
논술전형고사 출제배경 및 해설

SEOULTECH
서울과학기술대학교
SEOUL NATIONAL UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

[문제 1]

1. 출제배경

수학을 배우는 목적 중 하나는 수학 지식과 이해력을 변형된 조건에 응용하여 문제를 푸는 능력을 배양하는 데 있다. 이 문제는 여러 가지 수학공식을 이해하고 주어진 문제에 대해 확대 적용하여 원하는 답을 얻어낼 수 있는지 묻는 문제이다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[1.1] 삼각함수의 기본 성질들을 이용하여 주어진 범위에서 이차 함수의 최대 최소를 구할 수 있는지 평가한다.
[1.2] 로그함수의 밑과 진수와의 관계를 이해하고 정적분하여 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.
[1.3] 삼각함수를 이용하여 삼각형에서 세 변의 길이의 합과 내접원의 둘레의 길이의 비를 구하고 최댓값을 구할 수 있는지 평가한다. 삼각함수의 덧셈정리를 적절히 활용하여야 한다.

2. 예시답안 및 해설

[1.1] $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$이고 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\theta$이므로

$$\begin{aligned} f(\theta) &= -a\cos^2\theta + a\cos\theta + a + b + 1 \\ &= -a\left(\cos\theta - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5a}{4} + b + 1, \quad -1 \le \cos\theta \le 1 \end{aligned}$$

이다. 따라서 $\cos\theta = \frac{1}{2}$일 때 최댓값 $\frac{5a}{4}+b+1=11$을 갖고, $\cos\theta = -1$일 때 최솟값 $-a+b+1=2$를 가지므로 $a=4$, $b=5$이다. 따라서 $ab=20$이다.

[1.2] 로그의 성질에 의하여 $y=\log_{\frac{1}{\ln a}} x = -\log_{\ln a} x$이고 $\ln a > 1$이므로 두 곡선은 $x=1$에서 만난다. 또 $x>1$이면 $\log_{\ln a} x > 0$이고, 두 곡선은 x축에 대하여 대칭이다. 따라서 구하는 넓이 A는

$$A = 2\int_1^{e^2} \log_{\ln a} x\,dx = \frac{2}{\ln(\ln a)}\int_1^{e^2} \ln x\,dx$$

이다. 여기서 부분적분을 이용하면

$$\int_1^{e^2} \ln x\,dx = [x\ln x]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} 1\,dx = 2e^2 - (e^2-1) = e^2+1$$

이다. 따라서 구하는 넓이는

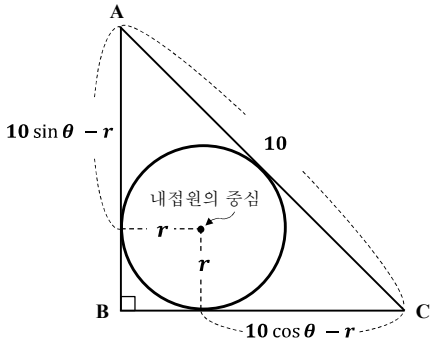
$$A = \frac{2(e^2+1)}{\ln(\ln a)}$$

이다.

[1.3] $\theta = \angle C$라 하면 $\overline{AB} = 10\sin\theta$이고 $\overline{BC} = 10\cos\theta$이므로

$$l_1 = 10(\cos\theta + \sin\theta + 1)$$

이다.



내접원의 반지름을 r이라 하면 $(10\cos\theta-r)+(10\sin\theta-r)=10$이므로

$$r=5(\cos\theta+\sin\theta-1)$$

이고

$$l_2=10\pi(\cos\theta+\sin\theta-1)$$

이다. 따라서

$$\frac{l_2}{l_1}=\frac{\pi(\cos\theta+\sin\theta-1)}{\cos\theta+\sin\theta+1},\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

이다. 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\left(\cos\theta\sin\frac{\pi}{4}+\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

이고 $\frac{\pi}{4}<\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}$이다. $t=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$라 하면

$$\frac{l_2}{l_1}=\frac{\pi(\sqrt{2}t-1)}{\sqrt{2}t+1},\ \frac{1}{\sqrt{2}}<t\le 1$$

이 최대가 되는 때를 구하면 된다. 그런데

$$\frac{l_2}{l_1}=\pi\left(1-\frac{2}{\sqrt{2}t+1}\right)$$

이므로 $t=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=1$일 때, 즉, $\theta=\frac{\pi}{4}$일 때 최대가 되고 이때 $\angle A=\angle C=\frac{\pi}{4}$이다.

3. 출제근거

「이차함수의 최대, 최소」, 『고등학교 수학』, 금성출판사, 2018, 74-76쪽.
「삼각함수의 뜻과 그래프」, 『고등학교 수학I』, 교학사, 2020, 80-96쪽.
「삼각함수의 덧셈정리」, 『고등학교 미적분』, 미래엔, 2020, 63-69쪽.
「함수의 극대와 극소」, 『고등학교 수학II』, 좋은책신사고, 2020, 83-86쪽.
「로그함수」, 『고등학교 수학I』 좋은책신사고, 2020, 43-45쪽.
「지수함수와 로그함수의 도함수」, 『고등학교 미적분』, 좋은책신사고, 2020, 61-64쪽.
「부분적분법」, 『고등학교 미적분』, 좋은책신사고, 2020, 155-159쪽.

[문제 2]

1. 출제배경

함수의 미분을 통해 주어진 자료를 설명하는 함수에 대한 여러 정보를 알아낼 수 있다. 원하는 정보를 얻기 위해 함수의 도함수를 이용하는 능력을 평가하고자 한다. 이를 위하여 고등학교 수학에서 배우는 미분, 도함수의 정의, 정적분 등 다양한 개념들을 알고 있는지 확인하는 문항들로 구성하였다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[2.1] 수학적 직관을 이용하여 제시문의 조건을 활용할 수 있는지 평가한다.
[2.2] 제시된 함수식을 분석하고 앞서 구한 결과를 대입하여 원하는 답을 얻어낼 수 있는지 평가한다.
[2.3] 도함수의 정의를 정확히 이해하고 있고 제시된 함수에 적용할 수 있는지 평가한다.
[2.4] 제시문과 정적분의 성질을 이용하여 원하는 값을 얻어낼 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[2.1] $x=1, y=-1$을 제시문 (다)의 식에 대입하면

$$f(0)=\frac{f(1)+f(-1)}{1+7f(1)f(-1)}$$

이다. 제시문 (가)와 (나)의 조건을 이용하면

$$0=\frac{\alpha+f(-1)}{1+7\alpha f(-1)}$$

이므로 $f(-1)=-\alpha$이다.

[2.2] $y=-x$라 하면

$$0=f(0)=f(x+(-x))=\frac{f(x)+f(-x)}{1+7f(x)f(-x)}$$

이므로 $f(-x)=-f(x)$이고, f는 기함수이다. 따라서 $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=0$이다.

[2.3] 제시문 (다)의 조건을 도함수의 정의에 적용하면

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{f(x)+f(\Delta x)}{1+7f(x)f(\Delta x)}-f(x)}{\Delta x}$$

이고, 정리하면

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}\times\frac{1-7\{f(x)\}^2}{1+7f(x)f(\Delta x)}\right]$$

이다. 그런데 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=f'(0)$이고 $f(x)$는 연속이므로 $\lim_{\Delta x\to 0} f(\Delta x)=f(0)=0$이다. 따라서

$$f'(x)=f'(0)\times\left[-7\{f(x)\}^2+1\right]$$

이므로 $A=-7,\ B=0,\ C=1$이다.

[2.4] $x=y=1$이라 하면

$$f(2)=f(1+1)=\frac{f(1)+f(1)}{1+7f(1)f(1)}=\frac{2\alpha}{1+7\alpha^2}$$

이다. 문항 [2.3]의 결과에서 $\{f(x)\}^2=\frac{1}{7}\{1-f'(x)\}$이므로

$$\int_0^2 (1+7\alpha^2)\{f(x)\}^2 dx = \frac{1+7\alpha^2}{7}\int_0^2 \{1-f'(x)\}\,dx$$
$$= \frac{1+7\alpha^2}{7}\left[x-f(x)\right]_0^2$$
$$= \frac{1+7\alpha^2}{7}\{2-f(2)\}$$

이다. 그런데 $f(2)=\frac{2\alpha}{1+7\alpha^2}$ 이므로

$$\int_0^2 (1+7\alpha^2)\{f(x)\}^2 dx = \frac{1+7\alpha^2}{7}\left\{2-\frac{2\alpha}{1+7\alpha^2}\right\} = 2\alpha^2-\frac{2}{7}\alpha+\frac{2}{7}$$

이다.

3. 출제근거

「도함수의 정의」, 『고등학교 수학 II』, 비상교육, 2020, 60쪽.
「정적분」, 『고등학교 수학 II』, 천재교육, 2020, 121-126쪽.
「정적분의 정의」, 『고등학교 수학 II』, 비상교육, 2020, 113쪽.
「정적분의 활용」, 『고등학교 수학 II』, 좋은책신사고, 2020, 133-138쪽.
「정적분의 성질」, 『고등학교 미적분』, 미래엔, 2020, 171쪽.
「여러 가지 함수의 적분」, 『고등학교 미적분』, 미래엔, 2020, 137-142쪽.
「연속 함수」, 『고등학교 수학 II』, 천재교육, 2020, 30-33쪽.

[문제 3]

1. 출제배경

주어진 상황에서 나타나는 경우의 수를 바탕으로 확률을 계산한다. 확률변수의 개념을 도입하여 이산확률분포를 구하고 이항분포와 정규분포 사이의 관계를 이용하여 확률을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[3.1] 주어진 조건에서 경우의 수를 구할 수 있는지 평가한다.
[3.2] 주어진 조건에서 경우의 수를 바탕으로 확률을 계산할 수 있는지 평가한다.
[3.3] 이항분포에서의 확률을 계산할 수 있는지 평가한다.
[3.4] 특정한 경우에서 이항분포의 확률을 통해 기댓값과 분산을 구하고 정규분포와의 관계를 이용해 확률을 계산할 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[3.1] 원의 중심 (a,b)가 S로부터 $r+1$ 이상 떨어져 있으면 원이 S와 만나지 않는다. 이렇게 a와 b를 꺼내는 경우의 수는 $\{l-2(r+1)\}^2$이다.

[3.2] a와 b를 꺼내는 방법의 수는 l^2이고, 문항 [3.1]에서 원과 S가 만나지 않는 경우의 수는 $\{l-2(r+1)\}^2$이다. 따라서 원과 S가 만날 확률은

$$p=\frac{l^2-\{l-2(r+1)\}^2}{l^2}$$

이다.

[3.3] 문항 [3.2]에서 구한 확률에 $l=8$과 $r=1$을 대입하면 점 (a,b)를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원이 S와 만날 확률은 $p=\frac{3}{4}$이다. 주머니 C의 구슬의 개수를 확률변수 X라 하면, X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(4,\frac{3}{4}\right)$를 따른다. 따라서 S와 만나는 원의 개수가 3개 이하일 확률은

$$\mathrm{P}(X\le 3)=1-\mathrm{P}(X=4)=1-{}_4C_4\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{175}{256}$$

이다.

[3.4] 주머니 C의 구슬의 개수를 확률변수 X라 하면, X는 $\mathrm{B}\left(1200,\frac{3}{4}\right)$을 따르므로 평균과 분산은 각각 다음과 같다.

$$\mu=np=1200\times\frac{3}{4}=900,\quad \sigma^2=np(1-p)=1200\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=225=15^2$$

시행의 횟수가 충분히 크므로 이항분포와 정규분포의 관계를 이용하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(900,15^2)$을 따름을 알 수 있다. 따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(894\le X\le 918)&=\mathrm{P}\left(\frac{894-900}{15}\le\frac{X-900}{15}\le\frac{918-900}{15}\right)\\&=\mathrm{P}(-0.4\le Z\le 1.2)\end{aligned}$$

이고, 주어진 정규분포표에 의하여

$$\mathrm{P}(894\le X\le 918)=0.1554+0.3849=0.5403$$

이다.

3. 출제근거

「확률의 뜻과 기본 성질」, 『고등학교 확률과 통계』, 지학사, 2020, 45-50쪽.
「이항분포」, 『고등학교 확률과 통계』, 지학사, 2020, 92-97쪽
「정규분포」, 『고등학교 확률과 통계』, 지학사, 2020, 101, 108쪽